MỞ ĐẦU

Phương trình parabolic ngược thời gian thường xuyên xuất hiện trong lý thuyết truyền nhiệt, trong Địa vật lý, trong các bài toán về nước ngầm, khoa học vật liệu, thủy động học, xử lý ảnh... Đó là bài toán cho phương trình parabolic khi điều kiện ban đầu không được biết mà ta phải xác định nó khi biết điều kiện cuối cùng. Các bài toán này đã được nghiên cứu khá nhiều, tuy nhiên cũng chỉ cho một lớp phương trình đặc biệt; hơn thế nữa việc đề xuất các phương pháp số hữu hiệu để giải gần đúng các bài toán này luôn là những vấn đề thời sự.

Phương trình parabolic ngược thời gian là bài toán *đặt không chỉnh* theo nghĩa Hadamard. Một bài toán được gọi là *đặt chỉnh* nếu nó thỏa mãn ba điều kiện: a) nó có nghiệm, b) nghiệm duy nhất, c) nghiệm phụ thuộc liên tục (theo một tôpô nào đó) theo dữ kiện của bài toán. Nếu ít nhất một trong ba điều kiện trên không thỏa mãn thì ta nói rằng bài toán *đặt không chỉnh*. Hadamard cho rằng các bài toán đặt không chỉnh không có ý nghĩa vật lý. Tuy nhiên, nhiều bài toán thực tiễn của khoa học và công nghệ đã dẫn đến các bài toán đặt không chỉnh. Chính vì những lý do này mà từ đầu thập niên 50 của thế kỷ trước, nhiều công trình nghiên cứu đã đề cập tới bài toán đặt không chỉnh. Các nhà toán học A. N. Tikhonov, M. M. Lavrent'ev, F. John, C. Pucci, V. K. Ivanov là những người đi tiên phong trong lĩnh vực này.

Từ năm 1955, John đã công bố kết quả về phương pháp số để giải bài toán Cauchy cho phương trình truyền nhiệt ngược thời gian. Sau đó Krein và cộng sự cũng lần lượt công bố các kết quả về đánh giá ổn định nghiệm cho phương trình parabolic ngược thời gian và về tính duy nhất ngược cho bài toán này. Năm 1963, Tikhonov đã đề xuất một phương pháp chỉnh hóa, ứng dụng được cho hầu hết các bài toán đặt không chỉnh và bài toán ngược. Đặc biệt, phương pháp này đã được Franklin ứng dụng thành công cho phương trình truyền nhiệt ngược thời gian vào năm 1974.

Ngoài các phương pháp trên, nhiều tác giả còn sử dụng phương pháp tựa đảo (phương pháp QR), phương pháp ổn định tựa đảo (phương pháp SQR), phương pháp phương trình dầm ngược (the backward beam equation approach), phương pháp bài toán giá trị biên không địa phương, phương pháp lặp, phương pháp biểu diễn nghiệm ở dạng chuỗi, phương pháp sai phân, phương pháp làm nhuyễn (mollification method)... cho phương trình parabolic ngược thời gian. Tuy nhiên, không có một phương pháp nào là đa năng và có thể giải quyết thấu đáo tất cả các loại bài toán. Chẳng hạn như phương pháp Tikhonov hoặc phương pháp tựa đảo đòi hỏi phải giải một phương trình bậc cao gấp đôi phương trình đã có và việc tìm tham số hiệu chỉnh là không dễ dàng. Ngoài ra, rất khó sử dụng phương pháp của Tikhonov trong không gian Banach, hay nói chung là việc nghiên cứu phương pháp chỉnh hóa trong không gian Banach chưa được phát triển.

Cho đến nay, hàng trăm công trình có giá trị về phương trình parabolic ngược thời gian đã được công bố tập trung vào các hướng nghiên cứu chính là:
1) Tính duy nhất ngược (backward uniqueness),
2) Đánh giá ổn định,
3) Phương pháp chỉnh hóa, phương pháp số ổn định và hữu hiệu.

Trong luận án này, chúng tôi tập trung nghiên cứu về các đánh giá ổn định và chỉnh hóa phương trình parabolic ngược thời gian. Chúng tôi chỉnh hóa bài toán

$$\begin{cases} u_t + Au = 0, \quad 0 < t < T, \\ \|u(T) - f\| \leqslant \varepsilon \end{cases} \tag{0.1}$$

bằng cách sử dụng phương pháp bài toán giá trị biên không địa phương

$$\begin{cases} v_{\alpha t} + Av_\alpha = 0, \quad 0 < t < aT, \\ \alpha v_\alpha(0) + v_\alpha(aT) = f \end{cases} \tag{0.2}$$

với $a \geqslant 1$ và tham số chỉnh hóa $\alpha > 0$. Chúng tôi đưa ra cách chọn tham số hiệu chỉnh tiên nghiệm và hậu nghiệm để các phương pháp chỉnh hóa bậc tối ưu. Ngoài ra, phương pháp đã được thử nghiệm trên máy tính và cho kết quả rất khả quan.

Theo chúng tôi, Vabishchevich là một trong những người đầu tiên sử dụng phương pháp này cho phương trình parabolic ngược thời gian vào năm 1981. Ông đã đề xuất một phương pháp tiên nghiệm cho bài toán (0.1) nhưng không đưa ra tốc độ hội tụ như chúng tôi đã làm trong luận án. Ngoài ra, ông cũng đã đề xuất phương pháp hậu nghiệm cho bài toán (0.1) như sau:

Giải bài toán đặt chỉnh

$$\begin{cases} u_{\alpha t} + Au_\alpha = 0, \quad 0 < t < T, \\ \alpha u_\alpha(0) + u_\alpha(T) = f, \quad \alpha > 0 \end{cases}$$

và chọn α sao cho $\|u_\alpha(T) - f\| = \varepsilon$. Tuy nhiên, chúng tôi không thể chứng minh được cách làm này sẽ kéo theo một phương pháp bậc tối ưu. Do đó, chúng tôi đề xuất sử dụng phương pháp dưới đây.

Cố định một số $a > 1$. Xét bài toán đặt chỉnh

$$\begin{cases} v_{\alpha t} + Av_\alpha = 0, \quad 0 < t < aT, \\ \alpha v_\alpha(0) + v_\alpha(aT) = f, \quad \alpha > 0 \end{cases} \tag{0.3}$$

và lấy $v_\alpha((a-1)T + t)$ là một xấp xỉ của $u(t)$. Chúng tôi đề xuất các cách chọn tham số α một cách tiên nghiệm và hậu nghiệm, sau đó chứng minh rằng cách làm đó sẽ cho ta các phương pháp chỉnh hóa bậc tối ưu cho bài toán (0.1). Phương pháp tiên nghiệm được đưa ra trong các Định lý 1.2.1, 1.2.3, 1.2.5, 1.3.1, còn phương pháp hậu nghiệm được phát biểu như sau: Giả sử $\varepsilon < \|f\|$, lấy $\tau > 1$ thỏa mãn điều kiện $\tau\varepsilon < \|f\|$. Chọn $\alpha > 0$ sao cho $\|v_\alpha(aT) - f\| = \tau\varepsilon$.

Trước đây, Showalter, Clark, Oppenheimer và Mel'nikova đã chỉnh hóa bài toán (0.1) bằng bài toán giá trị biên không địa phương

$$\begin{cases} u_t + Au = 0, \quad 0 < t < T, \\ \alpha u(0) + u(T) = f, \quad \alpha > 0. \end{cases} \tag{0.4}$$

Kết quả của chúng tôi đạt được trong trường hợp $a = 1$ chính xác hơn một số đánh giá sai số của họ. Ngoài ra, Denche và Bessila đã xấp xỉ bài toán (0.1) bởi bài toán

$$\begin{cases} u_t + Au = 0, \quad 0 < t < T, \\ -\alpha u_t(0) + u(T) = f, \quad \alpha > 0. \end{cases} \tag{0.5}$$

Họ đạt được một đánh giá sai số kiểu logarithm tại $t = 0$ với điều kiện khá ngặt là $\|Au(0)\|$ bị chặn, có nghĩa là $u(0)$ phải nằm trong miền xác định của A. Điều này không thường gặp trong thực tế. Chúng tôi đã chứng minh trong luận án rằng ta không cần đòi hỏi u_t tồn tại tại $t = 0$ như các tác giả trên, mà chỉ cần sử dụng bài toán (0.4) ta cũng có thể nhận được các đánh giá ổn định so sánh được với các kết quả của họ.

Khác với trường hợp toán tử A không phụ thuộc thời gian, trường hợp toán tử A phụ thuộc thời gian phức tạp hơn nhiều vì ta không có công thức biểu diễn tường minh nghiệm của bài toán và có rất ít kết quả về đánh giá ổn định cũng như chỉnh hóa bài toán trong trường hợp này. Trong luận án, chúng tôi cải tiến phương pháp của Agmon và Nirenberg để nhận được các đánh giá ổn định tốt hơn của các tác giả này. Ngoài ra, chúng tôi còn chỉ ra rằng trong một số trường hợp đánh giá ổn định đó còn tốt hơn cả trường hợp hệ số không phụ thuộc thời gian. Điều đặc biệt là bằng cách sử dụng bài toán giá trị biên không địa phương, với các cách chọn tham số tiên nghiệm và hậu nghiệm để chỉnh hóa phương trình parabolic với hệ số biến thiên ngược thời gian, chúng tôi nhận được các đánh giá sai số kiểu Hölder. Đây là kết quả duy nhất từ trước đến nay về phương pháp chỉnh hóa cho tốc độ hội tụ đối với bài toán này.

Trong một phần của luận án, chúng tôi sử dụng phương pháp làm nhuyễn để chỉnh hóa phương trình dẫn nhiệt ngược thời gian trong không gian Banach $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$. Cụ thể chúng tôi nghiên cứu bài toán sau đây: Cho $p \in (1,\infty), \varphi \in L_p(\mathbb{R})$ và ε, E là các hằng số thỏa mãn $0 < \varepsilon < E < \infty$, xét phương trình truyền nhiệt ngược thời gian

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, t \in (0,T), \\ \|u(\cdot,T) - \varphi(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R})} \leqslant \varepsilon \end{cases} \tag{0.6}$$

với ràng buộc $$\|u(\cdot,0)\|_{L_p(\mathbb{R})} \leqslant E. \tag{0.7}$$

Chúng tôi nhận thấy rằng, trường hợp $p \neq 2$ khó hơn nhiều, vì chúng ta không có đẳng thức Parseval và biến đổi Fourier của một hàm trong $L_p(\mathbb{R})$ với $p > 2$ nói chung là một hàm suy rộng.

Đinh Nho Hào đã đưa ra đánh giá ổn định kiểu Hölder với $p \in (1,\infty]$ như sau: Nếu u_1 và u_2 là hai nghiệm của bài toán, thì tồn tại hằng số c^* sao cho với mọi $t \in [0,T]$ ta có $\|u_1(\cdot,t) - u_2(\cdot,t)\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq 4\sqrt{3}((c^*E)^{1-t/T}\varepsilon^{t/T} + (c^*E)^{1-t/(4T)}\varepsilon^{t/(4T)})$. Trong luận án này, chúng tôi đã cải tiến đánh giá này với $p \in (1,\infty)$. Cụ thể, với

$p \in (1, \infty)$, chúng tôi chứng tỏ rằng tồn tại hằng số $c > 0$ sao cho

$$\|u_1(\cdot, t) - u_2(\cdot, t)\|_{L_p(\mathbb{R})} \leqslant c\varepsilon^{t/T} E^{1-t/T}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Do phương trình truyền nhiệt ngược thời gian là bài toán đặt không chỉnh: một nhiễu nhỏ trong dữ kiện Cauchy có thể gây ra một lỗi lớn về nghiệm nên để vượt qua khó khăn này, Đinh Nho Hào đã đề xuất phương pháp nhuyễn để giải bài toán một cách ổn định và chứng minh các đánh giá ổn định kiểu Hölder của nghiệm. Trong luận án, chúng tôi sử dụng kỹ thuật này để chỉnh hóa bài toán (0.6)–(0.7). Tuy nhiên, thay vì sử dụng nhân de la Vallée Poussin để làm nhuyễn dữ kiện Cauchy φ, chúng tôi sử dụng nhân Dirichlet và dữ kiện được làm nhuyễn bằng cách lấy tích chập của nhân này với φ. Dữ kiện được làm nhuyễn thuộc không gian các hàm có băng giới nội (band-limited functions), mà ở đó bài toán Cauchy đặt chỉnh và với cách chọn tham số nhuyễn thích hợp chúng ta đạt được đánh giá sai số kiểu Hölder. Các đánh giá ổn định cho nghiệm của bài toán (0.6)–(0.7) là hệ quả trực tiếp của các đánh giá sai số và bất đẳng thức tam giác.

Trong luận án, bổ sung vào kết quả của Đinh Nho Hào trong trường hợp $p = 2$, chúng tôi thiết lập đánh giá ổn định kiểu Hölder cho tất cả đạo hàm đối với x và t của nghiệm. Để ý rằng, các đánh giá như vậy rất ít khi nhận được trong lý thuyết các bài toán đặt không chỉnh.

Như đã được biết, chỉ với điều kiện (0.7), chúng ta không hy vọng có một sự phụ thuộc liên tục của nghiệm tại $t = 0$ vào điều kiện cuối. Tuy nhiên, ta có thể nhận được tính chất này, nếu có thêm một điều kiện về độ trơn của nghiệm tại thời điểm ban đầu $u(x, 0)$ (xem Định lý 3.2.7). Để đạt được mục đích này, hệ số chỉnh hóa thường được chọn phụ thuộc vào các tham số của điều kiện nguồn về độ trơn, nhưng các tham số này nhìn chung là không được biết. Để vượt qua hạn chế này, trong các Định lý 3.2.6 và 3.2.10, chúng tôi đề xuất một cách chọn tham số làm nhuyễn chỉ sử dụng điều kiện (0.7) mà vẫn đảm bảo đánh giá sai số kiểu Hölder trong $(0, T]$ và sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào dữ kiện bài toán tại $t = 0$ khi một điều kiện về độ trơn của điều kiện ban đầu được thỏa mãn mặc dù các tham số về điều kiện này không được biết cụ thể. Cách chọn tham số làm nhuyễn này lý thú và hiệu quả cho việc giải số bài toán (0.6)–(0.7).

Khi $p = 2$, thì biến đổi Fourier của dữ kiện đã được làm nhuyễn có giá compact, do đó chúng ta có ít nhất hai dạng tương đương của phương pháp làm nhuyễn: một là dạng gốc của nó, hai là ở dạng chặt cụt tần số. Hai dạng này dẫn tới hai phương pháp số khác nhau và có thể dễ dàng thực hiện trên máy tính nhờ kỹ thuật biến đổi Fourier nhanh (FFT). Với $p \neq 2$, các phương pháp trên không áp dụng được, nên chúng tôi đề xuất một sơ đồ sai phân tiến ổn định cho bài toán (0.6). Chúng tôi thử nghiệm các phương pháp trên các ví dụ số khác nhau và thấy rằng chúng ổn định, nhanh và hiệu quả.

Ngoài phần Mở đầu, Kết luận, Danh mục công trình của NCS có liên quan đến luận án và Tài liệu tham khảo, Luận án được chia thành 3 chương.

Chương 1 trình bày các kết quả chỉnh hóa phương trình parabolic ngược thời gian với hệ số không phụ thuộc thời gian trong không gian Hilbert. Các Định lý 1.2.1, 1.2.3, 1.2.5 trình bày các kết quả cho cách chọn tham số hiệu chỉnh tiên nghiệm trong trường hợp $a = 1$. Các Định lý 1.3.1, 1.3.3 trình bày các kết quả cho cách chọn tham số tiên nghiệm và hậu nghiệm trong trường hợp $a > 1$. Phần cuối chương 1, các ví dụ số cũng được đưa ra để minh chứng cho phần lý thuyết.

Chương 2 trình bày các kết quả về đánh giá ổn định và chỉnh hóa phương trình parabolic ngược thời gian với hệ số phụ thuộc thời gian trong không gian Hilbert.

Chương 3 trình bày các kết quả ổn định cho phương trình truyền nhiệt ngược thời gian trong các không gian Hilbert và Banach, cụ thể là các không gian $L_p(\mathbb{R})$ với $p \in (1, +\infty)$. Các Định lý 3.2.1, 3.2.3 cho ta kết quả ổn định và chỉnh hóa trong không gian Banach với tốc độ hội tụ như đã đạt được đối với phương trình trong không gian Hilbert. Một hiệu chỉnh nhỏ cách chọn tham số ν trong Định lý 3.2.1 đảm bảo cho ta một đánh giá ổn định kiểu Hölder với mọi $t \in (0, T]$ và sự phụ thuộc liên tục kiểu logarithm tại $t = 0$ với $\tilde{E}$ và γ không được biết cụ thể được trình bày trong Định lý 3.2.6. Trong trường hợp $p = 2$, Định lý 3.2.7 đưa ra đánh giá sai số cho tất cả các đạo hàm của nghiệm đối với x và t. Một hiệu chỉnh nhỏ việc chọn tham số ν trong Định lý 3.2.7 đảm bảo sự phụ thuộc liên tục kiểu logarithm tại $t = 0$ khi (3.7) đúng với $\tilde{E}$ và γ không được biết cụ thể được trình bày trong Định lý 3.2.10. Phần cuối chương 3 trình bày sơ đồ sai phân tiến ổn định và các ví dụ số.

CHƯƠNG 1

PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC NGƯỢC THỜI GIAN VỚI HỆ SỐ KHÔNG PHỤ THUỘC THỜI GIAN

Xét phương trình parabolic ngược thời gian

$$\begin{cases} u_t + Au = 0, \quad 0 < t < T, \\ \|u(T) - f\| \leqslant \varepsilon \end{cases} \tag{1.1}$$

với A là toán tử dương tự liên hợp không bị chặn và có một cơ sở gồm các vectơ riêng trực chuẩn $\{\phi_i\}_{i\geqslant 1}$ trong không gian Hilbert H với chuẩn $\|\cdot\|$, tương ứng với các giá trị riêng $\{\lambda_i\}_{i\geqslant 1}$ sao cho $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots, \quad \lim\limits_{i\to+\infty} \lambda_i = +\infty$ và $\varepsilon > 0$ đã cho. Để chỉnh hóa bài toán, ta giả thiết thêm rằng,

$$\|u(0)\| \leqslant E \tag{1.2}$$

với số thực E thỏa mãn $E > \varepsilon > 0$.

Trong chương này, chúng tôi chỉnh hóa bài toán (1.1), (1.2) bằng bài toán giá trị biên không địa phương đặt chỉnh

$$\begin{cases} v_{\alpha t} + Av_\alpha = 0, \quad 0 < t < aT, \\ \alpha v_\alpha(0) + v_\alpha(aT) = f \end{cases} \tag{1.3}$$

với $a \geqslant 1$ và tham số chỉnh hóa $\alpha > 0$. Bằng cách chọn tham số chỉnh hóa thích hợp, chúng tôi thu được các đánh giá sai số có bậc tối ưu. Chương này tổng hợp các kết quả được chúng tôi công bố trên các tạp chí *Journal of Mathematical Analysis and Applications* và *IMA Journal of Applied Mathematics*.

1.1 Một số khái niệm và bổ đề cơ sở

Định nghĩa 1.1.1. Cho H là không gian Hilbert thực với tích vô hướng $\langle\cdot,\cdot\rangle$ và chuẩn $\|\cdot\|$, a và T là các số thực dương. *Không gian* $C([0, aT]; H)$ bao gồm tất cả các hàm liên tục $u : [0, aT] \to H$ với chuẩn $\|u\|_{C([0,aT];H)} = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant aT} \|u(t)\| < \infty$.

Không gian $C^1((0,aT);H)$ bao gồm tất cả các hàm khả vi liên tục $u:(0,aT)\to H$. Kí hiệu $D(A)\subset H$ là miền xác định của toán tử $A: D(A)\subset H\to H$.

Định nghĩa 1.1.2. Hàm $v_\alpha:[0,aT]\to H$ được gọi là *nghiệm của (1.3)* nếu $v_\alpha\in C^1((0,aT);H)\cap C([0,aT];H), v_\alpha(t)\in D(A),\ \forall t\in(0,aT)$, thỏa mãn phương trình $v_{\alpha t}+Av_\alpha=0$ trên khoảng $(0,aT)$ và điều kiện giá trị biên $\alpha v_\alpha(0)+v_\alpha(aT)=f$.

Định nghĩa 1.1.3. *Hàm số* $H(\eta)$ được xác định bởi

$$H(\eta)=\begin{cases}\eta^\eta(1-\eta)^{1-\eta}, & \eta\in(0,1),\\ 1, & \eta=0 \text{ và } 1.\end{cases}\tag{1.4}$$

Rõ ràng rằng, $H(\eta)\le 1$ với mọi $\eta\in[0,1]$.

Hàm số $C(x,y)$ với $1>x\geqslant 0, y>0$ được xác định bởi

$$C(x,y)=\left(\frac{y}{1-x}\right)^y e^{1-x-y}.\tag{1.5}$$

1.2 Chỉnh hóa phương trình parabolic ngược thời gian bằng bài toán giá trị biên không địa phương trong trường hợp $a=1$

Trong phần này, chúng tôi hiệu chỉnh bài toán (1.1), (1.2) bằng bài toán giá trị biên không địa phương

$$\begin{cases}v_t+Av=0,\ 0<t<T,\\ \alpha v(0)+v(T)=f,\ \alpha>0.\end{cases}\tag{1.6}$$

Để đơn giản, ký hiệu nghiệm của (1.1) là $u(t)$ và nghiệm của (1.6) là $v(t)$.

Định lý 1.2.1. *Nếu* $u(t)$ *thỏa mãn điều kiện (1.2), thì bất đẳng thức sau đây đúng*

$$\|v(t)-u(t)\|\leqslant Q(t,\alpha)\left(\alpha^{t/T-1}\varepsilon+\alpha^{t/T}E\right),\quad \forall t\in[0,T].\tag{1.7}$$

Hơn nữa, nếu chọn $\alpha=\dfrac{\varepsilon}{E}$, *thì* $\|v(t)-u(t)\|\leqslant 2Q\left(t,\dfrac{\epsilon}{E}\right)\varepsilon^{t/T}E^{1-t/T},\ \forall t\in[0,T]$.

Ở đây

$$\begin{aligned}Q(t,\alpha)&=\min\{K(t,\alpha),H(t/T)\},\quad t\in[0,T],\\ K(t,\alpha)&:=\sqrt{H(t/T)}\sqrt{2\alpha+1}^{-t/T}\in(0,1),\forall t\in(0,T),\forall\alpha>0,\\ K(0,\alpha)&=1,K(T,\alpha)=1/\sqrt{2\alpha+1}.\end{aligned}$$

Định lý 1.2.1 không đưa ra bất kỳ thông tin nào về sự phụ thuộc liên tục của nghiệm của bài toán (1.1)–(1.2) tại $t = 0$ theo dữ kiện tại $t = T$, vì điều kiện (1.2) quá yếu. Để có được đánh giá ổn định kiểu logarithm và kiểu Hölder tại $t = 0$ ta cần phải có các giả thiết mạnh hơn về lời giải tại $t = 0$, chẳng hạn như

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2\beta} \langle u(0), \phi_n \rangle^2 \leqslant E_1^2 \tag{1.8}$$

hoặc

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{2\gamma\lambda_n} \langle u(0), \phi_n \rangle^2 \leqslant E_2^2 \tag{1.9}$$

với các các hằng số dương β, γ, E_1 và E_2 nào đó.

Định lý 1.2.3. *Giả sử rằng thay vì (1.2), chúng ta có (1.8), khi đó với mọi $t \in [0, T)$ bất đẳng thức sau đây là đúng*

$$\|u(t) - v(t)\| \leqslant \begin{cases} Q(t,\alpha)\alpha^{\frac{t}{T}-1}\varepsilon + \alpha^{\frac{t}{T}} \left(\dfrac{T}{\ln\left((\frac{T\lambda_1 e}{\beta(t)})^{\beta(t)}/\alpha \right)} \right)^{\beta} C(t)^{\frac{t}{T}-1} E_1 \\ \text{nếu } 0 < \alpha < (\frac{T\lambda_1}{\beta(t)})^{\beta(t)}, \\ Q(t,\alpha)\alpha^{\frac{t}{T}-1}\varepsilon + \alpha \left(\dfrac{e^{\lambda_1 T}}{\lambda_1^{\beta(t)} C(t)} \right)^{1-\frac{t}{T}} E_1 \\ \text{nếu } \alpha \geqslant (\frac{T\lambda_1}{\beta(t)})^{\beta(t)}. \end{cases}$$

Ở đây $\beta(t) = \dfrac{\beta T}{T - t}, \forall t \in [0, T)$, $C(t) = 1$ nếu $0 < \beta(t) < 1$ và $C(t) = 2^{1-\beta(t)}$ nếu $\beta(t) \geqslant 1$.

Nếu chọn $\alpha = \alpha_0 := \dfrac{\varepsilon^{1-\delta}}{E_1}$ với $0 < \delta < 1$, thì với mọi $t \in [0, T)$ ta có

$$\|u(t) - v(t)\| \leqslant$$

$$\begin{cases} \varepsilon^{\frac{t}{T}} E_1^{1-\frac{t}{T}} \left\{ Q(t,\alpha_0)\varepsilon^{\delta(1-\frac{t}{T})} + \varepsilon^{-\delta\frac{t}{T}} \left(\dfrac{T}{\ln\left((\frac{T\lambda_1 e}{\beta(t)})^{\beta(t)} E_1/\varepsilon^{1-\delta} \right)} \right)^{\beta} C(t)^{\frac{t}{T}-1} \right\} \\ \qquad \text{nếu } 0 < \alpha_0 < (\frac{T\lambda_1}{\beta(t)})^{\beta(t)}, \\ \epsilon^{\frac{t}{T}} E_1^{1-\frac{t}{T}} \left\{ Q(t,\alpha_0)\epsilon^{\delta(1-\frac{t}{T})} + \varepsilon^{1-\delta-\frac{t}{T}} \left(\dfrac{e^{\lambda_1 T}}{\lambda_1^{\beta(t)} C(t)} \right)^{1-\frac{t}{T}} E_1^{\frac{t}{T}-1} \right\} \\ \qquad \text{nếu } \alpha_0 \geqslant (\frac{T\lambda_1}{\beta(t)})^{\beta(t)}. \end{cases}$$

Nhận xét 1.2.4. Từ đánh giá cuối của Định lý 1.2.3, tại $t = 0$ ta có đánh giá sai số kiểu logarithm. Đặc biệt, với $\beta = 1$, đánh giá đó so sánh được với đánh giá sai số của Denche và Bessila.

Định lý 1.2.5. *Giả sử rằng thay vì (1.2) chúng ta có (1.9), khi đó với mọi $t \in [0, T)$ bất đẳng thức sau đây là đúng*

$$\|u(t) - v(t)\| \leqslant \begin{cases} Q(t,\alpha)\alpha^{t/T-1}\varepsilon + \alpha^{(t+\gamma)/T}E_2 & \text{nếu } 0 < \gamma < T - t, \\ Q(t,\alpha)\alpha^{t/T-1}\varepsilon + \alpha E_2 & \text{nếu } \gamma \geqslant T - t. \end{cases}$$

Nếu chọn $\alpha = \alpha_1 := \dfrac{\varepsilon^{1-\delta}}{E_2}$ với $0 < \delta < 1$, thì với mọi $t \in [0, T)$ ta có

$$\|u(t) - v(t)\| \leqslant \begin{cases} \varepsilon^{t/T}E_2^{1-t/T}\Big(Q(t,\alpha_1)\varepsilon^{\delta(1-t/T)} + \epsilon^{(\gamma(1-\delta)-\delta t)/T}E_2^{t/T-1}\Big) \\ \text{nếu } 0 < \gamma < T - t, \\ \varepsilon^{t/T}E_2^{1-t/T}\Big(Q(t,\alpha_1)\varepsilon^{\delta(1-t/T)} + \varepsilon^{1-t/T-\delta}E_2^{t/T-1}\Big) \\ \text{nếu } \gamma \geqslant T - t. \end{cases}$$

1.3 Chỉnh hóa phương trình parabolic ngược thời gian bằng bài toán giá trị biên không địa phương trong trường hợp $a > 1$

Trong phần này, ký hiệu nghiệm của (1.1) là $u(t)$ và nghiệm của (1.3) là $v_\alpha(t)$.

Cách chọn tham số hiệu chỉnh tiên nghiệm

Định lý 1.3.1. *(i) Nếu $u(t)$ thỏa mãn điều kiện (1.2), thì với $\alpha = \left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^a$ ta có*

$$\|u(t) - v_\alpha((a-1)T + t)\| \leqslant \left(H\left(\frac{1}{a}\right) + 1\right)\varepsilon^{t/T}E^{1-t/T} < 2\varepsilon^{t/T}E^{1-t/T}, \ \forall t \in [0, T].$$

(ii) Nếu $u(t)$ thỏa mãn điều kiện (1.8), thì với $\alpha = \left(\frac{\varepsilon}{E_1}\left[\frac{1}{T}\ln\frac{E_1}{\varepsilon}\right]^\beta\right)^a$ và với mọi $t \in [0, T]$ ta có $\|u(t) - v_\alpha((a-1)T + t)\| \leqslant$

$$\leqslant C_1(t,T,a,\beta)\varepsilon^{t/T}E_1^{1-t/T}\left[\frac{1}{T}\ln\frac{E_1}{\varepsilon}\right]^{-\beta(T-t)/T}(1 + o(1)), \ \textit{khi } \varepsilon \to 0^+,$$

ở đây $C_1(t,T,a,\beta) = \left(1 + C\left(\frac{1}{a},\beta\right)\right)^{t/T} \left(H\left(\frac{1}{a}\right) + C(0,\beta)\right)^{1-t/T}$.

(iii) Nếu $u(t)$ *thỏa mãn điều kiện (1.9), thì với* $\alpha = \left(\frac{\varepsilon}{E_2}\right)^{\frac{aT}{T+\gamma}}$ *và với mọi* $t \in [0,T]$ *ta có* $\|u(t) - v_\alpha((a-1)T+t)\| \leqslant$

$$\leqslant \begin{cases} 2\varepsilon^{\frac{t+\gamma}{T+\gamma}} E_2^{1-\frac{t+\gamma}{T+\gamma}}, \quad \text{nếu } 0 < \gamma \leqslant (a-1)T, \\ \left(\varepsilon^{\frac{aT}{T+\gamma}} E_2^{1-\frac{aT}{T+\gamma}}\right)^{t/T} \left(2\varepsilon^{\frac{\gamma}{T+\gamma}} E_2^{\frac{T}{T+\gamma}}\right)^{1-t/T} (1+o(1)), \ \text{khi } \varepsilon \to 0^+, \\ \text{nếu } (a-1)T < \gamma \leqslant aT, \\ \varepsilon^{\frac{aT}{T+\gamma}} E_2^{1-\frac{aT}{T+\gamma}} (1+o(1)), \ \text{khi } \varepsilon \to 0^+, \quad \text{nếu } \gamma > aT. \end{cases}$$

Chọn tham số hiệu chỉnh hậu nghiệm

Định lý 1.3.3. *Giả sử rằng* $\varepsilon < \|f\|$. *Chọn* $\tau > 1$ *sao cho* $0 < \tau\varepsilon < \|f\|$. *Khi đó tồn tại duy nhất một số* $\alpha_\varepsilon > 0$ *thỏa mãn* $\|v_{\alpha_\varepsilon}(aT) - f\| = \tau\varepsilon.$ (1.10)

Hơn nữa, (i) nếu $u(t)$ *là một nghiệm của bài toán (1.1) và (1.2), thì*

$$\|u(t) - v_{\alpha_\varepsilon}((a-1)T+t)\| \leqslant (\tau+1)^{t/T} \left(\frac{2\tau-1}{\tau-1}\right)^{1-t/T} \varepsilon^{t/T} E^{1-t/T}, \quad \forall t \in [0,T],$$

(ii) nếu $u(t)$ *là nghiệm của bài toán (1.1) và (1.8), thì khi* $\varepsilon \to 0^+$,

$$\begin{aligned} &\|u(t) - v_{\alpha_\varepsilon}((a-1)T+t)\| \\ &\qquad \leqslant C_2(\tau,t,T,a,\beta)\varepsilon^{t/T} E_1^{1-t/T} \left[\frac{1}{T}\ln\frac{E_1}{\varepsilon}\right]^{-\beta(T-t)/T} (1+o(1)), \end{aligned}$$

với $C_2(\tau,t,T,a,\beta) = (\tau+1)^{\frac{t}{T}} a^{\beta(1-\frac{t}{T})} \left(\frac{1}{\tau-1} C(1/a,\beta) H(1/a) + C(0,\beta)\right)^{1-\frac{t}{T}}$.

(iii) nếu $u(t)$ *là nghiệm của bài toán (1.1) và (1.9), thì với* $t \in [0,T]$ *ta có*

$$\begin{aligned} &\|u(t) - v_{\alpha_\varepsilon}((a-1)T+t)\| \leqslant \\ &\qquad \leqslant \begin{cases} C_3(\tau,t,T,a,\beta)\varepsilon^{\frac{t+\gamma}{T+\gamma}} E_2^{1-\frac{t+\gamma}{T+\gamma}}, \quad \text{nếu } 0 < \gamma \leqslant (a-1)T, \\ C_4(\tau,t,T,a,\beta)\varepsilon^{1-\frac{1}{a}(1-\frac{t}{T})} E_2^{\frac{1}{a}(1-\frac{t}{T})}, \text{nếu } \gamma > (a-1)T, \end{cases} \end{aligned}$$

với
$$\begin{aligned} C_3(\tau,t,T,a,\beta) &= (\tau+1)^{\frac{t}{T}} \left((\tau+1)^{\frac{\gamma}{(T+\gamma)}} + (1/(\tau-1))^{\frac{T}{T+\gamma}}\right)^{1-\frac{t}{T}} \\ C_4(\tau,t,T,a,\beta)& \\ &= (\tau+1)^{\frac{t}{T}} \left((\tau+1)^{\frac{\gamma}{T+\gamma}} \varepsilon^{\frac{(\gamma-(a-1)T)}{a(T+\gamma)}} E_2^{-\frac{(\gamma-(a-1)T)}{a(T+\gamma)}} + (1/(\tau-1))^{\frac{1}{a}}\right)^{1-\frac{t}{T}} \end{aligned}$$

Nhận xét 1.3.5. (a) Trong trường hợp thứ nhất và thứ hai, phương pháp của chúng tôi có bậc tối ưu.

(b) Trong trường hợp thứ ba, phương pháp của chúng tôi có bậc tối ưu với $\gamma \in (0, (a-1)T]$.

1.4 Ví dụ số

Chúng tôi thử nghiệm trên máy tính phương pháp chọn hậu nghiệm của Mục 1.3 với hai ví dụ và thấy rằng phương pháp ổn định và hữu hiệu.

1.5 Kết luận Chương 1

Phương trình parabolic ngược thời gian

$$\begin{cases} u_t + Au = 0, \quad 0 < t < T, \\ \|u(T) - f\| \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

với ràng buộc $\|u(0)\| \leqslant E$ $(E > \varepsilon > 0)$ được chỉnh hóa bằng bài toán giá trị biên không địa phương đặt chỉnh

$$\begin{cases} v_{\alpha t} + Av_\alpha = 0, \quad 0 < t < aT, \\ \alpha v_\alpha(0) + v_\alpha(aT) = f, \ a \geqslant 1, \ \alpha > 0. \end{cases}$$

- Trong trường hợp $a = 1$, cách chọn tham số tiên nghiệm được đề xuất kéo theo các đánh giá ổn định kiểu Hölder cho tất cả $t \in (0; T]$, đánh giá ổn định kiểu logarithm hoặc kiểu Hölder tại $t = 0$ khi có thêm điều kiện nguồn. Khi không có thông tin về độ trơn của nghiệm tại thời điểm ban đầu, cách chọn tham số hậu nghiệm kéo theo các đánh giá ổn định kiểu Hölder cho tất cả $t \in (0; T]$ với bậc tối ưu cũng đạt được.

- Trong trường hợp $a > 1$, cách chọn tham số tiên nghiệm và hậu nghiệm được đề xuất kéo theo các phương pháp chỉnh hóa bậc tối ưu.

- Trình bày các kết quả số để minh chứng cho tính hữu hiệu của phần lý thuyết.

CHƯƠNG 2

PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC NGƯỢC THỜI GIAN VỚI HỆ SỐ PHỤ THUỘC THỜI GIAN

Trong chương này, chúng tôi trình bày các kết quả về đánh giá ổn định và chỉnh hóa cho phương trình parabolic ngược thời gian với hệ số phụ thuộc thời gian

$$\begin{cases} u_t + A(t)u = 0, \quad 0 < t < T, \\ \|u(T) - f\| \leqslant \varepsilon \end{cases} \tag{2.1}$$

thỏa mãn ràng buộc

$$\|u(0)\| \leqslant E, \tag{2.2}$$

trong đó $A(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T) : D(A(t)) \subset H \to H$ là toán tử dương tự liên hợp không bị chặn, H là một không gian Hilbert có tích vô hướng $\langle \cdot, \cdot \rangle$ và chuẩn $\| \cdot \|$, $f \in H$, $E > \varepsilon > 0$ đã được biết. Chương này tổng hợp các kết quả được chúng tôi công bố trên tạp chí *Inverse Problems*.

2.1 Các kết quả ổn định

A. Kết quả của Agmon và Nirenberg

Để tiện theo dõi, chúng tôi trình bày lại các kết quả của Agmon và Nirenberg
Giả sử rằng:

(i) $A(t) : D(A(t)) \subset H \to H$ là một toán tử đóng, xác định trù mật với mỗi $t \in [0, T]$ và $u(t)$ thuộc vào miền xác định của $A^*(t)$ cũng như của $A(t)$.

(ii) $A(t)$ trơn theo biến t và $A(t)$ là "tự liên hợp hầu khắp nơi". Giả thiết này được biểu diễn bằng một điều kiện đơn giản: nếu $u(t)$ là nghiệm của

phương trình

$$Lu = \frac{du}{dt} + A(t)u = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2.3}$$

thì tồn tại các hằng số dương k, c sao cho

$$-\Re \frac{d}{dt} \langle A(t)u(t), u(t) \rangle \geq \frac{1}{2} \|(A(t) + A^*(t))u(t)\|^2 - c\Re \langle (A(t) + k)u(t), u(t) \rangle .$$

Định lý 2.1.1 (Agmon và Nirenberg)**.** *Nếu các điều kiện (i)–(ii) được thỏa mãn thì hàm* $\log|e^{-kt}u(t)|$ *lồi theo biến* $s = e^{ct}$.

Các kết quả sau đây là hệ quả trực tiếp của Định lý 2.1.1.

Mệnh đề 2.1.2 (Đánh giá ổn định)**.** *Nếu các điều kiện (i)–(ii) được thỏa mãn thì với mọi* $t \in [0, T]$*, ta có*

$$\|u(t)\| \leq e^{kt-kT\mu(t)}\|u(T)\|^{\mu(t)}\|u(0)\|^{1-\mu(t)}, \tag{2.4}$$

với

$$\mu(t) = \frac{e^{ct}-1}{e^{cT}-1}. \tag{2.5}$$

Trong trường hợp $A(t)$ là toán tử tự liên hợp, ta có kết quả sau:

Mệnh đề 2.1.3. *Giả sử rằng*

(i) $A(t)$ *là toán tử tự liên hợp với mỗi* t *và* $u(t)$ *thuộc miền xác định của* $A(t)$.

(ii) Tồn tại các hằng số dương k, c *sao cho với* $u(t)$ *là nghiệm của phương trình* (2.3)*, thì ta có bất đẳng thức*

$$-\frac{d}{dt}\langle A(t)u(t), u(t)\rangle \geq 2\|A(t)u\|^2 - c\langle (A(t)+k)u(t), u(t)\rangle. \tag{2.6}$$

Khi đó, nghiệm $u(t)$ *của* (2.3) *thỏa mãn bất đẳng thức sau với mọi* $t \in [0, T]$

$$\|u(t)\| \leq e^{kt-kT\mu(t)}\|u(T)\|^{\mu(t)}\|u(0)\|^{1-\mu(t)}. \tag{2.7}$$

Nhận xét 2.1.4. $\mu(t) < \dfrac{t}{T}$, $\forall t \in (0, T)$. Do đó, kết quả đánh giá ổn định của Agmon và Nirenberg không tốt hơn kết quả trong trường hợp hệ số không phụ thuộc thời gian.

B. Cải tiến kết quả của Agmon và Nirenberg

Định lý 2.1.5. *Giả sử rằng*

(i) $A(t)$ *là toán tử tự liên hợp với mỗi* $t \in [0, T]$ *và* $u(t)$ *thuộc miền xác định của* $A(t)$.

(ii) Tồn tại các hằng số k, c *sao cho với* $u(t)$ *là nghiệm của* (2.3) *ta có bất đẳng thức*

$$-\frac{d}{dt}\langle A(t)u(t), u(t)\rangle \geq 2\|A(t)u\|^2 - c\langle (A(t)+k)u(t), u(t)\rangle. \tag{2.8}$$

Chọn $a_1(t)$ *là một hàm khả tích Riemann trên* $[0,T]$ *sao cho* $a_1(t) \leqslant c, \forall t \in [0,T]$ *và*

$$-\frac{d}{dt}\langle A(t)u(t), u(t)\rangle \geq 2\|A(t)u\|^2 - a_1(t)\langle (A(t)+k)u(t), u(t)\rangle. \tag{2.9}$$

Với mọi $t \in [0,T]$*, đặt*

$$a_2(t) = \exp\left(\int_0^t a_1(\tau)d\tau\right),\ a_3(t) = \int_0^t a_2(\xi)d\xi,\ \nu(t) = \frac{a_3(t)}{a_3(T)}. \tag{2.10}$$

Khi đó, nghiệm $u(t)$ *của phương trình* (2.3) *thỏa mãn đánh giá sau với mọi* $t \in [0,T]$*:*

$$\|u(t)\| \leq e^{kt-kT\nu(t)}\|u(T)\|^{\nu(t)}\|u(0)\|^{1-\nu(t)}. \tag{2.11}$$

Nhận xét 2.1.7. Nếu $A(t) = A$ là toán tử tự liên hợp không phụ thuộc vào t, thì ta có thể chọn $a_1(t) = 0, \forall t \in [0,T]$ và khi đó $\nu(t) = \dfrac{t}{T}, \forall t \in [0,T]$.

Nhận xét 2.1.8. Nếu $a_1(t) < 0, \forall t \in (0,T)$ thì $\nu(t) > \dfrac{t}{T}, \forall t \in (0,T)$.

Mệnh đề 2.1.9. *Với mọi* $t \in [0,T]$*, ta có* $\nu(t) \geqslant \mu(t)$*.*

Ví dụ 2.1.11. Ta xét bài toán một chiều

$$\begin{cases} u_t = (a(x,t)u_x)_x, & 0 < x < \pi, 0 < t < T, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & 0 \leq t \leq T \end{cases} \tag{2.12}$$

với hệ số $a(x,t) \in C^1([0,\pi]\times[0,T])$ và $a(x,t) \geq \bar{a} > 0$. Trong trường hợp này, ta có thể chọn $k = 0$ và $a_1(t) = \sup_{x\in[0,\pi]} \dfrac{a_t(x,t)}{a(x,t)}, t \in [0,T]$. Một ví dụ cụ thể về $a(x,t)$ là hàm số $a(x,t) = \dfrac{T\pi}{T+t} + x,\ \ \forall t \in [0,T], \forall x \in [0,\pi]$, ta có

$$\nu(t) = \frac{\frac{t}{T} + ln(1+\frac{t}{T})}{1+ln2} > \frac{t}{T},\ \ \forall t \in (0,T).$$

2.2 Hiệu chỉnh bài toán

Trong phần này, ta giả sử rằng: (H_1) Với $0 \leqslant t \leqslant T$, phổ của $A(t)$ được chứa trong một miền hình quạt

$$\sigma(A(t)) \subset \Sigma_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |arg\lambda| < \omega\},\ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2.13}$$

với góc ω cố định sao cho $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$ và tồn tại hằng số $M \geqslant 1$ sao cho

$$\|(\lambda - A(t))^{-1}\| \leqslant \frac{M}{|\lambda|},\quad \lambda \notin \Sigma_\omega,\ 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2.14}$$

(H_2) Miền xác định $D(A(t))$ độc lập với t và $A(t)$ khả vi liên tục mạnh.

(H_3) Với mọi $t \in [0, T]$, $A(t)$ là một toán tử không bị chặn, tự liên hợp, xác định dương và tồn tại hàm số $a_1(t)$ khả tích Riemann trên $[0, T]$ cùng với hằng số không âm k sao cho nếu $u(t)$ là một nghiệm của phương trình $\dfrac{du}{dt} + A(t)u = 0$, $0 < t \leq T$ thì

$$-\frac{d}{dt}\langle A(t)u(t), u(t)\rangle \geq 2\|A(t)u\|^2 - a_1(t)\langle (A(t)+k)u(t), u(t)\rangle . \tag{2.15}$$

Nhận xét 2.2.1. Nếu các giả thiết $(H_1)-(H_2)$ được thỏa mãn thì tồn tại hằng số $N > 0$ sao cho

$$\|A(t)(A(t)^{-1} - A(s)^{-1})\| \leqslant N|t-s|,\ 0 \leqslant s, t \leqslant T. \tag{2.16}$$

Đặt
$$B(t) = \begin{cases} A(t), \text{ nếu } 0 \leqslant t \leqslant T, \\ A(2T - t), \text{ nếu } T < t \leqslant 2T. \end{cases} \tag{2.17}$$

Khi đó $B(t) = B(2T - t), \forall t \in [0, 2T]$. Hơn nữa, $B(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2T)$ là các toán tử không bị chặn tự liên hợp xác định dương, miền xác định $D(B(t))$ độc lập với t, $B(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2T)$ thỏa mãn các điều kiện (2.13), (2.14) và (2.16).

Ký hiệu $w(t)$ là nghiệm của phương trình parabolic thuận thời gian

$$\begin{cases} w_t + B(t)w = 0, T \leqslant t \leqslant 2T, \\ w(T) = f. \end{cases} \tag{2.18}$$

Đặt $g = w(2T)$. Xét bài toán giá trị biên không địa phương

$$\begin{cases} v_t + B(t)v = 0, 0 < t \leqslant 2T, \\ \alpha v(0) + v(2T) = g, \alpha > 0. \end{cases} \tag{2.19}$$

Trong chương này, ta ký hiệu $u(t)$ là nghiệm của (2.1)–(2.2) và $v_\alpha(t)$ là nghiệm của bài toán (2.19).

Định nghĩa 2.2.2. Hàm $v_\alpha : [0, 2T] \to H$ được gọi là *nghiệm của (2.19)* nếu $v_\alpha \in C^1((0, 2T); H) \cap C([0, 2T]; H), v_\alpha(t) \in D(A),\ \forall t \in (0, 2T)$, và thỏa mãn $v_{\alpha t} + B(t)v_\alpha = 0$ trên khoảng $(0, 2T)$ cùng với điều kiện giá trị biên $\alpha v_\alpha(0) + v_\alpha(2T) = g$.

A. Luật chọn tham số hiệu chỉnh tiên nghiệm

Định lý 2.2.3. *Bài toán (2.19) là bài toán đặt chỉnh. Với $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{E}$ ta có đánh giá*

$$\|u(t) - v_\alpha(t)\| \leq 2e^{kt - kT\nu(t)}\varepsilon^{\frac{\nu(t)}{2}}E^{1-\frac{\nu(t)}{2}}, \quad \forall t \in [0, T],$$

trong đó $\nu(t)$ được xác định theo công thức (2.10).

B. Luật chọn tham số hiệu chỉnh hậu nghiệm

Định lý 2.2.11. *Giả sử rằng* $\varepsilon < \|g\|$. *Chọn* $\tau > 1$ *sao cho* $\tau\varepsilon < \|g\|$. *Khi đó, tồn tại duy nhất một số* $\alpha_\varepsilon > 0$ *sao cho*

$$\|v_{\alpha_\varepsilon}(2T) - g\| = \tau\varepsilon. \tag{2.20}$$

Hơn nữa, nếu $u(t)$ *là một nghiệm của bài toán (2.1) và (2.2), thì với mọi* $t \in [0, T]$ *ta có*

$$\|u(t) - v_{\alpha_\varepsilon}(t)\| \leqslant (1+\tau)(\tau-1)^{\frac{\nu(t)}{2}-1} e^{kt-kT\nu(t)} \varepsilon^{\frac{\nu(t)}{2}} E^{1-\frac{\nu(t)}{2}}. \tag{2.21}$$

2.3 Các ví dụ

Giả sử rằng Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ với biên đủ trơn, $0 < T < \infty$. Đặt $Q := \Omega \times (0, T)$. Với bất kỳ đa chỉ số $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, ta định nghĩa $|p| = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ và $D^p = \frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n}}$. Các kết quả trong các phần 2.1 và 2.2 có thể ứng dụng cho phương trình parabolic bậc $2m \quad (m \geq 1)$

$$u_t = -\sum_{|p|,|q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p (a_{pq}(x,t) D^q u), \quad (x,t) \in Q \tag{2.22}$$

với các hệ số $a_{pq} \in C^1([0,T]; L^\infty(\Omega))$ là các hàm thực thỏa mãn $a_{pq} = a_{qp}$ và điều kiện elliptic đều

$$\sum_{|p|,|q|=m} \xi^p a_{pq}(x,t) \xi^q \geq \delta |\xi|^{2m}, \quad \forall (x,t) \in Q, \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \tag{2.23}$$

đối với số dương δ nào đó độc lập với t cùng các điều kiện biên Dirichlet hoặc các điều kiện biên chuẩn.

2.4 Kết luận chương 2

Kết quả trong Chương 2 bao gồm:

- Đưa ra kết quả mới về đánh giá ổn định cho phương trình parabolic ngược thời gian với hệ số phụ thuộc thời gian (Định lý 2.1.5).

- Đưa ra phương pháp chỉnh hóa phương trình parabolic ngược thời gian với hệ số phụ thuộc thời gian. Các phương pháp chọn tham số tiên nghiệm và hậu nghiệm được đề xuất để đảm bảo các đánh giá sai số kiểu Hölder (Định lý 2.2.3, Định lý 2.2.11).

CHƯƠNG 3

CÁC KẾT QUẢ ỔN ĐỊNH CHO PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN NHIỆT NGƯỢC THỜI GIAN

Trong chương này, chúng tôi trình bày các kết quả ổn định cho phương trình truyền nhiệt ngược thời gian

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, t \in (0,T), \qquad \|u(\cdot,T) - \varphi(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R})} \leqslant \varepsilon \tag{3.1}$$

với ràng buộc $$\|u(\cdot,0)\|_{L_p(\mathbb{R})} \leqslant E \tag{3.2}$$

trong đó $T > 0$, $\varphi \in L_p(\mathbb{R}), 0 < \varepsilon < E, 1 < p < \infty$ đã cho. Các kết quả của chương này được chúng tôi công bố trên tạp chí *Journal of Mathematical Analysis and Applications*.

3.1 Các kết quả bổ trợ

Định nghĩa 3.1.1. Hàm $g(z), z \in \mathbb{C}$ được gọi là *hàm nguyên dạng mũ ν* nếu nó thỏa mãn các tính chất sau:

(i) Nó là một hàm nguyên, nghĩa là, nó phân tích được thành chuỗi lũy thừa $g(z) = \sum_{k\geqslant 0} a_k z^k$ với hệ số hằng số a_k và chuỗi hội tụ tuyệt đối với tất cả số phức $z \in \mathbb{C}$.

(ii) Với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại một số dương A_ε sao cho với mọi số phức $z \in \mathbb{C}$ bất đẳng thức $|g(z)| \leqslant A_\varepsilon \exp((\nu + \varepsilon)|z|)$ được thỏa mãn.

Định nghĩa 3.1.2. $\mathfrak{M}_{\nu,p} := \mathfrak{M}_{\nu,p}(\mathbb{R})$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ là tập hợp các hàm nguyên dạng mũ ν khi giới hạn $x \in \mathbb{R}$ thuộc $L_p(\mathbb{R})$.

Định nghĩa 3.1.5. Hàm $D_\nu(x) = \dfrac{\sin(\nu x)}{x}$ được gọi là *nhân Dirichlet* và có các tính chất sau đây:

(i) Nó là một hàm nguyên dạng mũ ν thuộc vào $L_2(\mathbb{R})$.

(ii)
$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\widehat{D}_\nu = \begin{cases} 1 & \text{trên} \quad [-\nu, \nu], \\ 0 & \text{bên ngoài} \quad [-\nu, \nu]. \end{cases}$$

(iii) $\dfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} D_\nu(x)dx = 1 \quad (\nu > 0)$.

(iv) Với $f \in L_p(\mathbb{R}),\ p \in (1, \infty),\ S_\nu(f)(x) = \dfrac{1}{\pi}D_\nu * f = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} D_\nu(y)f(x-y)dy$ thuộc vào $\mathfrak{M}_{\nu,p}$ và $\|D_\nu * f\|_p \leqslant c_p\|f\|_p$, ở đây c_p là một hằng số chỉ phụ thuộc vào p.

(v) Nếu $\omega \in \mathfrak{M}_{\nu,p}$ thì $S_\nu(\omega) = \omega$.

(vi) $F[D_v * f] = \widehat{f}$ trên $[-\nu, \nu]$.

(vii) $\|f - S_\nu(f)\|_p \leqslant (1 + c_p)E_\nu(f)_p$, ở đây $E_\nu(f)_p := \inf_{g\in\mathfrak{M}_{\nu,p}} \|f - g\|_p$.

3.2 Phương pháp nhuyễn và các kết quả ổn định

Chúng tôi làm nhuyễn dữ kiện bị nhiễu φ và xét bài toán đã làm nhuyễn

$$\begin{cases} u_t^\nu = u_{xx}^\nu, \quad x \in \mathbb{R}, t \in (0, T), \\ u^\nu(x, T) = S_\nu(\varphi)(x). \end{cases} \tag{3.3}$$

Định lý 3.2.1. *Cho $\varphi \in L_p(\mathbb{R})$ với $p \in (1, \infty)$. Khi đó bài toán (3.3) có một nghiệm duy nhất. Hơn nữa, với bất kỳ $t \in [0, T]$, hàm $u^\nu(\cdot, t)$ thuộc vào $\mathfrak{M}_{\nu,p}$ và*

$$\|u^\nu(\cdot, t)\|_p \leqslant \frac{c_p}{\pi}e^{(T-t)\nu^2}\|\varphi\|_p.$$

Nếu trong bài toán (3.3) ta chọn

$$\nu = \sqrt{\frac{1}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}},$$

thì

$$\|u^\nu(\cdot,t)-u(\cdot,t)\|_p \leqslant \left(\frac{c_p}{\pi}+\tilde{c}_p\right)\varepsilon^{t/T}E^{1-t/T}, \quad \forall t\in[0,T].$$

Ở đây u *là một nghiệm của bài toán (3.1)–(3.2) và* $\tilde{c}_p=(1+c_p)(1+2\sqrt{3})e^{3/2}$.

Định lý 3.2.3. *Cho* $p\in(1,\infty)$ *và* u_1, u_2 *là hai nghiệm của bài toán (3.1)–(3.2). Khi đó*

$$\|u_1(\cdot,t)-u_2(\cdot,t)\|_p \leqslant 2\left(\frac{c_p}{\pi}+\tilde{c}_p\right)\varepsilon^{t/T}E^{1-t/T}, \quad t\in[0,T].$$

Định lý 3.2.6. *Giả sử các điều kiện trong Định lý 3.2.1 được thỏa mãn. Lấy* $\beta\in(0,1)$. *Nếu* u *là một nghiệm của bài toán (3.1)–(3.2) và trong bài toán (3.3) ta chọn*

$$\nu=\sqrt{\beta\frac{1}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}},$$

thì

$$\|u^\nu(\cdot,t)-u(\cdot,t)\|_p \leqslant \left(\frac{c_p}{\pi}E^{\beta-1}\varepsilon^{1-\beta}+\tilde{c}_p\right)\varepsilon^{\beta t/T}E^{1-\beta t/T}, \quad \forall t\in[0,T].$$

Hơn nữa, nếu tồn tại các hằng số dương $\tilde{E}$, γ, *có thể không được biết cụ thể, sao cho*

$$\omega(u(\cdot,0),h)_p \leqslant \tilde{E}h^\gamma, \forall h>0, \tag{3.4}$$

thì tại $t=0$ *ta có*

$$\|u^\nu(\cdot,0)-u(\cdot,0)\|_p \leqslant \frac{c_p}{\pi}E^\beta\varepsilon^{1-\beta}+\tilde{c}_p\tilde{E}\left(\beta\frac{1}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\gamma/2}$$

là một đánh giá kiểu logarithm.

Định lý 3.2.7. *Giả sử* $p=2$ *và* u *là một nghiệm của bài toán (3.1)–(3.2),* u^ν *là nghiệm của bài toán (3.3). Khi đó, với*

$$\nu=\sqrt{\frac{1}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}} \tag{3.5}$$

ta có

$$\left\| \frac{\partial^{m+n} u^\nu(\cdot,t)}{\partial t^n \partial x^m} - \frac{\partial^{m+n} u(\cdot,t)}{\partial t^n \partial x^m} \right\|_2 \leqslant$$
$$\begin{cases} 2\varepsilon^{t/T} E^{1-t/T} \left(\frac{1}{T} \ln \frac{E}{\varepsilon}\right)^{(m+2n)/2} \quad \text{nếu } m+2n \leqslant 2t, t \in [0,T], \\ \left(1 + \left(\frac{m+2n}{2t}\right)^{(m+2n)/2}\right) \left(\frac{1}{T} \ln \frac{E}{\varepsilon}\right)^{(m+2n)/2} \varepsilon^{t/T} E^{1-t/T}, \\ \qquad \text{nếu } m+2n > 2t, t \in (0,T], \end{cases} \tag{3.6}$$

ở đây $m, n \in \mathbb{N}$.

Nếu thay vì $\|u(\cdot,0)\|_2 \leqslant E$ *ta có điều kiện mạnh hơn*

$$\|u(\cdot,0)\|_{H^s} := \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{u}(\xi,0)|^2 (1+\xi^2)^s d\xi \right)^{1/2} \leqslant E_s \tag{3.7}$$

với $s > 0$ *và* $E_s > 0$, *thì bằng cách chọn*

$$\nu = \sqrt{\ln\left(\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{T}} \left(\ln \frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s}{2T}} \right)}, \tag{3.8}$$

ta đạt được, khi $\varepsilon \to 0^+$,

$$\left\| \frac{\partial^{m+n} u^\nu(\cdot,t)}{\partial t^n \partial x^m} - \frac{\partial^{m+n} u(\cdot,t)}{\partial t^n \partial x^m} \right\|_2 \leqslant$$
$$\begin{cases} (\frac{1}{T})^{m/2+n} \varepsilon^{t/T} E^{1-t/T} (\ln \frac{E_s}{\varepsilon})^{-(T-t)s/(2T)+n+m/2} (1 + T^{s/2} + o(1)), \\ \qquad \text{nếu } m+2n-s \leqslant 2t, t \in [0,T], \\ (\frac{1}{T})^{m/2+n} \varepsilon^{t/T} E^{1-t/T} (\ln \frac{E_s}{\varepsilon})^{-(T-t)s/(2T)+n+m/2} \times \\ \times \Big(1 + T^{s/2} \Big(\frac{m+2n-s}{2t}\Big)^{(m+2n-s)/2} + o(1)\Big) \\ \qquad \text{nếu } m+2n-s > 2t, t \in (0,T]. \end{cases} \tag{3.9}$$

Định lý 3.2.10. *Chọn* β *là một số tuỳ ý trong* $(0,1)$. *Giả sử rằng* u *là một nghiệm của bài toán (3.1)–(3.2) và* u^ν *là nghiệm của bài toán (3.2.1). Khi đó, với*

$$\nu = \sqrt{\frac{\beta}{T} \ln \frac{E}{\varepsilon}}$$

ta có

$$\left\|\frac{\partial^{m+n}u^{\nu}(\cdot,t)}{\partial t^n\partial x^m}-\frac{\partial^{m+n}u(\cdot,t)}{\partial t^n\partial x^m}\right\|_2\leqslant$$
$$\begin{cases}(\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon})^{m/2+n}\varepsilon^{\beta t/T}E^{1-\beta t/T}(1+E^{\beta-1}\varepsilon^{1-\beta}),\\ \qquad \text{nếu } m+2n\leqslant 2t, t\in[0,T],\\ (\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon})^{m/2+n}\varepsilon^{\beta t/T}E^{1-\beta t/T}((\frac{m+2n}{2t})^{(m+2n)/2}+E^{\beta-1}\varepsilon^{1-\beta})\\ \qquad \text{nếu } m+2n> 2t, t\in(0,T].\end{cases} \tag{3.10}$$

Hơn nữa, nếu tồn tại các hằng số dương s và E_s có thể không được biết cụ thể sao cho

$$\|u(\cdot,0)\|_{H^s}:=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|\widehat{u}(\xi,0)|^2(1+\xi^2)^s d\xi\right)^{1/2}\leqslant E_s, \tag{3.11}$$

thì

$$\left\|\frac{\partial^{m+n}u^{\nu}(\cdot,t)}{\partial t^n\partial x^m}-\frac{\partial^{m+n}u(\cdot,t)}{\partial t^n\partial x^m}\right\|_2\leqslant$$
$$\begin{cases}\left(\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{m/2+n}\varepsilon^{\beta t/T}E^{1-\beta t/T}\left(\frac{E_s}{E}\left(\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-s/2}+E^{\beta-1}\varepsilon^{1-\beta}\right),\\ \qquad \text{nếu } m+2n-s\leqslant 2t, t\in[0,T],\\ \left(\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{m/2+n}\varepsilon^{\beta t/T}E^{1-\beta t/T}\times\\ \times\left(\left(\frac{m+2n-s}{2t}\right)^{(m+2n-s)/2}\frac{E_s}{E}\left(\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-s/2}+E^{\beta-1}\varepsilon^{1-\beta}\right)\\ \qquad \text{nếu } m+2n-s> 2t, t\in(0,T],\end{cases} \tag{3.12}$$

và với $m+2n-s<0$

$$\left\|\frac{\partial^{m+n}u^{\nu}(\cdot,0)}{\partial t^n\partial x^m}-\frac{\partial^{m+n}u(\cdot,0)}{\partial t^n\partial x^m}\right\|_2\leqslant$$
$$\left(\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\dfrac{m+2n-s}{2}}E_s+\left(\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\dfrac{m+2n}{2}}\varepsilon^{(1-\beta)}E^{\beta}$$

là một đánh giá kiểu logarithm.

3.3 Sơ đồ sai phân tiến ổn định

Để cho đơn giản, đặt
$$U:=u^{\nu},\quad \Psi:=\varphi^{\nu}. \tag{3.13}$$

Khi đó ta có hệ
$$U_t = U_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, t \in (0,T), \tag{3.14}$$
$$U(x,T) = \Psi, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.15}$$

Trên $\mathbb{R} \times [0,T]$, ta lấy lưới đều
$$\left\{x_n = nh,\ \tau_k = k\tau \middle| n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ k = 0, 1, \ldots, N;\ N\tau = T\right\}.$$

Với mỗi hàm $f(x,t)$ định nghĩa trên $\mathbb{R} \times [0,T]$, ta đặt $f_n^k = f(nh, k\tau)$. Ta rời rạc hóa (3.14)-(3.15) thành sơ đồ sai phân tiến
$$U_n^N = \Psi_n, \quad n = 0, \pm 1, \ldots \tag{3.16}$$
$$U_n^{m-1} = U_n^m - \tau \frac{U_{n+1}^m - 2U_n^m + U_{n-1}^m}{h^2}, \tag{3.17}$$
$$n = 0, \pm 1, \ldots; m = N, N-1, \ldots, 1.$$

Định lý 3.3.1. *Sơ đồ sai phân (3.16)–(3.17) xấp xỉ bài toán (3.14)–(3.15) với bậc $O(h^2 + \tau)$. Hơn nữa, nếu $h \leqslant \pi/\nu$, thì sơ đồ là ổn định không điều kiện.*

3.4 Ví dụ số

Chúng tôi thử nghiệm trên máy tính bốn ví dụ với độ khó khác nhau. Kết quả cho thấy rằng, các phương pháp của chúng tôi rất ổn định và hữu hiệu.

3.5 Kết luận chương 3

Chương 3 đã giải quyết được các vấn đề sau:

- Chứng minh các đánh giá ổn định dạng Hölder và hiệu chỉnh phương trình truyền nhiệt ngược thời gian trong không gian Banach $L_p(\mathbb{R}), p \in (1; +\infty)$ với tốc độ hội tụ như đã đạt được trong không gian Hilbert $L_2(\mathbb{R})$.

- Khi xét phương trình trong không gian Hilbert $L_2(\mathbb{R})$, các đánh giá ổn định dạng Hölder đạt được không chỉ cho nghiệm của phương trình truyền nhiệt ngược thời gian mà còn cho tất cả đạo hàm đối với x và t của nghiệm.

- Đưa ra sơ đồ sai phân tiến ổn định không điều kiện và các ví dụ số để minh họa cho phần lý thuyết.

Kết luận chung và kiến nghị

I. Kết luận chung

Luận án đã đạt các kết quả mới sau:

1. Hiệu chỉnh phương trình parabolic ngược thời gian có hệ số không phụ thuộc thời gian trong không gian Hilbert bằng phương pháp bài toán giá trị biên không địa phương. Đưa ra luật chọn tham số tiên nghiệm và hậu nghiệm cho phương pháp này và chứng minh đánh giá sai số có bậc tối ưu. Phương pháp được thử nghiệm trên máy tính cho thấy rằng nó rất ổn định và hữu hiệu.

2. Đưa ra kết quả đánh giá ổn định và chỉnh hóa cho phương trình parabolic ngược thời gian với hệ số phụ thuộc thời gian trong không gian Hilbert. Kết quả đánh giá ổn định tốt hơn các kết quả của Agmon và Nirenberg. Các luật chọn tham số tiên nghiệm và hậu nghiệm cho phương pháp chỉnh hóa bằng phương pháp bài toán giá trị biên không địa phương được đề xuất dẫn đến các đánh giá sai số dạng Hölder. Đây là kết quả đầu tiên cho phương pháp chỉnh phương trình parabolic ngược thời gian có hệ số phụ thuộc thời gian và có đánh giá sai số dạng Hölder.

3. Đưa ra các kết quả đánh giá ổn định và chỉnh hóa phương trình truyền nhiệt ngược thời gian trong không gian $L_p(\mathbb{R}), p \in (1, +\infty)$. Các đánh giá thu được có dạng Hölder và có cùng bậc như các kết quả đã đạt được trong không gian Hilbert. Trong trường hợp $p = 2$, các đánh giá ổn định dạng Hölder cho tất cả đạo hàm đối với x và t của nghiệm cũng đạt được. Các kết quả số cũng được đưa ra để minh họa cho phần lý thuyết.

II. Kiến nghị

Trong thời gian tới chúng tôi sẽ nghiên cứu các vấn đề sau:

1. Nghiên cứu phương trình parabolic ngược thời gian trong không gian Banach.

2. Nghiên cứu phương trình parabolic phi tuyến ngược thời gian.

Danh mục công trình của NCS có liên quan đến luận án

1. Dinh Nho Hào, Nguyen Van Duc and H Sahli (2008), "A non-local boundary value problem method for parabolic equations backwards in time", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, No. **345**, pp. 805-815.

2. Dinh Nho Hào and Nguyen Van Duc (2009), "Stability results for the heat equation backward in time", *Journal of Mathematical Analysis and Applications* , No. **353**, pp. 627-641.

3. Dinh Nho Hào, Nguyen Van Duc and D Lesnic (2009), "A non-local boundary value problem method for the Cauchy problem for elliptic equations", *Inverse Problems*, Vol. **8**, No. **25**, 055002, 27 pp.

4. Dinh Nho Hào, Nguyen Van Duc and D Lesnic (2010), "Regularization of parabolic equations backward in time by a non-local boundary value problem method", *IMA Journal of Applied Mathematics*, No. **75**, pp. 291-315.

5. Dinh Nho Hào and Nguyen Van Duc (2011), "Stability results for backward parabolic equations with time dependent coefficients", *Inverse Problems*, Vol. **27**, No. **2**, 025003, 20 pp.

Các kết quả trong luận án đã được báo cáo tại

- Seminar của phòng Phương trình vi phân, Viện Toán học, Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam.
- Seminar của tổ Giải tích, khoa Toán - Trường Đại học Vinh.
- Hội thảo tối ưu và tính toán khoa học lần thứ 6 tại Ba Vì - Hà Nội, 04/2008.
- Hội nghị quốc tế về phương trình vi phân và ứng dụng tại Hà Nội, 05/2009.
- Hội nghị khoa học kỷ niệm "Nửa thế kỷ trường Đại học Vinh anh hùng".
- Các Hội nghị NCS của trường Đại học Vinh các năm 2007 - 2010.
- Ngoài ra, các kết quả của luận án còn được GS.TSKH. Đinh Nho Hào báo cáo tại các trường Đại học Potsdam, Đại học Siegen, Đại học Frankfurt, Đại học Bremen (CHLB Đức), Đại học Leeds (Vương quốc Anh).