BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

NGUYỄN VĂN THẮNG

VỀ ĐÁNH GIÁ ỔN ĐỊNH VÀ CHỈNH HÓA CHO PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC BẬC NGUYÊN VÀ BẬC PHÂN THỨ NGƯỢC THỜI GIAN

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Nghệ An - 2019

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

NGUYỄN VĂN THẮNG

VỀ ĐÁNH GIÁ ỔN ĐỊNH VÀ CHỈNH HÓA CHO PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC BẬC NGUYÊN VÀ BẬC PHÂN THỨ NGƯỢC THỜI GIAN

CHUYÊN NGÀNH: TOÁN GIẢI TÍCH

MÃ SỐ: 946 01 02

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: 1) PGS. TS. NGUYỄN VĂN ĐỨC
2) PGS. TS. ĐINH HUY HOÀNG

Nghệ An - 2019

MỤC LỤC

LỜI CAM ĐOAN

Luận án được hoàn thành tại trường Đại học Vinh, dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Nguyễn Văn Đức và PGS. TS. Đinh Huy Hoàng. Tôi xin cam đoan đây là công trình của riêng tôi. Các kết quả được viết chung với các tác giả khác đã được sự đồng ý của đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả được trình bày trong luận án là mới và chưa từng được công bố từ trước đến nay.

Tác giả

Nguyễn Văn Thắng

LỜI CẢM ƠN

Luận án được hoàn thành tại trường Đại học Vinh, dưới sự hướng dẫn khoa học của PGS. TS. Nguyễn Văn Đức và PGS. TS. Đinh Huy Hoàng. Trước hết, tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với những người thầy của mình: PGS. TS. Nguyễn Văn Đức và PGS. TS. Đinh Huy Hoàng, những người đã đặt bài toán và định hướng nghiên cứu cho tác giả. Các thầy đã hướng dẫn nhiệt tình và động viên tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Tác giả cũng xin chân thành cảm ơn Viện Sư phạm tự nhiên, Tổ bộ môn Giải tích, Phòng đào tạo Sau đại học và các phòng chức năng khác của Trường Đại học Vinh đã tạo điều kiện thuận lợi để tác giả hoàn thành nhiệm vụ của nghiên cứu sinh.

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới gia đình và những người bạn thân thiết đã luôn sẻ chia, giúp đỡ và động viên tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Nguyễn Văn Thắng

MỘT SỐ KÝ HIỆU THƯỜNG DÙNG TRONG LUẬN ÁN

TT	Các ký hiệu	Giải thích ý nghĩa của ký hiệu
1	H	Không gian Hilbert H
2	$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Tích vô hướng trong không gian Hilbert H
3	$\|.\|$	Chuẩn trong không gian Hilbert H
4	$\|.\|_{L^2(0,1)}$	Chuẩn trong không gian $L^2(0,1)$
5	A	Toán tử tuyến tính không bị chặn, tự liên hợp, xác định dương
6	$A(t)$	Toán tử phụ thuộc vào thời gian
7	$D(A)$	Miền xác định của toán tử A
8	$D(A(t))$	Miền xác định của toán tử $A(t)$
9	$\{\phi_i\}_{i\geq 1}$	Hệ cơ sở trực chuẩn trong H
10	$\{\lambda_i\}_{i\geq 1}$	Hệ giá trị riêng của toán tử A đối với hệ véctơ riêng là cơ sở trực chuẩn trong H
11	Ω	Miền bị chặn trong không gian $\mathbb{R}^n$
12	$\mathbb{R}^n$	Không gian thực n chiều
13	u_t	Đạo hàm riêng cấp một theo biến thời gian t
14	u_x	Đạo hàm riêng cấp một theo biến không gian x
15	u_{xx}	Đạo hàm riêng cấp hai theo biến không gian x
16	$C([0,T],H)$	Không gian các hàm liên tục từ $[0,T]$ vào H
17	$C^1([0,T],H)$	Không gian các hàm khả vi liên tục từ $[0,T]$ vào H
18	$U(t,s)$	Hệ tiến hóa sinh bởi -A(t)
19	$J_\alpha(g)$	Phiếm hàm Tikhonov với tham số hiệu chỉnh α
20	$v(t,g)$	Nghiệm của phương trình parabolic nửa tuyến tính với dữ kiện ban đầu $v(0)=g$
21	$x_n \rightharpoonup x$	Dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu tới x

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Phương trình parabolic bậc nguyên và bậc phân thứ ngược thời gian được dùng để mô tả nhiều hiện tượng vật lý quan trọng. Chẳng hạn, quá trình truyền nhiệt [43, 49], quá trình địa vật lý và địa chất [22, 37, 58, 59], khoa học vật liệu [65], thủy động học [12], xử lý ảnh [15, 16, 48, 63], mô tả sự vận chuyển bởi dòng chất lỏng trong môi trường xốp [89]. Ngoài ra, lớp các phương trình parabolic nửa tuyến tính dạng $u_t + A(t)u(t) = f(t, u(t))$, cũng được dùng để mô tả một số hiện tượng vật lý quan trọng. Chẳng hạn: a) $f(t,u) = u\left(b - c\|u\|^2\right), c > 0$ trong mô hình sinh lý thần kinh của các hệ thống tế bào thần kinh lớn có tiềm năng hành động [38, 47, 67], b) $f(t,u) = -\sigma u/\left(1 + au + bu^2\right)$ với $\sigma, a, b > 0$, trong động học enzyme [62], c) $f(t,u) = -|u|^p u, p \geqslant 1$ hoặc $f(t,u) = -u^p$ trong các phản ứng nhiệt [62], d) $f(t,u) = au - bu^3$ như phương trình Allen-Cahn mô tả quá trình tách pha trong hệ thống hợp kim đa thành phần [6] hoặc phương trình Ginzburg-Landau trong siêu dẫn [39], hoặc e) $f(t,u) = \sigma u(u-\theta)(1-u)(0 < \theta < 1)$ trong bài toán dân số [62]. Bên cạnh đó, dạng phương trình Bürgers ngược thời gian cũng thường xuyên được bắt gặp trong ứng dụng về đồng hóa số liệu [4, 57, 69], quá trình sóng phi tuyến, trong lý thuyết về âm học phi tuyến hay lý thuyết nổ [64] và trong ứng dụng điều khiển tối ưu [5].

Các bài toán đã nêu ở trên thường *đặt không chỉnh* theo nghĩa Hadamard [49, 75]. Đối với lớp các bài toán ngược đặt không chỉnh, khi dữ kiện cuối của bài toán thay đổi nhỏ có thể dẫn đến bài toán không có nghiệm hoặc nếu có thì nghiệm này lại cách xa nghiệm chính xác. Vì vậy, việc đưa ra các đánh giá ổn định, phương pháp chỉnh hóa cũng như các phương pháp số hữu hiệu để tìm nghiệm gần đúng cho bài toán đặt không chỉnh luôn là vấn đề thời sự. Với các lý do nêu trên, chúng tôi chọn đề tài nghiên cứu cho luận án của mình là: ***"Về đánh giá ổn định và chỉnh hóa cho***

phương trình parabolic bậc nguyên và bậc phân thứ ngược thời gian".

2. Mục đích nghiên cứu

Mục đích của chúng tôi là thiết lập các kết quả mới về đánh giá ổn định cũng như chỉnh hóa cho các dạng phương trình parabolic bậc nguyên và bậc phân thứ ngược thời gian.

3. Đối tượng nghiên cứu

Đối với phương trình parabolic bậc nguyên, chúng tôi tập trung nghiên cứu phương trình kiểu Bürgers ngược thời gian, phương trình parabolic nửa tuyến tính ngược thời gian. Còn đối với phương trình parabolic bậc phân thứ, chúng tôi tập trung nghiên cứu phương trình tuyến tính.

4. Phạm vi nghiên cứu

Chúng tôi nghiên cứu đánh giá ổn định và chỉnh hoá cho phương trình parabolic bậc nguyên và bậc phân thứ ngược thời gian.

5. Phương pháp nghiên cứu

Chúng tôi sử dụng các phương pháp như *phương pháp lồi logarithm* [2, 28, 32, 35], *phương pháp bài toán giá trị biên không địa phương* [28, 30, 31, 32, 33], *phương pháp chỉnh hoá Tikhonov* [19, 33, 36, 75] và *phương pháp làm nhuyễn* [20, 25, 26, 27, 29].

6. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn

Luận án đã đạt được một số kết quả về đánh giá ổn định và chỉnh hóa cho phương trình parabolic bậc nguyên phi tuyến và phương trình parabolic bậc phân thứ tuyến tính. Do đó, luận án góp phần làm phong phú thêm các kết quả nghiên cứu trong lĩnh vực bài toán ngược và bài toán đặt không chỉnh.

Luận án có thể làm tài liệu tham khảo cho các sinh viên, học viên cao học và nghiên cứu sinh ngành toán.

7. Tổng quan và cấu trúc của luận án

7.1. Tổng quan một số vấn đề liên quan đến luận án

Bài toán đặt không chỉnh và bài toán ngược xuất hiện từ thập niên 50 của thế kỉ trước. Các nhà toán học đầu tiên đề cập tới bài toán này là Tikhonov A. N., Lavrent'ev M. M., John J., Pucci C. và Ivanov V. K. Đặc biệt, vào năm 1963, Tikhonov A. N. đưa ra phương pháp chỉnh hóa mang tên ông cho các bài toán đặt không chỉnh (xem [75]). Kể từ đó, bài toán đặt không chỉnh và bài toán ngược đã trở thành một ngành riêng của toán vật lý và khoa học tính toán.

Cho H là không gian Hilbert với tích vô hướng $\langle \cdot, \cdot \rangle$ và chuẩn $\| \cdot \|$. Xét bài toán tìm hàm $u : [0, T] \to H$ sao cho

$$\begin{cases} u_t + Au = f(t, u), \quad 0 < t \le T, \\ \|u(T) - \varphi\| \le \varepsilon \end{cases} \tag{1}$$

với A là toán tử tuyến tính không bị chặn tự liên hợp xác định dương trên không gian Hilbert H, φ thuộc H và $f : [0, T] \times H \to H$.

Đã có nhiều kết quả đánh giá ổn định và chỉnh hóa cho bài toán (1) trong trường hợp tuyến tính $f \equiv 0$ [3, 8, 11, 43, 49], chẳng hạn như phương pháp tựa đảo [40, 42], phương pháp phương trình Sobolev [21, 23, 41, 68], phương pháp chỉnh hóa Tikhonov [33, 75, 76], phương pháp bài toán giá trị biên không địa phương [9, 28, 30, 31, 32, 33] và phương pháp làm nhuyễn [25, 26, 27, 29]. Tuy nhiên, đối với bài toán phi tuyến, vẫn còn nhiều vấn đề cần được quan tâm nghiên cứu. Chẳng hạn như, tìm các đánh giá ổn định và chỉnh hóa cho phương trình có hệ số phụ thuộc thời gian.

Vào năm 1994, Nguyễn Thành Long và Alain Phạm Ngọc Định ([53]) đã xem xét bài toán ngược cho phương trình parabolic nửa tuyến tính dạng (1). Bằng cách sử dụng nửa nhóm co liên tục mạnh sinh bởi toán tử

$$A_\beta = -A(I + \beta A)^{-1}, \beta > 0,$$

họ đạt được đánh giá sai số kiểu logarithm trên $(0, 1]$ giữa nghiệm của bài toán ban đầu và nghiệm của bài toán chỉnh hóa.

Vào các năm 2007, 2009, Đặng Đức Trọng và các cộng sự ([77, 78]) xét bài toán (1) trong không gian một chiều có dạng

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, t, u(x, t)), \ (x, t) \in (0, \pi) \times (0, T), \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \ t \in (0, T), \\ \|u(x, T) - \varphi\| \le \varepsilon, \end{cases} \tag{2}$$

với f thỏa mãn điều kiện Lipschitz toàn cục. Trong [77], các tác giả đã chỉnh hóa bài toán (2) bằng bài toán

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon - u_{xx}^\varepsilon = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{tn^2}}{\varepsilon^{t/T}+e^{-tn^2}} f(x,t,u^\varepsilon)\sin nx, \ (x,t)\in(0,\pi)\times(0,T), \\ u^\varepsilon(0,t) = u^\varepsilon(\pi,t) = 0, \ t\in(0,T) \\ \varepsilon u^\varepsilon(x,0) + u^\varepsilon(x,T) = \varphi(x) - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^T \frac{\varepsilon}{\varepsilon^{s/T}+e^{-sn^2}} f(x,s,u^\varepsilon)ds\right)\sin nx. \end{cases}$$

Với điều kiện

$$M^2 = \|u(0)\|^2 + 6\pi \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} e^{-sn^2} f_n^2(u)ds < \infty$$

các tác giả trong [77] đã đạt được đánh giá sai số kiểu Hölder như sau

$$\|u(t) - u^\varepsilon(t)\| \le M\exp((3k^2T(T-t))/2)\varepsilon^{t/T}.$$

Trong [78], Đặng Đức Trọng và Nguyễn Huy Tuấn đã sử dụng phương pháp phương trình tích phân để chỉnh hóa phương trình (2). Cụ thể, họ chỉnh hóa bài toán (2) bằng bài toán

$$u^\epsilon(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\epsilon n^2 + e^{-Tn^2})^{\frac{t-T}{T}} \left(\varphi_n - \int_t^T e^{(s-T)n^2} f_n(u^\epsilon)ds\right)\sin nx. \quad (3)$$

Với điều kiện

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{2Tn^2} |\langle u(t),\phi_n\rangle|^2 < \infty, \ \forall t\in[0,T], \quad (4)$$

trong đó $\phi_n = \sin(nx)$, các tác giả trong [78] đạt được đánh giá sai số dạng Hölder như sau

$$\|u(t) - u^\epsilon(t)\| \le Me^{k^2T(T-t)}\epsilon^{\frac{t}{T}} \left(\frac{T}{1+\ln\frac{T}{\epsilon}}\right)^{1-t/T}.$$

Sau đó vào năm 2010, Phan Thành Nam ([60]) đã chỉnh hóa bài toán (1) bằng phương pháp chặt cụt. Tác giả xét A là một toán tử dương tự liên hợp không bị chặn và H có một cơ sở trực chuẩn $\{\phi_i\}_{i\geqslant 1}$ là các véctơ riêng tương ứng với các giá trị riêng $\{\lambda_i\}_{i\geqslant 1}$ của toán tử A sao cho

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots, \quad \text{và} \quad \lim_{i\to+\infty} \lambda_i = +\infty \quad (5)$$

và f thỏa mãn điều kiện Lipschitz toàn cục. Phan Thành Nam đã chứng minh bài toán sau là đặt chỉnh

$$\begin{cases} v_t + Av = P_M f(t, v(t)), \quad 0 < t < T, \\ v(T) = P_M g \end{cases} \tag{6}$$

trong đó

$$P_M w = \sum_{\lambda_n \le M} \langle \phi_n, w \rangle \phi_n$$

và đạt được các kết quả như sau.
Nếu

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{2\lambda_n \min(t,\beta)} |(u(t), \phi_n)|^2 \leqslant E_0^2$$

thì với $\beta \ge T$ ta có

$$\|v(t) - u(t)\| \le c\epsilon^{t/T}.$$

Nếu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2\beta'} e^{2\lambda_n \min(t,\beta)} |(u(t), \phi_n)|^2 \leqslant E_1^2$$

thì với $\beta \ge T$ ta có

$$\|v(t) - u(t)\| \le c\epsilon^{t/T} \max\left\{ \ln(1/\epsilon)^{-\beta'}, \epsilon^{(\tau - T)/\tau} \right\}.$$

Nếu

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{2\lambda_n} |(u(t), \phi_n)|^2 \leqslant E_2^2$$

thì

$$\|v(t) - u(t)\| \le c\epsilon^{t/T} \max\left\{ \epsilon^{(\beta - T)/\tau}, \epsilon^{(\tau - T)/\tau} \right\}.$$

Vào năm 2014, Nguyễn Huy Tuấn và Đặng Đức Trọng ([80]) đã xét bài toán (1) với A thỏa mãn các điều kiện như trong [60]. Với $v \in H$, họ đưa ra định nghĩa

$$A_\varepsilon(v) = \sum_{k=0}^{\infty} \ln^+ \left(\frac{1}{\varepsilon \lambda_k + e^{-\lambda_k}} \right) \langle v, \phi_k \rangle \phi_k$$

trong đó $\ln^+(x) = \max\{\ln x, 0\}$. Hơn nữa, hai tác này giả sử rằng f thỏa mãn các điều kiện

(F0) Tồn tại hằng số $L_0 \geqslant 0$ sao cho

$$\langle f(t, w_1) - f(t, w_2), w_1 - w_2 \rangle + L_0 \|w_1 - w_2\|^2 \geqslant 0.$$

(F1) Với $r > 0$, tồn tại hằng số $K(r) \geqslant 0$ sao cho $f : \mathbb{R} \times H \to H$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz địa phương

$$\|f(t, w_1) - f(t, w_2)\| \leqslant K(r)\|w_1 - w_2\|$$

với $w_1, w_2 \in H$ sao cho $\|w_i\| \leqslant r, i = 1, 2$.

(F2) $f(t, 0) = 0$ với mọi $t \in [0, T]$.

Nguyễn Huy Tuấn và Đặng Đức Trọng đã chỉnh hóa bài toán (1) bằng bài toán tựa đảo sau

$$\begin{cases} \dfrac{dv_\varepsilon(t)}{dt} + A_\varepsilon v_\varepsilon(t) = f(v_\varepsilon(t), t), \quad 0 < t < T, \\ v_\varepsilon(T) = \varphi. \end{cases} \tag{7}$$

Các tác giả này cần đến điều kiện

$$E^2 = \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 e^{2\lambda_k} \left|\langle u(s), \phi_k \rangle\right|^2 < \infty.$$

Khi đó, họ đạt được tốc độ hội tụ của nghiệm chỉnh hóa về nghiệm chính xác có dạng $\varepsilon^{t/T}\left(\ln \frac{e}{\varepsilon}\right)^{t/T-1}$.

Mặc dù trong [60, 77, 78, 80], các nhà toán học đã đưa ra được đánh giá sai số dạng Hölder nhưng điều kiện đặt lên nghiệm là mạnh và không dễ kiểm tra.

Đến năm 2015, Đinh Nho Hào và Nguyễn Văn Đức ([34]) đã chỉnh hóa bài toán (1) bằng bài toán biên không địa phương

$$\begin{cases} v_t + Av = f(t, v(t)), \quad 0 < t < T, \\ \alpha v(0) + v(T) = \varphi, \quad 0 < \alpha < 1. \end{cases} \tag{8}$$

Hai tác giả trên xét hàm f thỏa mãn điều kiện Lipschitz

$$\|f(t, w_1) - f(t, w_2)\| \leqslant k\|w_1 - w_2\| \tag{9}$$

với hằng số Lipschitz $k \in [0, 1/T)$ độc lập với t, w_1, w_2.

Hơn nữa, với giả thiết $\|u(0)\| \leqslant E, E > \varepsilon$, hai tác giả này đã đưa ra đánh giá sai số kiểu Hölder

$$\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\| \leqslant C\varepsilon^{t/T}E^{1-t/T}, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{10}$$

Đinh Nho Hào và Nguyễn Văn Đức là hai tác giả đầu tiên đạt được tốc độ dạng Hölder khi chỉnh hóa bài toán (1) chỉ với điều kiện $\|u(0)\| \leq E$. Tuy nhiên, điều này chỉ đúng với hằng số Lipschitz $k \in [0, 1/T)$.

Bên cạnh phương trình parabolic nửa tuyến tính, phương trình Bürgers ngược thời gian cũng được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu. Abazari R., Borhanifar A. ([1]), Srivastava V. K., Tamsir M., Bhardwaj U., Sanyasiraju Y. ([70]), Zhanlav T., Chuluunbaatar O., Ulziibayar V. ([90]), Zhu H., Shu H., Ding M. ([93]) đã đưa ra phương pháp số cho phương trình Bürgers. Allahverdi N. và các cộng sự ([5]) xét ứng dụng của phương trình Bürgers trong điều khiển tối ưu. Lundvall J. và các cộng sự ([56]) xét ứng dụng của phương trình Bürgers trong đồng hóa số liệu. Carasso A. S. ([14]), Ponomarev S. M. ([64]) dùng phương pháp lồi logarithm để đưa ra đánh giá ổn định cho phương trình Bürgers.

Khác với phương trình parabolic bậc nguyên ngược thời gian, phương trình parabolic bậc phân thứ ngược thời gian xuất hiện muộn hơn nhưng cũng là một hướng nghiên cứu hết sức sôi động trong những năm gần đây. Các nhà toán học đã đạt được nhiều kết quả quan trọng theo hướng nghiên cứu này. Chẳng hạn, Sakamoto K. và Yamamoto M. ([66]) đã đạt được kết quả về sự tồn tại và tính duy nhất ngược của nghiệm. Xua X. và các cộng sự ([86]) đã đạt được kết quả đánh giá ổn định bằng phương pháp đánh giá Carleman. Các phương pháp chỉnh hoá và các phương pháp số hữu hiệu cho phương trình parabolic bậc phân thứ ngược thời gian cũng đã được các nhà toán học đề xuất như phương pháp bài toán giá trị biên không địa phương ([83, 85, 87]), phương pháp chỉnh hóa Tikhonov ([7, 84]), phương pháp chặt cụt ([81, 88, 91, 92]), phương pháp tựa đảo ([52]), phương pháp sai phân ([50, 51]), phương pháp phần tử hữu hạn ([45]), phương pháp biến phân ([82]) và một số phương pháp khác ([13, 17, 44, 54, 55]).

7.2. Cấu trúc luận án

Nội dung luận án được trình bày trong 4 chương. Ngoài ra, luận án còn có Lời cam đoan, Lời cảm ơn, Mục lục, Mở đầu, Kết luận và kiến nghị, Danh mục các công trình khoa học của nghiên cứu sinh liên quan trực tiếp đến luận án và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1 trình bày các kiến thức cơ sở và một số kiến thức bổ trợ cho các chương sau.

Chương 2 trình bày các kết quả về đánh giá ổn định và chỉnh hóa Tikhonov có hiệu chỉnh cho phương trình parabolic bậc nguyên nửa tuyến tính ngược thời gian.

Chương 3 trình bày các kết quả về đánh giá ổn định cho phương trình Bürgers ngược thời gian.

Chương 4 trình bày phương pháp chỉnh hóa cho phương trình parabolic bậc phân thứ tuyến tính ngược thời gian bằng phương pháp làm nhuyễn.

Các kết quả chính của luận án đã được trình bày tại seminar của Bộ môn Giải tích thuộc Viện sư phạm tự nhiên - Trường Đại học Vinh, seminar của phòng phương trình vi phân của Viện toán học thuộc Viện hàn lâm khoa học và công nghệ Việt Nam, Hội thảo khoa học "Tối ưu và Tính toán khoa học lần thứ 15" tại Ba Vì ngày 20-22/4/2017. Kết quả trong luận án cũng đã được báo cáo tại Đại hội Toán học Việt Nam lần thứ 9 tại Nha Trang 14-18/8/2018.

Các kết quả này cũng đã được viết thành 04 bài báo trong đó có 01 bài đăng trên tạp chí thuộc danh mục SCI (*Inverse Problems*), 01 bài đăng trên tạp chí thuộc danh mục SCIE (*Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*), 02 bài (01 bài đăng và 01 bài đã được nhận đăng) trên tạp chí thuộc danh mục Scopus (*Acta Mathematica Vietnamica*).

Tác giả

Nguyễn Văn Thắng

CHƯƠNG 1

KIẾN THỨC CƠ SỞ

1.1 Khái niệm bài toán đặt không chỉnh, đánh giá ổn định và chỉnh hóa

Cho X, Y là hai không gian Banach và A là toán tử liên tục từ X vào Y. Xét phương trình

$$Ax = y \tag{1.1}$$

trong đó $x \in X$ và $y \in Y$.

Định nghĩa 1.1.1. ([43, 49]) Bài toán (1.1) được gọi là *đặt chỉnh* nếu
i) với mỗi $y \in Y$, có không quá một $x \in X$ thỏa mãn (1.1),
ii) với mỗi $y \in Y$ tồn tại nghiệm $x \in X$ của (1.1),
iii) $\|x - \overline{x}\|_X \to 0$ khi $\|y - \overline{y}\|_Y \to 0$ với $\overline{y} = A\overline{x}$.
Nếu một trong ba điều kiện trên không thỏa mãn thì bài toán (1.1) được gọi là *đặt không chỉnh*.

Nghiệm $x \in X_M \subset X$ của (1.1) được gọi là *ổn định có điều kiện* trên tập X_M nếu (xem [43])

$$\|x - \overline{x}\|_X \to 0 \Leftrightarrow \|Ax - A\overline{x}\|_Y \to 0, \ \overline{x} \in X_M.$$

Giả sử rằng, nghiệm x của bài toán (1.1) ổn định có điều kiện trên tập X_M. Khi đó, tồn tại một hàm $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ với $\psi(0) = 0$ sao cho

$$\|x - \overline{x}\|_X \leq \psi(\|Ax - A\overline{x}\|_Y). \tag{1.2}$$

Đánh giá (1.2) được gọi là *đánh giá ổn định* ([18, 43]). Trong trường hợp $\psi(\eta) = \mu\eta^\gamma, \ \gamma > 0$ ta có *đánh giá ổn định kiểu Hölder* và đây là một "bài toán tốt". Trong trường hợp ψ là hàm dạng logarithm thì ta đạt được *đánh giá ổn định kiểu logarithm* và ta có một "bài toán xấu". Còn trong trường hợp, ta không có một đánh giá nào về tốc độ tiến tới 0 của $\psi(\eta)$ khi $\eta \to 0$ ta có một "bài toán rất xấu".

Giả sử rằng, với toán tử A và hai không gian X, Y thì bài toán (1.1) là đặt không chỉnh. Giả sử, với $\overline{y}$ là vế phải chính xác của (1.1) thì (1.1) có duy nhất nghiệm $\overline{x}$ sao cho $A\overline{x} = \overline{y}$, nhưng $\overline{y}$ không được biết mà ta chỉ biết gần đúng của nó là y_δ với sai số δ được xác định

$$\|y_\delta - \overline{y}\|_Y \leq \delta.$$

Vì (1.1) đặt không chỉnh nên ta không thể dùng toán tử ngược A^{-1} để tìm x_δ. Tức là, không thể tìm x_δ bằng cách $x_\delta = A^{-1}y_\delta$, bởi vì toán tử ngược có thể không xác định tại y_δ hoặc là không liên tục trên Y.

Để tìm nghiệm gần đúng x_δ, ta sử dụng toán tử chỉnh hóa.

Định nghĩa 1.1.2. ([18]) Toán tử $R(y, \delta)$ từ không gian Y vào không gian X được gọi là *chỉnh hóa* của phương trình (1.1) (đối với phần tử $\overline{y}$) nếu
i) có một số $\delta_1 > 0$ sao cho $R(y, \delta)$ xác định trên $[0, \delta_1]$ và với $y_\delta \in Y$ ta có $\|y_\delta - \overline{y}\|_Y \leq \delta$,
ii) với mỗi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta_0(\epsilon, y_\delta) \leq \delta_1$ sao cho từ bất đẳng thức

$$\|y_\delta - \overline{y}\|_Y \leq \delta \leq \delta_0$$

suy ra được

$$\|x_\delta - \overline{x}\|_X \leq \epsilon,$$

trong đó $x_\delta = R(y_\delta, \delta)$.

Trong định nghĩa trên, nếu δ_0 không phụ thuộc vào y_δ thì ta gọi là *chỉnh hóa tiên nghiệm*. Còn trong trường hợp, δ_0 phụ thuộc vào y_δ thì ta gọi là *chỉnh hóa hậu nghiệm.*

1.2 Một số kết quả bổ trợ

Bổ đề 1.2.1. (Bất đẳng thức Young) *Với hai số không âm bất kì a, b và $p > 0, q > 0$ sao cho $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, ta có*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Bổ đề 1.2.2. (Bất đẳng thức Hölder) *Cho* $a_i > 0, b_i > 0, i = 1, 2, ..., n$ *và* $p > 0, q > 0$ *sao cho* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Khi đó, bất đẳng thức sau đúng*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Định nghĩa 1.2.3. ([10]) Hàm Gamma Γ được xác định bởi công thức

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \tag{1.3}$$

với z thuộc nửa mặt phẳng bên phải $\mathrm{Re} z > 0$ của mặt phẳng phức.

Nhận xét 1.2.4. ([10]) Hàm Gamma Γ có các tính chất sau

1) $\Gamma(1) = 1$,

2) $\Gamma(n+1) = n!, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Định nghĩa 1.2.5. ([10]) Hàm $E_{\alpha,\beta}(z)$ được xác định bởi

$$E_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, z \in \mathbb{C},$$

trong đó $\alpha > 0, \beta > 0$ và Γ là hàm Gamma được gọi là *hàm Mittag-Leffler.*

Bổ đề 1.2.6. ([52]) *Giả sử rằng* $0 < \gamma_0 < \gamma_1 < 1$. *Khi đó, tồn tại các hằng số* $C, C_1 > 0$ *chỉ phụ thuộc vào* γ_0, γ_1 *sao cho*

$$\frac{C}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{1}{1-x} \leqslant E_{\gamma,1}(x) \leqslant \frac{C_1}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{1}{1-x}, \ x \leqslant 0, \gamma \in [\gamma_0, \gamma_1].$$

Định nghĩa 1.2.7. ([10]) Cho f là hàm khả vi liên tục trên $[0, T]$ $(T > 0)$. Đạo hàm bậc phân thứ Caputo với bậc $\gamma \in (0, 1)$ của hàm f trên $(0, T]$ được xác định như sau

$$\frac{d^\gamma}{dt^\gamma} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t (t-s)^{-\gamma} \frac{d}{ds} f(s) ds, \ 0 < t \leqslant T.$$

Định nghĩa 1.2.8. ([61]) Với $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$, *phép biến đổi Fourier* của hàm v được định nghĩa bởi

$$F(v)(\xi) := \widehat{v}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x} v(x) dx$$

và *phép biến đổi Fourier ngược* được định nghĩa bởi

$$F^{-1}(v)(\xi) := \check{v}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} v(x) dx.$$

Định nghĩa 1.2.9. ([72]) Cho hàm $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
i) Không gian $L^2(\mathbb{R}^n)$ được xác định bởi

$$L^2(\mathbb{R}^n) = \left\{ u : \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx < \infty \right\}$$

với chuẩn

$$\|u\| := \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

ii) Cho $s \geq 0$. Không gian $H^s(\mathbb{R}^n)$ được xác định bởi

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u : \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi < \infty \right\}$$

với chuẩn được xác định như sau

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Định nghĩa 1.2.10. ([61]) Với $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *tích chập* của f và g được kí hiệu là $f * g$ và được xác định bởi

$$(f * g)(x) = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x - y) dy, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Định nghĩa 1.2.11. ([61]) Hàm $D_\nu(x) = \prod_{j=1}^{n} \dfrac{sin(\nu x_j)}{x_j}$ $(\nu > 0)$ được gọi là *nhân Dirichlet.*

Bổ đề 1.2.12. ([61])*Nhân Dirichlet có các tính chất sau*

i) Với $M_\nu = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_j| < \nu, j = 1, 2, ..., n\}$ *và* $Q_\nu = \mathbb{R}^n / M_\nu$*, ta có*

$$\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^n \widehat{D}_\nu = \begin{cases} 1 & \text{trên} \quad M_\nu \\ 0 & \text{trên} \quad Q_\nu. \end{cases}$$

ii) Với $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$*, hàm*

$$S_\nu(f)(x) = D_\nu * f = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} D_\nu(y) f(x - y) dy$$

thỏa mãn

$$F[S_\nu(f)] = \widehat{f} \text{ trên } [-\nu, \nu].$$

CHƯƠNG 2

ĐÁNH GIÁ ỔN ĐỊNH VÀ CHỈNH HÓA CHO PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC NỬA TUYẾN TÍNH NGƯỢC THỜI GIAN

Trong chương này, đầu tiên chúng tôi đưa ra các kết quả đánh giá ổn định cho phương trình parabolic nửa tuyến tính ngược thời gian. Sau đó, chúng tôi dùng phương pháp Tikhonov có hiệu chỉnh để chỉnh hóa phương trình này. Kết quả trong chương này của chúng tôi là những kết quả đầu tiên đưa ra đánh giá ổn định, cũng như chỉnh hóa cho phương trình parabolic nửa tuyến tính ngược thời gian (hằng số Lipschitz không âm tùy ý) chỉ với điều kiện bị chặn của nghiệm tại $t = 0$. Các kết quả này đã được công bố trong hai bài báo:

- Duc N. V. , Thang N. V. (2017), Stability results for semi-linear parabolic equations backward in time, *Acta Mathematica Vietnamica* 42, 99-111.
- Hào D. N., Duc N. V. and Thang N. V. (2018), Backward semi-linear parabolic equations with time-dependent coefficients and locally Lipschitz source, *J. Inverse Problems* 34, 055010, 33 pp.

2.1 Đánh giá ổn định cho phương trình parabolic nửa tuyến tính ngược thời gian với hệ số phụ thuộc thời gian

Cho H là không gian Hilbert với tích vô hướng $\langle \cdot, \cdot \rangle$ và chuẩn $\| \cdot \|$. Giả sử rằng các điều kiện sau thỏa mãn:

(A1) $A(t)$ là toán tử tuyến tính xác định dương, tự liên hợp và không bị chặn trên H với mỗi $t \in [0, T]$.

(A2) Nếu $u_i : [0,T] \to H, i = 1,2$ là hai nghiệm của phương trình

$$Lu = \frac{du}{dt} + A(t)u = f(t,u), \quad 0 < t \leq T, \tag{2.1}$$

thì tồn tại hàm liên tục $a_1(t)$ trên $[0,T]$ sao cho

$$c \leqslant a_1(t) \leqslant c_1, \forall t \in [0,T],$$

với c, c_1 là các hằng số thực và tồn tại hằng số c_2 sao cho $w = u_1 - u_2$ thỏa mãn bất đẳng thức

$$-\frac{d}{dt}\langle A(t)w, w\rangle \geqslant -2\langle A(t)w, w_t\rangle - a_1(t)\langle A(t)w, w\rangle - c_2\|w\|^2.$$

Với $t \in [0,T]$, đặt

$$a_2(t) = \exp\left(\int_0^t a_1(\tau)d\tau\right), \quad a_3(t) = \int_0^t a_2(\xi)d\xi,$$

và

$$\nu(t) = \frac{a_3(t)}{a_3(T)}. \tag{2.2}$$

Nhận xét 2.1.1. i) Lớp các toán tử $A(t)$ thỏa mãn (A1) và (A2) là rộng. Một ví dụ đơn giản cho một toán tử như vậy là $A(t) = a(t)B$ với B tự liên hợp, xác định dương và không bị chặn và $a(t) \geqslant a_0 > 0$, khả vi liên tục. Trong trường hợp này, chúng ta có thể lấy $a_1(t) = a_t(t)/a(t)$ và $c_2 = 0$.
ii) Nếu $a_1(t) < 0$ thì $\nu(t) > \dfrac{t}{T}$.
iii) Nếu $A(t) = a(t)A$ thì $a_1(t) = \dfrac{a_t(t)}{a(t)}$, do đó $\nu(t) = \dfrac{\int_0^t a(s)ds}{\int_0^T a(s)ds}$. Đặc biệt, nếu $A(t) = A$ thì $\nu(t) = t/T$.

Bây giờ, chúng ta đưa ra các đánh giá ổn định. Trước hết, ta xét các đánh giá ổn định với ràng buộc của nghiệm trên miền $[0,T]$. Giả sử f thỏa mãn điều kiện (F1) như sau

(F1) Với $r > 0$, tồn tại hằng số $K(r) \geqslant 0$ sao cho $f : [0,T] \times H \to H$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz địa phương

$$\|f(t,w_1) - f(t,w_2)\| \leqslant K(r)\|w_1 - w_2\|$$

với $w_1, w_2 \in H$ sao cho $\|w_i\| \leqslant r, i = 1,2$.

Định lý 2.1.2. *Giả sử rằng $A(t)$ thỏa mãn các điều kiện (A1),(A2) và f thỏa mãn điều kiện (F1). Cho u_1 và u_2 là hai nghiệm của bài toán* (2.1) *thỏa mãn $\|u_i(T) - \varphi\| \leqslant \varepsilon$ với $\varphi \in H$ và ràng buộc*

$$\|u_i(t)\| \leqslant E, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, 2, \quad 0 < \varepsilon < E.$$

Khi đó, với $t \in [0, T]$ ta có

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leqslant 2\varepsilon^{\nu(t)} E^{1-\nu(t)} \exp\Big(c_3 \nu(t)(1 - \nu(t))\Big), \tag{2.3}$$

trong đó

$$c_3 = \left(\frac{1}{2} K^2 T + |c_2| T + 2K\right) c_4 c_5$$

với $c_4 = \frac{a_3(T)}{T}, c_5 = \max\{\exp|c_1|T, \exp|c|T\}$ và $K = K(E)$ là hằng số Lipschitz được xác định bởi (F1).

Chứng minh Định lý 2.1.2

Để chứng minh định lý này, chúng ta cần các bổ đề sau.

Bổ đề 2.1.3. *Nếu h là hàm khả tích Riemann và tăng trên* $[0, 1]$, *thì*

$$t \int_0^1 h(s) ds \geqslant \int_0^t h(s) ds, t \in [0, 1].$$

Chứng minh. Vì h là hàm tăng trên $[0, 1]$ nên với mọi $t \in [0, 1]$ ta có

$$t \int_t^1 h(s) ds \geq t \int_t^1 h(t) ds = t(1 - t) h(t)$$

và

$$(1 - t) \int_0^t h(s) ds \leq (1 - t) \int_0^t h(t) ds = t(1 - t) h(t).$$

Do đó, $t \int_t^1 h(s) ds \geq (1 - t) \int_0^t h(s) ds$ hay $t \int_0^1 h(s) ds \geqslant \int_0^t h(s) ds, t \in [0, 1]$. Bổ đề được chứng minh. □

Bổ đề 2.1.4. *Nếu p là hàm không âm và khả tích trên $[0, T]$ thì*

$$\int_0^{\nu(t)} \left(\int_0^\tau p(s) ds\right) d\nu(\tau) - \nu(t) \int_0^1 \left(\int_0^\tau p(s) ds\right) d\nu(\tau) \leqslant 0,$$

trong đó $\nu(t)$ được xác định bởi (2.2) và $d\nu(\tau) = \nu_\tau(\tau) d\tau$.

Chứng minh. Đặt $h(\nu(t)) = \int_0^t p(s)ds, t \in [0,T]$. Vì $\nu(t)$ là hàm liên tục tăng ngặt trên $[0,T]$ nên $h(\nu(t))$ là hàm tăng theo biến ν. Từ (2.2) ta thấy $0 \leqslant \nu(t) \leqslant 1, t \in [0,T]$. Áp dụng Bổ đề 2.1.3, ta có

$$\nu(t)\int_0^1 hd\nu(\tau) \geqslant \int_0^{\nu(t)} hd\nu(\tau).$$

Do đó

$$\int_0^{\nu(t)} \left(\int_0^\tau p(s)ds\right) d\nu(\tau) - \nu(t)\int_0^1 \left(\int_0^\tau p(s)ds\right) d\nu(\tau) \leqslant 0.$$

Bổ đề được chứng minh. □

Bổ đề 2.1.5. *Đặt $z = u_1 - u_2$ và $B(t)z = z_t + A(t)z$. Nếu $\|z(t)\| > 0$ với mọi $t \in [0,T]$ và tồn tại hằng số K sao cho $\|B(t)z\| \leqslant K\|z\|$ thì*

$$-\frac{d}{dt}\frac{\langle A(t)z, z\rangle}{\|z\|^2} \geqslant -a_1(t)\frac{\langle A(t)z, z\rangle}{\|z\|^2} - \frac{1}{2}K^2 - c_2,$$

trong đó $a_1(t)$ và c_2 được xác định bởi (A2).

Chứng minh. Từ (A2) ta có

$$\begin{aligned}
&\|z\|^4\left(-\frac{d}{dt}\frac{\langle A(t)z, z\rangle}{\|z\|^2}\right)\\
&\quad= \left(-\frac{d}{dt}\langle A(t)z, z\rangle\right)\|z\|^2 + 2\langle A(t)z, z\rangle\langle z, z_t\rangle\\
&\quad\geqslant \Big(-2\langle A(t)z, z_t\rangle - a_1(t)\langle A(t)z, z\rangle - c_2\|z\|^2\Big)\|z\|^2\\
&\qquad+ 2\langle A(t)z, z\rangle\langle z, -A(t)z + B(t)z\rangle\\
&\quad= \Big(-2\langle A(t)z, -A(t)z + B(t)z\rangle - a_1(t)\langle A(t)z, z\rangle - c_2\|z\|^2\Big)\|z\|^2\\
&\qquad- 2\Big\langle A(t)z - \frac{1}{2}B(t)z, z\Big\rangle^2 + \frac{1}{2}\langle B(t)z, z\rangle^2.
\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
\|z\|^4\left(-\frac{d}{dt}\frac{\langle A(t)z, z\rangle}{\|z\|^2}\right) \geq{}& \Big\|A(t)z - \frac{1}{2}B(t)z\Big\|^2\|z\|^2 - \frac{1}{2}\|B(t)z\|^2\|z\|^2\\
&- 2\Big\langle A(t)z - \frac{1}{2}B(t)z, z\Big\rangle^2 + \frac{1}{2}\langle B(t)z, z\rangle^2\\
&- a_1(t)\langle A(t)z, z\rangle\|z\|^2 - c_2\|z\|^4.
\end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\left\|A(t)z - \frac{1}{2}B(t)z\right\|^2 \|z\|^2 \geqslant \left\langle A(t)z - \frac{1}{2}B(t), z\right\rangle^2.$$

Chúng ta đạt được

$$\|z\|^4 \left(-\frac{d}{dt}\frac{\langle A(t)z, z\rangle}{\|z\|^2}\right) \geqslant -a_1(t)\langle A(t)z, z\rangle \|z\|^2 - \left(\frac{1}{2}K^2 + c_2\right)\|z\|^4.$$

Vì vậy,

$$-\frac{d}{dt}\frac{\langle A(t)z, z\rangle}{\|z\|^2} \geqslant -a_1(t)\frac{\langle A(t)z, z\rangle}{\|z\|^2} - \frac{1}{2}K^2 - c_2.$$

Bổ đề được chứng minh. □

Bổ đề 2.1.6. *Ta kí hiệu $z = u_1 - u_2$, $B(t)z = z_t + A(t)z$. Giả sử $\|z(t)\| > 0$ với $t \in [0, T]$ và $\|B(t)z\| \leq K\|z\|$, đặt*

$$Q(t) = -\frac{\langle A(t)z, z\rangle}{\|z\|^2}\frac{1}{a_2(t)} \tag{2.4}$$

và $p(t) = Q_t(t) + \left(|c_2| + \frac{1}{2}K^2\right)c_5$, trong đó $a_2(t) = \exp(\int_0^t a_1(\tau)d\tau)$ với $a_1(t)$ được xác định bởi (A2) và $c_5 = \max\left\{\exp(|c_1|T), \exp(|c|T)\right\}$. Khi đó, $p(t) \geqslant 0, t \in [0, T]$ và

$$Q(t) = Q(0) + \int_0^t p(s)ds - \left(\frac{1}{2}K^2 + |c_2|\right)c_5 t.$$

Chứng minh. Vì $a_2(t) = \exp(\int_0^t a_1(\tau)d\tau)$ nên

$$Q(t) = -\frac{\langle A(t)z, z\rangle}{\|z\|^2}\exp(-\int_0^t a_1(\tau)d\tau)$$

và

$$Q_t(t) = \left(-\frac{d}{dt}\frac{\langle A(t)z, z\rangle}{\|z\|^2} + a_1(t)\frac{\langle A(t)z, z\rangle}{\|z\|^2}\right)\exp\left(-\int_0^t a_1(\tau)d\tau\right).$$

Áp dụng Bổ đề 2.1.5, ta có

$$Q_t(t) \geqslant -\left(\frac{1}{2}K^2 + c_2\right)\exp\left(-\int_0^t a_1(\tau)d\tau\right).$$

Vì $c \leqslant a_1(t) \leqslant c_1$ nên $|a_1(t)| \leqslant \max\{|c_1|, |c|\}$. Do đó,

$$\exp\left(-\int_0^t a_1(\tau)d\tau\right) \leqslant c_5 = \max\left\{\exp(|c_1|T), \exp(|c|T)\right\}. \tag{2.5}$$

Suy ra

$$Q_t(t) \geqslant -\left(\frac{1}{2}K^2 + |c_2|\right) c_5.$$

Do đó $p(t) \geqslant 0$, $t \in [0, T]$ và $Q_t(t) = p(t) - \left(\frac{1}{2}K^2 + |c_2|\right) c_5$. Lấy tích phân hai vế của bất đẳng thức này với cận từ 0 đến t, ta được

$$Q(t) = Q(0) + \int_0^t p(s)ds - \left(\frac{1}{2}K^2 + |c_2|\right) c_5 t.$$

Bổ đề được chứng minh. □

Bây giờ, ta chứng minh Định lý 2.1.2.

Đặt $z(t) = u_1(t) - u_2(t)$ và $B(t)z = z_t + A(t)z$. Từ điều kiện (F1) và $\|u_i(t)\| \leqslant E, t \in [0, T], i = 1, 2$ suy ra tồn tại hằng số $K = K(E)$ sao cho

$$\|B(t)z\| = \|z_t + A(t)z\| = \|f(t, u_2) - f(t, u_1)\| \leqslant K\|u_1 - u_2\| = K\|z\|. \tag{2.6}$$

Đặt $h(t) = \|z(t)\|^2, t \in [0, T]$. Ta có

$$h_t(t) = 2\langle z, z_t\rangle = -2\langle A(t)z, z\rangle + 2\langle B(t)z, z\rangle.$$

Nếu $\|z(t)\| > 0$ với mọi $t \in [0, T]$ thì

$$\frac{h_t(t)}{h(t)} = -2\frac{\langle A(t)z, z\rangle}{\|z\|^2} + 2\frac{\langle B(t)z, z\rangle}{\|z\|^2}. \tag{2.7}$$

Vì $\nu(t)$ là hàm liên tục và tăng ngặt trên $[0, T]$ và $\nu(0) = 0$, $\nu(T) = 1$, nên $\nu(t)$ có hàm ngược. Đặt

$$g(t) := h(\nu^{-1}(t/T)), \quad t \in [0, T].$$

Suy ra

$$h(t) = g(T\nu(t)).$$

Từ $\nu(t) = \dfrac{a_3(t)}{a_3(T)} = \dfrac{\int_0^t a_2(\tau)d\tau}{a_3(T)}$, suy ra

$$h_t(t) = \frac{d}{dt}g(T\nu(t)) = \left(\frac{d}{dt}(T\nu(t))\right)\left(\frac{d}{d\nu}g(T\nu(t))\right) = T\frac{a_2(t)}{a_3(T)}g_\nu(T\nu(t)).$$

Với $c_4 = \dfrac{a_3(T)}{T}$ ta có

$$\frac{g_\nu(T\nu(t))}{g(T\nu(t))} = -2c_4 \frac{\langle A(t)z, z\rangle}{\|z\|^2} \frac{1}{a_2(t)} + \frac{2c_4 \langle B(t)z, z\rangle}{a_2(t)\|z\|^2}. \tag{2.8}$$

Từ (2.8) và Bổ đề 2.1.6, ta có

$$\begin{aligned}\frac{g_\nu(T\nu(t))}{g(T\nu(t))} &= 2c_4Q(0) + 2c_4 \int_0^t p(s)ds - 2\left(\frac{1}{2}K^2 + |c_2|\right) c_4c_5t \\ &\quad + \frac{2c_4 \langle B(t)z, z\rangle}{a_2(t)\|z\|^2} \\ &= 2c_4Q(0) + 2c_4 \int_0^t p(s)ds - 2\left(\frac{1}{2}K^2 + |c_2|\right) c_4c_5t \\ &\quad + 2c_4\frac{\langle B(t)z, z\rangle}{\|z\|^2} \exp\left(-\int_0^t a_1(\tau)d\tau\right). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Từ $\exp\left(-\int_0^t a_1(\tau)d\tau\right) \leq c_5$ và (2.9) dẫn đến

$$\frac{g_\nu(T\nu(t))}{g(T\nu(t))} \leqslant 2c_4Q(0) + 2c_4 \int_0^t p(s)ds + 2Kc_4c_5. \tag{2.10}$$

Vì $a_2(t) > 0, t \in [0, T], a_3(T) > 0$ nên

$$\nu_t(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{a_3(t)}{a_3(T)}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\int_0^t a_2(\xi)d\xi}{a_3(T)}\right) = \frac{a_2(t)}{a_3(T)} > 0, t \in [0, T]. \tag{2.11}$$

Từ (2.10) và (2.11), ta có

$$\frac{g_\nu(T\nu(t))}{g(T\nu(t))}\nu_t(t) \leqslant \left(2c_4Q(0) + 2c_4 \int_0^t p(s)ds + 2Kc_4c_5\right) \nu_t(t). \tag{2.12}$$

Lấy tích phân hai vế của (2.12), ta được

$$\begin{aligned}&\int_0^{\nu(t)} \frac{g_\nu(T\nu(\tau))}{g(T\nu(\tau))}\nu_\tau(\tau)d\tau \\ &\leqslant \int_0^{\nu(t)} \left(2c_4Q(0) + 2c_4 \int_0^\tau p(s)ds + 2Kc_4c_5\right) \nu_\tau(\tau)d\tau.\end{aligned}$$

Chú ý rằng $d\nu(\tau) = \nu_\tau(\tau)d\tau$, ta có

$$\begin{aligned}&\int_0^{\nu(t)} \frac{g_\nu(T\nu(\tau))}{g(T\nu(\tau))}d\nu(\tau) \\ &\leqslant \int_0^{\nu(t)} \left(2c_4Q(0) + 2c_4 \int_0^\tau p(s)ds + 2Kc_4c_5\right) d\nu(\tau).\end{aligned} \tag{2.13}$$

Do đó,

$$\ln g(T\nu(t)) \leqslant \ln g(0) + 2c_4 Q(0)\nu(t) + 2c_4 \int_0^{\nu(t)} \left(\int_0^{\tau} p(s)ds \right) d\nu(\tau) + 2Kc_4c_5\nu(t)$$

suy ra

$$g(T\nu(t)) \leqslant g(0)\exp\Big\{ 2c_4(Q(0) + Kc_5)\nu(t) + 2c_4 \int_0^{\nu(t)} \left(\int_0^{\tau} p(s)ds \right) d\nu(\tau) \Big\}.$$

Vì vậy,

$$g(T\nu(t))^{1-\nu(t)} \leqslant g(0)^{1-\nu(t)} \exp\Big\{ (2c_4(Q(0) + Kc_5)\nu(t)(1-\nu(t)) + 2c_4c(1-\nu(t)) \int_0^{\nu(t)} \left(\int_0^{\tau} p(s)ds \right) d\nu(\tau) \Big\}. \qquad (2.14)$$

Từ (2.6) và (2.9), ta có

$$\frac{g_\nu(T\nu(t))}{g(T\nu(t))} \geqslant 2c_4 Q(0) + 2c_4 \int_0^t p(s)ds - 2\left(\frac{1}{2}K^2 + |c_2| \right) c_4c_5T - 2Kc_4c_5. \qquad (2.15)$$

Từ (2.15), tương tự như trong chứng minh (2.13), ta có

$$\int_{\nu(t)}^1 \frac{g_\nu(T\nu(\tau))}{g(T\nu(\tau))} d\nu(\tau) \geqslant \int_{\nu(t)}^1 \Big\{ 2c_4 Q(0) + 2c_4 \int_0^{\tau} p(s)ds - 2\left(\frac{1}{2}K^2 + |c_2| \right) c_4c_5T - 2Kc_4c_5 \Big\} d\nu(\tau),$$

hay

$$\ln g(T\nu(t)) \leqslant \ln g(T) - 2c_4 Q(0)(1-\nu(t)) - 2c_4 \int_{\nu(t)}^1 \left(\int_0^{\tau} p(s)ds \right) d\nu(\tau) + 2\left(\frac{1}{2}K^2 + |c_2| \right) c_4c_5T(1-\nu(t)) + 2Kc_4c_5(1-\nu(t)).$$

Suy ra

$$g(T\nu(t)) \leqslant g(T)\exp\Big\{ -2c_4 Q(0)(1-\nu(t)) - 2c_4 \int_{\nu(t)}^1 \left(\int_0^{\tau} p(s)ds \right) d\nu(\tau) + 2\left(\frac{1}{2}K^2 + |c_2| \right) c_4c_5T(1-\nu(t)) + 2Kc_4c_5(1-\nu(t)) \Big\}.$$

Vì vậy

$$\begin{aligned}
&g(T\nu(t))^{\nu(t)} \leqslant g(T)^{\nu(t)} \\
&\times \exp\Big\{ -2c_4 Q(0)\nu(t)(1-\nu(t)) - 2c_4\nu(t)\int_{\nu(t)}^{1}\left(\int_0^{\tau} p(s)ds\right)d\nu(\tau) \\
&+ 2\left(\frac{1}{2}K^2 + |c_2|\right)c_4c_5T\nu(t)(1-\nu(t)) + 2Kc_4c_5\nu(t)(1-\nu(t))\Big\}. \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

Từ (2.14) và (2.16), ta đạt được

$$\begin{aligned}
g(T\nu(t)) \leqslant & g(0)^{1-\nu(t)}g(T)^{\nu(t)}\exp\Big\{2c_4(1-\nu(t))\int_0^{\nu(t)}\left(\int_0^{\tau} p(s)ds\right)d\nu(\tau) \\
& - 2c_4\nu(t)\int_{\nu(t)}^{1}\left(\int_0^{\tau} p(s)ds\right)d\nu(\tau) + 4Kc_4c_5\nu(t)(1-\nu(t)) \\
& + 2\left(\frac{1}{2}K^2 + |c_2|\right)c_4c_5T\nu(t)(1-\nu(t))\Big\} \\
& \leqslant g(0)^{1-\nu(t)}g(T)^{\nu(t)}\exp\Big\{2c_4\int_0^{\nu(t)}\left(\int_0^{\tau} p(s)ds\right)d\nu(\tau) \\
& - 2c_4\nu(t)\int_0^{1}\left(\int_0^{\tau} p(s)ds\right)d\nu(\tau) + 4Kc_4c_5\nu(t)(1-\nu(t)) \\
& + 2\left(\frac{1}{2}K^2 + |c_2|\right)c_4c_5T\nu(t)(1-\nu(t))\Big\}. \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

Từ (2.17) và Bổ đề 2.1.4 ta có

$$\begin{aligned}
g(T\nu(t)) &\leqslant g(0)^{1-\nu(t)}g(T)^{\nu(t)} \\
&\times \exp\left(2\left(\frac{1}{2}K^2T + |c_2|T + 2K\right)c_4c_5\nu(t)(1-\nu(t))\right). \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

Từ $g(T\nu(t)) = h(t),\ g(0) = h(0),\ g(T) = h(T)$ và bất đẳng thức (2.18) suy ra

$$\begin{aligned}
h(t) \leqslant & h(0)^{1-\nu(t)}h(T)^{\nu(t)} \\
&\times \exp\left(2\left(\frac{1}{2}K^2T + |c_2|T + 2K\right)c_4c_5\nu(t)(1-\nu(t))\right).
\end{aligned}$$

Vì vậy,

$$\begin{aligned}
\|z(t)\| \leqslant & \|z(0)\|^{1-\nu(t)}\|z(T)\|^{\nu(t)} \\
&\times \exp\left(\left(\frac{1}{2}K^2T + |c_2|T + 2K\right)c_4c_5\nu(t)(1-\nu(t))\right). \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

Từ

$$\|z(T)\| = \|u_1(T) - u_2(T)\| \leqslant \|u_1(T) - \varphi\| + \|u_2(T) - \varphi\| \leqslant 2\varepsilon$$

và

$$\|z(0)\| = \|u_1(0) - u_2(0)\| \leqslant \|u_1(0)\| + \|u_2(0)\| \leqslant 2E,$$

ta đạt được (2.3).

Bây giờ, ta xét trường hợp khi $\|z(t)\|$ có thể triệt tiêu. Nếu $\|z(0)\| = 0$, thì $\|z(t)\| = 0$ với mọi $t \in [0, T]$. Do đó, nếu $\|z(0)\| = 0$ thì bất đẳng thức (2.3) là hiển nhiên. Nếu $\|z(0)\| > 0$, thì $\|z(t)\| > 0$ với mọi $t \in [0, T]$. Thật vậy, giả sử ngược lại, gọi t_0 là điểm bé nhất thuộc $[0, T]$ mà $\|z(t_0)\| = 0$. Do đó $\|z(t)\| > 0$ với $0 \leqslant t \leqslant s < t_0$. Sử dụng đánh giá ổn định (2.19) với T được thay thế bởi $s < t_0$ và cho $s \uparrow t_0$ ta đạt được mâu thuẫn.

Định lý được chứng minh. $\square$

Định lý 2.1.2 không đưa ra bất kì thông tin nào về sự phụ thuộc liên tục của nghiệm bài toán (2.1) tại $t = 0$ theo dữ kiện cuối tại $t = T$ vì $\varepsilon^{\nu(0)} = \varepsilon^0 = 1 \nrightarrow 0$ khi $\varepsilon \to 0$. Để thiết lập sự phụ thuộc này, chúng tôi đòi hỏi nhiều điều kiện hơn đối với toán tử $A(t)$ và tính bị chặn mạnh hơn của nghiệm. Cụ thể, chúng tôi giả sử rằng $A(t) = a(t)A$ với A là toán tử xác định dương, tự liên hợp và không bị chặn và $a(t)$ là hàm khả vi liên tục trên $[0, T]$ thỏa mãn $0 < a_0 \le a(t) \le a_1$. Chúng tôi đạt được kết quả sau.

Định lý 2.1.7. *Cho $D(A) \subset H$ và $A : D(A) \to H$ là toán tử xác định dương, tự liên hợp và không bị chặn sao cho với hệ cơ sở trực chuẩn $\{\phi_i\}_{i \geqslant 1}$ trong H thì A có hệ giá trị riêng $\{\lambda_i\}_{i \geqslant 1}$ thỏa mãn $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ và $\lim_{i \to +\infty} \lambda_i = +\infty$. Giả sử $a(t)$ là hàm khả vi liên tục trên $[0, T]$ sao cho $0 < a_0 \leqslant a(t) \leqslant a_1$, $M = \max_{t \in [0,T]} |a_t(t)| < +\infty$ và f thỏa mãn điều kiện (F1), u_1 và u_2 là hai nghiệm của bài toán $u_t + a(t)Au = f(t, u(t)), 0 < t \leqslant T$ thỏa mãn $\|u_i(T) - \varphi\| \leqslant \varepsilon, \quad i = 1, 2$. Khi đó, ta có các đánh giá ổn định sau.*

i) Nếu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2\beta} \langle u_i(t), \phi_n \rangle^2 \leqslant \overline{E}^2, t \in [0, T], i = 1, 2, \tag{2.20}$$

với $\overline{E} > \varepsilon$ *và* $\beta > 0$ *thì*

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq C_1(t)\varepsilon^{\nu(t)}\overline{E}^{1-\nu(t)} \left(\left(\ln \frac{\overline{E}}{\varepsilon} \right)^{-\beta} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\overline{\overline{E}}}} \right)^{1-\nu(t)}, \ t \in [0, T],$$

trong đó $\nu(t) = \dfrac{\int_0^t a(\xi)d\xi}{\int_0^T a(\xi)d\xi}$ *và* $C_1(t)$ *là hàm bị chặn trên* $[0, T]$.

ii) Nếu

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{2\gamma\lambda_n} \langle u_i(t), \phi_n \rangle^2 \leqslant \widetilde{E}^2, t \in [0, T], i = 1, 2 \tag{2.21}$$

với $\widetilde{E} > \varepsilon$ *và* $\gamma > 0$ *thì*

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leqslant C_2(t)\varepsilon^{\nu_1(t)}\widetilde{E}^{1-\nu_1(t)}, \ t \in [0, T],$$

trong đó $\nu_1(t) = \dfrac{\gamma + \int_0^t a(\xi)d\xi}{\gamma + \int_0^T a(\xi)d\xi}$ *và* $C_2(t)$ *là hàm bị chặn trên* $[0, T]$.

Chứng minh Định lý 2.1.7

Đặt $z(t) = u_1(t) - u_2(t)$ và $B(t)z = z_t + a(t)Az$.
Chúng ta cần các kết quả bổ trợ sau.

Bổ đề 2.1.8. *Giả sử* $u_i(t), i = 1, 2$ *thỏa mãn (2.20). Nếu* $\|B(t)z\| \leq \overline{K}\|z\|$ *thì tồn tại hằng số* c_6 *sao cho*

$$D(z) = 2\overline{K}^2 T \int_0^T \left(\frac{\overline{E}}{\varepsilon} \right)^{\nu(s)} \|z(s)\|^2 ds \leqslant \frac{1}{2}\|z(0)\|^2 + c_6\overline{E}\varepsilon$$

với $\nu(t) = \dfrac{\int_0^t a(\xi)d\xi}{\int_0^T a(\xi)d\xi}$.

Chứng minh. Tương tự như trong chứng minh của Định lý 2.1.2, tồn tại hằng số c_7 sao cho

$$\|z(t)\| \leqslant \|z(0)\|^{1-\nu(t)}\|z(T)\|^{\nu(t)} \exp\Big(c_7\nu(t)(1 - \nu(t))\Big). \tag{2.22}$$

Từ (2.22) và bất đẳng thức

$$\|z(T)\| = \|u_1(T) - u_2(T)\| \leq \|u_1(T) - \varphi\| + \|u_2(T) - \varphi\| \leqslant 2\varepsilon$$

ta được

$$D(z) \leqslant 2\overline{K}^2 T \int\limits_0^T \Big\{ \left(\frac{\overline{E}}{\varepsilon}\right)^{\nu(s)} \|z(0)\|^{2(1-\nu(s))} \|z(T)\|^{2\nu(s)}$$
$$\times \exp\left(2c_7\nu(s)(1-\nu(s))\right) \Big\} ds$$
$$\leqslant 2\overline{K}^2 T \int\limits_0^T \left(4\overline{E}\varepsilon\right)^{\nu(s)} \|z(0)\|^{2(1-\nu(s))} \exp\left(2c_7\nu(s)(1-\nu(s))\right) ds$$
$$\leq 2\overline{K}^2 T \int\limits_0^T \Big\{ \Big(\|z(0)\|^2 \exp\Big(-\nu(s)\big(1 + 4\overline{K}^2 T^2 a_0^{-1} a_1\big)\Big)\Big)^{1-\nu(s)}$$
$$\times \Big(4\overline{E}\varepsilon \exp\Big(\big(1 + 4\overline{K}^2 T^2 a_0^{-1} a_1 + 2c_7\big)(1-\nu(s))\Big)\Big)^{\nu(s)} \Big\} ds.$$

Áp dụng bất đẳng thức Young, ta có

$$D(z) \leqslant 2\overline{K}^2 T \|z(0)\|^2 \int\limits_0^T (1-\nu(s)) \exp\Big(-\nu(s)\big(1 + 4\overline{K}^2 T^2 a_0^{-1} a_1\big)\Big) ds$$
$$+ 8\overline{K}^2 T \overline{E}\varepsilon \int\limits_0^T \nu(s) \exp\Big(\Big(1 + 4\overline{K}^2 T^2 a_0^{-1} a_1 + c_7\Big)(1-\nu(s))\Big) ds. \quad (2.23)$$

Từ $0 \leqslant \nu(t) \leqslant 1, a_0 \leqslant a(t) \leq a_1$ với mọi $t \in [0, T]$ và (2.23), tồn tại hằng số c_6 sao cho

$$D(z) \leqslant 2\overline{K}^2 T \|z(0)\|^2 \int\limits_0^T \exp\Big(-\nu(s)\big(1 + 4\overline{K}^2 T^2 a_0^{-1} a_1\big)\Big) ds + c_6 \overline{E}\varepsilon$$
$$\leqslant 2\overline{K}^2 T \|z(0)\|^2 \int\limits_0^T \Big\{ \frac{\int_0^T a(\xi) d\xi}{a_0} . \frac{a(s)}{\int_0^T a(\xi) d\xi}$$
$$\times \exp\Big(-\nu(s)\big(1 + 4\overline{K}^2 T^2 a_0^{-1} a_1\big)\Big)\Big\} ds + c_6 \overline{E}\varepsilon$$
$$\leqslant 2\overline{K}^2 T \frac{\int_0^T a(\xi) d\xi}{a_0} \|z(0)\|^2$$
$$\times \int\limits_0^T \frac{a(s)}{\int_0^T a(\xi) d\xi} \exp\Big(-\nu(s)\big(1 + 4\overline{K}^2 T^2 a_0^{-1} a_1\big)\Big) ds + c_6 \overline{E}\varepsilon.$$

Từ

$$d\nu(s) = \frac{a(s)ds}{\int_0^T a(\xi)d\xi}$$

suy ra

$$\begin{aligned}
D(z) &\leqslant \frac{2\overline{K}^2T^2a_1}{a_0}\|z(0)\|^2\int_0^T \exp\Big(-\nu(s)\big(1+4\overline{K}^2T^2a_0^{-1}a_1\big)\Big)d\nu(s) \\
&\quad + c_6\overline{E}\varepsilon \\
&\leqslant \frac{2\overline{K}^2Ta_0^{-1}\int_0^T a(\xi)d\xi}{1+4\overline{K}^2T^2a_0^{-1}a_1}\|z(0)\|^2 + c_6\overline{E}\varepsilon \\
&\leqslant \frac{2\overline{K}^2T^2a_0^{-1}a_1\|z(0)\|^2}{1+4\overline{K}^2T^2a_0^{-1}a_1} + c_6\overline{E}\varepsilon
\end{aligned}$$

Vì vậy

$$D(z) \leqslant \frac{1}{2}\|z(0)\|^2 + c_6\overline{E}\varepsilon.$$

Bổ đề được chứng minh. $\square$

Bổ đề 2.1.9. *Giả sử $u_i(t), i = 1, 2$ thỏa mãn (2.21). Nếu $\|B(t)z\| \le \widetilde{K}\|z\|$ thì tồn tại hằng số c_8 sao cho*

$$\begin{aligned}
D_1(z) &= 2\widetilde{K}^2T\int_0^T \left(\frac{\widetilde{E}}{\varepsilon}\right)^{\frac{2\int_0^s a(\xi)d\xi}{\gamma+\int_0^T a(\xi)d\xi}}\|z(s)\|^2ds \\
&\leqslant \frac{1}{2}\|z(0)\|^2 + c_8\widetilde{E}^{\frac{2\int_0^T a(\xi)d\xi}{\gamma+\int_0^T a(\xi)d\xi}}\varepsilon^{\frac{2\gamma}{\gamma+\int_0^T a(\xi)d\xi}}.
\end{aligned}$$

Chứng minh. Tương tự như trong chứng minh của Định lý 2.1.2, tồn tại hằng số c_9 sao cho

$$\|z(t)\| \leqslant \|z(0)\|^{1-\nu(t)}\|z(T)\|^{\nu(t)}\exp\Big(c_9\nu(t)(1-\nu(t))\Big). \tag{2.24}$$

Từ (2.24) và bất đẳng thức $\|z(T)\| \leqslant 2\varepsilon$, ta có

$$\begin{aligned}
D_1(z) &= 2\widetilde{K}^2T\int_0^T \left(\frac{\widetilde{E}}{\varepsilon}\right)^{\frac{2\int_0^s a(\xi)d\xi}{\gamma+\int_0^T a(\xi)d\xi}}\|z(s)\|^2ds \\
&\leqslant 2\widetilde{K}^2T\int_0^T \Big\{\left(\frac{\widetilde{E}}{\varepsilon}\right)^{\frac{2\int_0^s a(\xi)d\xi}{\gamma+\int_0^T a(\xi)d\xi}}\|z(0)\|^{2(1-\nu(s))}\|z(T)\|^{2\nu(s)} \\
&\qquad \times \exp\Big(2c_9\nu(s)(1-\nu(s))\Big)\Big\}ds
\end{aligned}$$

$$\leqslant 2\widetilde{K}^2 T \int_0^T \Big\{ \Big(\|z(0)\|^2 \exp(-\nu(s)(1+4\widetilde{K}^2T^2a_0^{-1}a_1)\Big)^{1-\nu(s))}$$

$$\times \Big(\|z(T)\|^2 \Big(\frac{\widetilde{E}}{\varepsilon}\Big)^{\frac{2\int_0^s a(\xi)d\xi}{\gamma+\int_0^T a(\xi)d\xi}}$$

$$\times \exp\Big(1+4\widetilde{K}^2T^2a_0^{-1}a_1+2c_9\Big)(1-\nu(s))\Big)^{\nu(s)}\Big\}ds.$$

Áp dụng bất đẳng thức Young, ta có

$$D_1(z) \leqslant 2\widetilde{K}^2T\|z(0)\|^2 \int_0^T (1-\nu(s))\exp(-\nu(s)(1+4\widetilde{K}^2T^2a_0^{-1}a_1)ds$$

$$+ 8\widetilde{K}^2T^2\widetilde{E}^{\frac{2\int_0^T a(\xi)d\xi}{\gamma+\int_0^T a(\xi)d\xi}}\varepsilon^{\frac{2\gamma}{\gamma+\int_0^T a(\xi)d\xi}}$$

$$\times \exp\Big(\Big(1+4\widetilde{K}^2T^2a_0^{-1}a_1+2c_9\Big)(1-\nu(s))\Big)ds.$$

Tương tự như chứng minh của Bổ đề 2.1.8, tồn tại hằng số c_8 sao cho

$$D_1(z) \leqslant \frac{1}{2}\|z(0)\|^2 + c_8\widetilde{E}^{\frac{2\int_0^T a(\xi)d\xi}{\gamma+\int_0^T a(\xi)d\xi}}\varepsilon^{\frac{2\gamma}{\gamma+\int_0^T a(\xi)d\xi}}.$$

Bổ đề được chứng minh. □

Bây giờ, chúng ta chứng minh Định lý 2.1.7.

Chứng minh phần i): Từ (2.20) ta có

$$\|u_i(t)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^{2\beta}}\lambda_n^{2\beta}\langle u_i(t),\phi_n\rangle^2 \leqslant \lambda_1^{-2\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{2\beta}\langle u_i(t),\phi_n\rangle^2 \leqslant \lambda_1^{-2\beta}\overline{E}^2.$$

Từ (F1) suy ra tồn tại hằng số $\overline{K} = K(\lambda_1^{-\beta}\overline{E})$ sao cho

$$\|B(t)z\| = \|f(t,u_1) - f(t,u_2)\| \leqslant \overline{K}\|z\|.$$

Vì u_i thỏa mãn $u_{it} + a(t)Au_i = f(t,u_i)$ nên

$$u_i(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(e^{\lambda_n\int_t^T a(\xi)d\xi}\langle u_i(T),\phi_n\rangle - \int_t^T e^{\lambda_n\int_t^s a(\xi)d\xi}\langle f(s,u_i(s)),\phi_n\rangle ds\Big)\phi_n.$$

Đặt $z = u_1 - u_2$. Bởi Bổ đề 2.1.8 và điều kiện (F1), tồn tại hằng số $\overline{K} = K(\lambda_1^{-\beta}\overline{E})$ sao cho

$$\|B(t)z\| \leqslant \overline{K}\|z\|$$

và

$$z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\lambda_n \int_t^T a(\xi) d\xi} \langle z(T), \phi_n \rangle - \int\limits_t^T e^{\lambda_n \int_t^s a(\xi) d\xi} \langle B(s) z, \phi_n \rangle \, ds \right) \phi_n.$$

Ta có

$$z(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\lambda_n \int_0^T a(\xi) d\xi} \langle z(T), \phi_n \rangle - \int\limits_0^T e^{\lambda_n \int_0^s a(\xi) d\xi} \langle B(s) z, \phi_n \rangle \, ds \right) \phi_n.$$

Do đó

$$\langle z(0), \phi_n \rangle = e^{\lambda_n \int_0^T a(\xi) d\xi} \langle z(T), \phi_n \rangle - \int\limits_0^T e^{\lambda_n \int_0^s a(\xi) d\xi} \langle B(s) z, \phi_n \rangle \, ds.$$

Đặt $n_1 = \min \left\{ n \in \mathbb{N} : \lambda_n \geqslant \dfrac{1}{2 \int_0^T a(\xi) d\xi} \ln \dfrac{\overline{E}}{\varepsilon} \right\}$. Vì

$$\|z(T)\| = \|u_1(T) - u_2(T)\| \leqslant \|u_1(T) - \varphi\| + \|u_2(T) - \varphi\| \leqslant 2\varepsilon,$$

nên

$$\begin{aligned}
\|z(0)\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle z(0), \phi_n \rangle^2 = \sum_{n=1}^{n_1 - 1} \langle z(0), \phi_n \rangle^2 + \sum_{n=n_1}^{\infty} \langle z(0), \phi_n \rangle^2 \\
&= \sum_{n=1}^{n_1 - 1} \left(e^{\lambda_n \int_0^T a(\xi) d\xi} \langle z(T), \phi_n \rangle - \int\limits_0^T e^{\lambda_n \int_0^s a(\xi) d\xi} \langle B(s) z, \phi_n \rangle \, ds \right)^2 \\
&\quad + \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{\lambda_n^{2\beta}}{\lambda_n^{2\beta}} \langle z(0), \phi_n \rangle^2 \\
&\leqslant 2 \sum_{n=1}^{n_1 - 1} e^{2\lambda_n \int_0^T a(\xi) d\xi} \langle z(T), \phi_n \rangle^2 + 2 \sum_{n=1}^{n_1 - 1} \Big(\int\limits_0^T e^{\lambda_n \int_0^s a(\xi) d\xi} \langle B(s) z, \phi_n \rangle \, ds \Big)^2 \\
&\quad + \left(\frac{1}{2 \int_0^T a(\xi) d\xi} \ln \frac{\overline{E}}{\varepsilon} \right)^{-2\beta} \sum_{n=n_1}^{\infty} \lambda_n^{2\beta} \langle z(0), \phi_n \rangle^2 \\
&\leqslant 2 \frac{\overline{E}}{\varepsilon} \sum_{n=1}^{n_1 - 1} \langle z(T), \phi_n \rangle^2 + 2T \sum_{n=1}^{n_1 - 1} \int\limits_0^T e^{2\lambda_n \int_0^s a(\xi) d\xi} \langle B(s) z, \phi_n \rangle^2 \, ds \\
&\quad + 2 \left(\frac{1}{2 \int_0^T a(\xi) d\xi} \ln \frac{\overline{E}}{\varepsilon} \right)^{-2\beta} \sum_{n=n_1}^{\infty} \lambda_n^{2\beta} \Big(\langle u_1(0), \phi_n \rangle^2 + \langle u_2(0), \phi_n \rangle^2 \Big)
\end{aligned}$$

$$\leqslant 2\frac{\overline{E}}{\varepsilon}\|z(T)\|^2 + 2T\int\limits_0^T \Big(\frac{\overline{E}}{\varepsilon}\Big)^{\nu(s)}\|B(s)z\|^2 ds + 4\Big(\frac{1}{2\int_0^T a(\xi)d\xi}\ln\frac{\overline{E}}{\varepsilon}\Big)^{-2\beta}\overline{E}^2$$

$$\leqslant 8\varepsilon\overline{E} + 4\left(\frac{1}{2\int_0^T a(\xi)d\xi}\ln\frac{\overline{E}}{\varepsilon}\right)^{-2\beta} E_1^2 + 2\overline{K}^2 T\int\limits_0^T \Big(\frac{\overline{E}}{\varepsilon}\Big)^{\nu(s)}\|z(s)\|^2 ds. \tag{2.25}$$

Từ (2.25) và Bổ đề 2.1.8 suy ra

$$\|z(0)\|^2 \leqslant 8\left(\frac{1}{2\int_0^T a(\xi)d\xi}\ln\frac{\overline{E}}{\varepsilon}\right)^{-2\beta}\overline{E}^2 + (16+2c_6)\overline{E}\varepsilon. \tag{2.26}$$

Từ (2.26) và bất đẳng thức $\|z(T)\| \leqslant 2\varepsilon$, ta đạt được kết quả phần i) của định lý.

Chứng minh phần ii): Từ (2.21) ta có

$$\|u_i(t)\|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\gamma\lambda_n}\langle u_i(t),\phi_n\rangle^2 \leqslant \widetilde{E}^2.$$

Khi đó tồn tại hằng số $\widetilde{K} = K(\widetilde{E})$ sao cho $\|B(t)z\| \leqslant \widetilde{K}\|z\|$. Đặt

$$n_2 = \min\left\{n\in\mathbb{N} : \lambda_n \geqslant \frac{1}{\gamma+\int_0^T a(\xi)d\xi}\ln\frac{\widetilde{E}}{\varepsilon}\right\}.$$

Tương tự như trong chứng minh của phần i), ta có

$$\|z(0)\|^2 \leqslant 2\sum_{n=1}^{n_2-1} e^{2\lambda_n\int_0^T a(\xi)d\xi}\langle z(T),\phi_n\rangle^2$$

$$+ 2T\sum_{n=1}^{n_2-1}\int\limits_0^T e^{2\lambda_n\int_0^s a(\xi)d\xi}\langle B(s)z,\phi_n\rangle^2 ds + \sum_{n=n_2}^{\infty}\frac{e^{2\gamma\lambda_n}}{e^{2\gamma\lambda_n}}\langle z(0),\phi_n\rangle^2$$

$$\leqslant 2\left(\frac{\widetilde{E}}{\varepsilon}\right)^{\frac{2\int_0^T a(\xi)d\xi}{\gamma+\int_0^T a(\xi)d\xi}}\|z(T)\|^2 + 2\widetilde{K}^2 T\int\limits_0^T\left(\frac{\widetilde{E}}{\varepsilon}\right)^{\frac{2\int_0^s a(\xi)d\xi}{\gamma+\int_0^T a(\xi)d\xi}}\|z(s)\|^2 ds$$

$$+\left(\frac{\varepsilon}{\widetilde{E}}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma+\int_0^T a(\xi)d\xi}}\sum_{n=n_2}^{\infty} e^{2\gamma\lambda_n}\langle z(0),\phi_n\rangle^2$$

hay

$$\|z(0)\|^2 \leqslant 12\varepsilon^{\frac{2\gamma}{\gamma+\int_0^T a(\xi)d\xi}} \widetilde{E}^{\frac{2\int_0^T a(\xi)d\xi}{\gamma+\int_0^T a(\xi)d\xi}} + 2\widetilde{K}^2 T \int\limits_0^T \left(\frac{\widetilde{E}}{\varepsilon}\right)^{\frac{2\int_0^s a(\xi)d\xi}{\gamma+\int_0^T a(\xi)d\xi}} \|z(s)\|^2 ds. \tag{2.27}$$

Từ (2.27) và Bổ đề 2.1.9, ta có

$$\|z(0)\|^2 \leqslant (24 + 2c_8) E_2^{\frac{2\int_0^T a(\xi)d\xi}{\gamma+\int_0^T a(\xi)d\xi}} \varepsilon^{\frac{2\gamma}{\gamma+\int_0^T a(\xi)d\xi}}. \tag{2.28}$$

Từ (2.28) và bất đẳng thức $\|z(T)\| \leqslant 2\varepsilon$, ta đạt được kết quả phần ii) của định lý.

Định lý được chứng minh. $\square$

Nhận xét 2.1.10. i) Trong hai định lý trên chúng tôi chỉ đòi hỏi điều hiện (F1) đối với hàm f.

ii) Để chứng minh đánh giá ổn định với $t \in (0, T]$ cho trường hợp tuyến tính, trong [32] các tác giả áp dụng phương pháp lồi logarithm bằng cách sử dụng đạo hàm bậc hai của hàm $h(t) = \|u(t)\|^2, t \in [0, T]$. Tuy nhiên, đối với bài toán phi tuyến (2.1), thì hàm $h(t)$ có thể không có đạo hàm bậc hai. Do đó, chúng tôi phải áp dụng một kỹ thuật hoàn toàn khác để có được các đánh giá ổn định trong các định lý trên.

iii) Mặc dù chúng tôi yêu cầu hàm f chỉ thỏa mãn điều kiện (F1), kết quả của chúng tôi trong Định lý 2.1.7 vẫn mạnh hơn so với kết quả của Nguyễn Huy Tuấn và Đặng Đức Trọng trong [80], vì các tác giả này chỉ xét bài toán (2.1) với hệ số hằng và f thỏa mãn các điều kiện (F0)–(F2) như sau.

(F0) Tồn tại hằng số $L_0 \geqslant 0$ sao cho

$$\langle f(t, w_1) - f(t, w_2), w_1 - w_2 \rangle + L_0 \|w_1 - w_2\|^2 \geqslant 0.$$

(F1) Với $r > 0$, tồn tại hằng số $K(r) \geqslant 0$ sao cho $f : [0, T] \times H \to H$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz địa phương

$$\|f(t, w_1) - f(t, w_2)\| \leqslant K(r) \|w_1 - w_2\|$$

với $w_1, w_2 \in H$ sao cho $\|w_i\| \leqslant r, i = 1, 2$.

(F2) $f(t, 0) = 0$ với mọi $t \in [0, T]$.

Hơn nữa, Nguyễn Huy Tuấn và Đặng Đức Trọng đặt điều kiện mạnh lên nghiệm là

$$E^2 = \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 e^{2\lambda_k} \big|\langle u(s), \phi_k\rangle\big|^2 < \infty, \tag{2.29}$$

nhưng chỉ đạt được đánh giá dạng logarithm tại $t = 0$ như sau

$$\|v_\varepsilon(t) - u(t)\| \leqslant M\varepsilon^{t/T}\Big(\ln\frac{e}{\varepsilon}\Big)^{t/T-1}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Các điều kiện (2.20) và (2.21) của chúng tôi yếu hơn so với điều kiện của các tác giả trong [80] và trong trường hợp (2.21) chúng tôi đạt được đánh giá dạng Hölder tại $t = 0$.

Trong Định lý 2.1.7, điều kiện chúng tôi đặt ra yếu hơn so với điều kiện mà Nguyễn Huy Tuấn và Đặng Đức Trọng đã đặt ra trong [80]. Tuy nhiên, các điều kiện (2.20) và (2.21) đòi hỏi tính bị chặn của nghiệm trên toàn miền $t \in [0, T]$. Để đạt kết quả tốt hơn chỉ với tính bị chặn của nghiệm tại $t = 0$, chúng tôi giả thiết thêm rằng

(F3) Tồn tại hằng số $L_1 \geqslant 0$ sao cho

$$\langle f(t, w_1) - f(t, w_2), w_1 - w_2\rangle \leqslant L_1\|w_1 - w_2\|^2.$$

Chúng tôi đạt được kết quả sau.

Định lý 2.1.11. *Giả sử toán tử $A(t)$ thỏa mãn các điều kiện (A1),(A2) và f thỏa mãn các điều kiện (F1)–(F3). Nếu u_1 và u_2 là hai nghiệm của bài toán (2.1) với ràng buộc $\|u_i(T) - \varphi\| \leqslant \varepsilon$ và*

$$\|u_i(0)\| \leqslant E, \quad i = 1, 2,$$

với $0 < \varepsilon < E$ thì

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leqslant 2\exp\Big(\Big(\frac{1}{2}K^2T + |c_2|T + 2K\Big)c_4c_5\nu(t)(1 - \nu(t))\Big) \times \varepsilon^{\nu(t)}E^{1-\nu(t)}, \forall t \in [0, T],$$

trong đó $c_4 = \frac{a_3(T)}{T}, c_5 = \max\{\exp|c_1|T, \exp|c|T\}$ và $K = K(e^{L_1T}E)$ là hằng số Lipschitz xác định trong (F1).

Chứng minh. Ta có

$$\frac{d}{dt}\|u_i(t)\|^2 = 2\langle u_i, u_{it}\rangle = -2\langle u_i, A(t)u_i\rangle + 2\langle u_i, f(t,u_i)\rangle \leqslant 2\langle u_i, f(t,u_i)\rangle .$$

Từ các điều kiện (F2) và (F3) ta có

$$\langle u_i, f(t,u_i)\rangle = \langle u_i - 0, f(t,u_i) - f(t,0)\rangle \leq L_1\|u_i\|^2.$$

Do đó, nếu u_1 và u_2 là hai nghiệm của phương trình (2.1) thì

$$\frac{d}{dt}\|u_i(t)\|^2 \leqslant 2L_1\|u_i\|^2,$$

hay

$$\frac{d}{dt}\left(\|u_i(t)\|^2 e^{-2L_1 t}\right) \leqslant 0.$$

Ta suy ra

$$\|u_i(t)\|^2 \leq e^{2L_1 t}\|u_i(0)\|^2 \leqslant e^{2L_1 T}E^2, i = 1,2.$$

Áp dụng Định lý 2.1.2 với E được thay bởi $e^{L_1 T}E$ chúng ta nhận được kết luận của định lý. □

Nhận xét 2.1.12. Định lý 2.5 trong [32] về đánh giá ổn định cho phương trình parabolic ngược với hệ số phụ thuộc thời gian là một hệ quả của Định lý 2.1.11 nếu chúng ta xét $f(t,u) \equiv 0$.

Khi $A(t) = A$ và $f \equiv 0$, Định lí 2.1.11 dẫn đến kết quả sau.

Hệ quả 2.1.13. *Cho A là toán tử tuyến tính tự liên hợp, xác định dương và không bị chặn trong H. Nếu u_1 và u_2 là hai nghiệm của bài toán*

$$\begin{cases} u_t + Au = 0, \quad 0 < t \leqslant T, \\ \|u(T) - \varphi\| \leqslant \varepsilon \end{cases} \tag{2.30}$$

thỏa mãn $\|u_i(0)\| \leqslant E, i = 1,2,$ thì ta có đánh giá sau

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leqslant 2\varepsilon^{t/T}E^{1-t/T}, \qquad t \in [0,T], \tag{2.31}$$

đánh giá này có bậc tối ưu (xem [73, 74]).

Trong các phần trước, chúng tôi không đưa ra bất kỳ mối quan hệ nào giữa toán tử $A(t)$ và hàm f. Để mở rộng lớp hàm chứa hàm f thay vì (F1), chúng tôi giả sử:

(F4) Với mỗi $r > 0$ và u_1, u_2 là hai nghiệm của bài toán (2.1) với

$$\langle A(t)u_i, u_i\rangle \leqslant r^2, i = 1, 2, t \in [0, T],$$

tồn tại hằng số $K(r) \geqslant 0$ sao cho $f : [0, T] \times H \to H$ thỏa mãn

$$\|f(t, u_1) - f(t, u_2)\| \leqslant K(r)\|u_1 - u_2\|.$$

(F5) Tồn tại hằng số $L_2 \geqslant 0$ sao cho với u là nghiệm của (2.1), ta có

$$\langle A(t)u, f(t, u)\rangle \leqslant L_2 \langle A(t)u, u\rangle .$$

Chúng tôi đạt được các kết quả sau

Định lý 2.1.14. *Giả sử các điều kiện (A1),(A2), (F2)–(F5) là thỏa mãn và tồn tại hằng số $L_3 > 0$ sao cho*

$$\langle A(0)u(0), u(0)\rangle \geqslant L_3\|u(0)\|^2.$$

Nếu u_1, u_2 là hai nghiệm của bài toán (2.1) với ràng buộc $\|u_i(T) - \varphi\| \leqslant \varepsilon$ và

$$\langle A(0)u_i(0), u_i(0)\rangle \leqslant E_1^2, i = 1, 2 \tag{2.32}$$

với $0 < \varepsilon < E_1$, thì với mỗi $t \in [0, T]$ tồn tại hàm bị chặn $C_3(t)$ sao cho

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leqslant C_3(t)\varepsilon^{\nu(t)}E_1^{1-\nu(t)}.$$

Chứng minh. Từ $\langle A(0)u_i(0), u_i(0)\rangle \leqslant E_1^2, i = 1, 2,$ và

$$\langle A(0)u_i(0), u_i(0)\rangle \geqslant L_3\|u_i(0)\|^2,$$

ta có

$$\|u_i(0)\|^2 \leqslant \frac{E_1^2}{L_3}, \quad i = 1, 2.$$

Tương tự như trong chứng minh của Định lý 2.1.11, từ điều kiện (F2) và (F3), ta có

$$\|u_i(t)\|^2 \leqslant e^{2L_1t}\|u_i(0)\|^2 \leqslant e^{2L_1T}\frac{E_1^2}{L_3}, i = 1, 2. \tag{2.33}$$

Từ điều kiện (F2), suy ra $u(t) \equiv 0$ trên $[0, T]$ là nghiệm của phương trình

$$Lu = \frac{du}{dt} + A(t)u = f(t, u(t)), \quad 0 < t \leqslant T.$$

Sử dụng điều kiện (A2), ta có

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dt}\langle A(t)u_i, u_i\rangle &= -\frac{d}{dt}\langle A(t)u_i - A(t)0, u_i - 0\rangle \\
&\geqslant -2\langle A(t)u_i - A(t)0, u_{it} - 0\rangle \\
&\quad - c_1\langle A(t)u_i(t) - A(t)0, u_i - 0\rangle - c_2\|u_i - 0\|^2 \\
&\geqslant -2\langle A(t)u_i, u_{it}\rangle - c_1\langle A(t)u_i, u_i\rangle - c_2\|u_i\|^2 \\
&= -2\langle A(t)u_i, -A(t)u_i + f(t, u_i)\rangle \\
&\quad - c_1\langle A(t)u_i, u_i\rangle - c_2\|u_i\|^2 \\
&= 2\|A(t)u_i\|^2 - 2\langle A(t)u_i, f(t, u_i)\rangle \\
&\quad - c_1\langle A(t)u_i, u_i\rangle - c_2\|u_i\|^2. \qquad (2.34)
\end{aligned}$$

Từ điều kiện (F5), (2.33) và (2.34) dẫn đến

$$-\frac{d}{dt}\langle A(t)u_i, u_i\rangle \geqslant 2\|A(t)u_i\|^2 - (c_1 + L_2)\langle A(t)u_i, u_i\rangle - c_2\|u_i\|^2.$$

Vì

$$\begin{aligned}
(c_1 + L_2)\langle A(t)u_i, u_i\rangle &\leq 2\|A(t)u_i\|^2 + \frac{(c_1 + L_2)^2}{8}\|u_i\|^2 \\
&\leq 2\|A(t)u_i\|^2 + (c_1 + L_2)^2\|u_i\|^2,
\end{aligned}$$

nên

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dt}\langle A(t)u_i, u_i\rangle &\geqslant -\Big((c_1 + L_2)^2 + c_2\Big)\|u_i\|^2 \\
&\geqslant -\Big((c_1 + L_2)^2 + c_2\Big)e^{2L_1T}\frac{E_1^2}{L_3}. \qquad (2.35)
\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
\langle A(t)u_i, u_i\rangle &\leqslant \langle A(0)u_i(0), u_i(0)\rangle + \Big((c_1 + L_2)^2 + c_2\Big)Te^{2L_1T}\frac{E_1^2}{L_3} \\
&\leqslant \left(1 + \frac{1}{L_3}\Big((c_1 + L_2)^2 + c_2\Big)Te^{2L_1T}\right)E_1^2. \qquad (2.36)
\end{aligned}$$

Đặt $B(t)z = z_t + A(t)z$. Từ điều kiện (F4) và (2.36), tồn tại hằng số

$$K_1 = K\left(\left(1 + \frac{1}{L_3}\left((c_1 + L_2)^2 + c_2\right)Te^{2L_1T}\right)^{1/2} E\right)$$

sao cho

$$\begin{aligned} \|B(t)z\| = \|z_t + A(t)z\| &= \|f(t,u_2) - f(t,u_1)\| \\ &\leqslant K_1\|u_1 - u_2\| = K_1\|z\|. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Đặt $z = u_1 - u_2$. Tương tự như chứng minh bất đẳng thức (2.19) trong Định lý 2.1.2 với K được thay bởi K_1, ta được

$$\begin{aligned} \|z(t)\| &\leqslant \|z(0)\|^{1-\nu(t)}\|z(T)\|^{\nu(t)} \\ &\times \exp\left(\left(\frac{1}{2}K_1^2T + |c_2|T + 2K_1\right)c_4c_5\nu(t)(1-\nu(t))\right). \end{aligned} \tag{2.38}$$

Mặt khác

$$\|z(0)\| = \|u_1(0) - u_2(0)\| \leqslant \|u_1(0)\| + \|u_2(0)\| \leqslant \frac{2E_1}{\sqrt{L_3}}. \tag{2.39}$$

Từ (2.38), (2.39) và $\|z(T)\| \le 2\varepsilon$, chúng ta đạt được kết quả của định lý. Định lý được chứng minh. □

Định lý 2.1.15. *Cho toán tử A và hàm $a(t)$ thỏa mãn các điều kiện như trong Định lý 2.1.7. Giả sử rằng f thỏa mãn các điều kiện (F2)–(F5) và u_1, u_2 là hai nghiệm của bài toán $u_t + a(t)Au = f(t,u(t)), 0 < t \leqslant T$ sao cho $\|u_i(T) - \varphi\| \leqslant \varepsilon, i = 1,2$. Khi đó, các đánh giá sau đây là đúng.*

i) Nếu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2\beta} \langle u_i(0), \phi_n\rangle^2 \leqslant \overline{E}^2, i = 1,2 \tag{2.40}$$

với $\overline{E} > \varepsilon$ và $\beta \geqslant \frac{1}{2}$, thì tồn tại hàm bị chặn $C_4(t)$ trên $[0,T]$ sao cho

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leqslant C_4(t)\varepsilon^{\nu(t)}\overline{E}^{1-\nu(t)}\left(\left(\ln\frac{\overline{E}}{\varepsilon}\right)^{-\beta} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\overline{E}}}\right)^{1-\nu(t)}, \tag{2.41}$$

trong đó $\nu(t) = \dfrac{\int_0^t a(\xi)d\xi}{\int_0^T a(\xi)d\xi}$.

ii) Nếu

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{2\gamma\lambda_n} \langle u_i(0), \phi_n\rangle^2 \leqslant \widetilde{E}^2, i = 1,2 \tag{2.42}$$

với $\widetilde{E} > \varepsilon$ và $\gamma > 0$, thì tồn tại hàm bị chặn $C_5(t)$ trên $[0,T]$ sao cho

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leqslant C_5(t)\varepsilon^{\nu_1(t)}\widetilde{E}^{1-\nu_1(t)}, \tag{2.43}$$

trong đó $\nu_1(t) = \dfrac{\gamma + \int_0^t a(\xi)d\xi}{\gamma + \int_0^T a(\xi)d\xi}$.

Chứng minh. i) Với $\beta \geqslant \dfrac{1}{2}$, ta có

$$\begin{aligned}
\langle a(0)Au_i(0), u_i(0)\rangle &= a(0)\sum_{n=1}^{\infty} \langle Au_i(0), \phi_n\rangle \langle u_i(0), \phi_n\rangle \\
&= a(0)\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle u_i(0), \phi_n\rangle^2 \\
&\leqslant a_1\lambda_1^{(1-2\beta)} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2\beta} \langle u_i(0), \phi_n\rangle^2 \\
&\leqslant a_1\lambda_1^{(1-2\beta)}\overline{E}_1^2.
\end{aligned}$$

Tương tự như chứng minh bất đẳng thức (2.36) của Định lý 2.1.14, ta có

$$\begin{aligned}
\langle a(t)Au_i, u_i\rangle \leqslant{}& \langle a(0)Au_i(0), u_i(0)\rangle \\
&+ \frac{a_1}{L_3}\lambda_1^{(1-2\beta)}\overline{E}_1^2 \left((C_1+L_2)^2 + c_2\right) Te^{L_1T} \\
\leqslant{}& \left(1 + \frac{1}{L_3}\left((C_1+L_2)^2 + c_2\right) Te^{L_1T}\right) a_1\lambda_1^{(1-2\beta)}\overline{E}_1^2.
\end{aligned}$$

Đặt $z(t) = u_1(t) - u_2(t)$ và $B(t)z = z_t + a(t)Az$. Tương tự như trong chứng minh Định lý 2.1.14, tồn tại hằng số

$$\overline{K}_1 = K\left(\left(1 + \frac{1}{L_3}\left((C_1+L_2)^2 + c_2\right) Te^{L_1T}\right)^{1/2} a_1^{1/2}\lambda_1^{(1/2-\beta)}\overline{E}_1\right)$$

sao cho $\|B(t)z\| \leqslant \overline{K}_1\|z\|$. Áp dụng Định lý 2.1.14 với K_1 được thay bởi $\overline{K}_1$, ta có

$$\begin{aligned}
\|z(t)\| \leqslant{}& \|z(T)\|^{\nu(t)}\|z(0)\|^{1-\nu(t)} \\
&\times \exp\left(\left(\frac{1}{2}\overline{K}_1^2T + 2\overline{K}_1\right) c_4c_5\nu(t)(1-\nu(t))\right).
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Tương tự như trong chứng minh bất đẳng thức (2.26) trong Định lý 2.1.7, tồn tại các hằng số c_{10}, c_{11} sao cho

$$\|z(0)\|^2 \leqslant c_{10}\left(\frac{1}{2Ta_0}\ln\frac{\overline{E}_1}{\varepsilon}\right)^{-2\beta} \overline{E}_1^2 + c_{11}\overline{E}_1\varepsilon. \tag{2.45}$$

Từ (2.44), (2.45) và $\|z(T)\| \leqslant 2\varepsilon$, ta đạt được kết quả phần i) của định lý.

ii) Tồn tại hằng số C_γ sao cho

$$\begin{aligned} a(0)\left\langle Au_i(0), u_i(0)\right\rangle &= a(0)\sum_{n=1}^{\infty}\left\langle Au_i(0), \phi_n\right\rangle\left\langle u_i(0), \phi_n\right\rangle \\ &= a(0)\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\left\langle u_i(0), \phi_n\right\rangle^2 \\ &\leqslant C_\gamma a_1\sum_{n=1}^{\infty}e^{2\gamma\lambda_n}\left\langle u_i(0), \phi_n\right\rangle^2 \leqslant C_\gamma a_1\widetilde{E}_1^2. \end{aligned}$$

Tương tự như chứng minh bất đẳng thức (2.36) trong Định lý 2.1.14, ta đạt được

$$\begin{aligned} \left\langle Au_i, u_i\right\rangle &\leqslant \left\langle Au_i(0), u_i(0)\right\rangle \\ &\quad + \frac{1}{L_3}C_\gamma\widetilde{E}_1^2\left((C_1+L_2)^2+c_2\right)Te^{L_1T} \\ &\leqslant \left(1+\frac{1}{L_3}\left((C_1+L_2)^2+c_2\right)Te^{L_1T}\right)C_\gamma E_1^2. \end{aligned}$$

Đặt $z(t) := u_1(t) - u_2(t)$ và $B(t)z := z_t + a(t)Az$. Tồn tại hằng số

$$\widetilde{K}_1 = K\left(\left(1+\frac{1}{L_3}\left((C_1+L_2)^2+c_2\right)Te^{L_1T}\right)^{1/2}C_\gamma^{1/2}E_1\right)$$

sao cho $\|B(t)z\| \leq \widetilde{K}_1\|z\|$. Áp dụng Định lý 2.1.14 với K_1 được thay thế bởi $\widetilde{K}_1$, ta có

$$\|z(t)\| \leqslant \|z(T)\|^{\nu(t)}\|z(0)\|^{1-\nu(t)}\exp\left(\left(\frac{1}{2}\widetilde{K}_1^2T+2\widetilde{K}_1\right)c_4c_5\nu(t)(1-\nu(t))\right). \tag{2.46}$$

Tương tự như chứng minh bất đẳng thức (2.28) trong Định lý 2.1.7, tồn tại hằng số c_{12} sao cho

$$\|z(0)\|^2 \leqslant c_{12}E_2^{\frac{2\int_0^T a(\xi)d\xi}{\gamma+\int_0^T a(\xi)d\xi}}\varepsilon^{\frac{2\gamma}{\gamma+\int_0^T a(\xi)d\xi}}. \tag{2.47}$$

Từ (2.46), (2.47) và $\|z(T)\| \leqslant 2\varepsilon$, chúng ta đạt được kết quả phần ii) của định lý.

Định lý được chứng minh. $\square$

Nhận xét 2.1.16. 1) Nếu $a(t) = 1$, thì từ Định lý 2.1.15 ta đạt được các kết quả sau đây.

i) Nếu điều kiện (2.40) được thỏa mãn, thì với $t \in [0, T]$, ta có

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \le \overline{C}(t)\varepsilon^{t/T}\overline{E}^{1-t/T}\left(\left(\ln\frac{\overline{E}}{\varepsilon}\right)^{-\beta} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\overline{E}}}\right)^{1-t/T}.$$

Đây là đánh giá có bậc tối ưu trong trường hợp tuyến tính (xem [73, 74]).

ii) Nếu điều kiện (2.42) được thỏa mãn, thì với $t \in [0, T]$, ta có

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \le \overline{C}_1(t)\varepsilon^{\frac{\gamma+t}{\gamma+T}}\widetilde{E}^{1-\frac{\gamma+t}{\gamma+T}}.$$

Đây cũng là đánh giá có bậc tối ưu trong trường hợp tuyến tính (xem [31]).

2) Nếu $a_t(t) < 0$ và $a(0) \leqslant 1$ thì

$$\nu_1(t) = \frac{\gamma + \int_0^t a(\xi)d\xi}{\gamma + \int_0^T a(\xi)d\xi} > \frac{\gamma + t}{\gamma + T}, t \in [0, T).$$

3) Trong [79], Đặng Đức Trọng và các cộng sự chỉ xét bài toán (2.1) với hệ số hằng. Hơn nữa, các tác giả này đặt điều kiện mạnh lên nghiệm. Tuy nhiên, họ chỉ đạt được đánh giá dạng logarithm tại $t = 0$. Chúng tôi xét bài toán tổng quát hơn với hệ số phụ thuộc thời gian và điều kiện yếu hơn nhưng kết quả tốt hơn.

2.2 Các ví dụ

Trong mục này, chúng tôi trình bày một số ví dụ để minh họa cho các giả thiết mà chúng tôi đặt ra trong mục 2.1. Các ví dụ này cũng chỉ ra rằng các định lý về đánh giá ổn định trong mục 2.1 là ứng dụng được cho một số bài toán vật lý quan trọng như bài toán trong mô hình sinh lý thần kinh của hệ thống tế bào thần kinh, bài toán trong phản ứng nhiệt, bài toán dân số, bài toán Ginzburg-Landau, bài toán trong động học enzyme.

Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$. Giả sử rằng $a(x, t)$ là hàm khả vi liên tục theo biến t trên $[0, T]$ sao cho $a(x, t) \geqslant a_0 > 0, x \in \Omega, t \in [0, T]$. Đặt

$H = L^2(\Omega)$. Xét bài toán

$$\begin{cases} u_t - \nabla(a(x,t)\nabla u) = f(t,u), x \in \Omega, t \in (0,T), \\ u = 0 \text{ trên } \partial\Omega \times (0,T), \\ \|u(T) - \varphi\| \leqslant \varepsilon, \end{cases} \tag{2.48}$$

trong đó $\nabla^2 = \Delta$ với Δ là toán tử Laplace.

Đầu tiên, chúng ta thấy rằng $A(t)u = -\nabla(a(x,t)\nabla u)$ và

$$\langle A(t)u, u\rangle = \int_\Omega a(x,t)|\nabla u|^2 dx.$$

Giả sử rằng u_1 và u_2 là hai nghiệm của (2.48). Đặt $z = u_1 - u_2$, ta có

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}\langle A(t)z, z\rangle &= 2\int_\Omega \nabla(a(x,t)\nabla z) z_t dx - \int_\Omega a_t(x,t)|\nabla z|^2 dx \\ &= -2\langle A(t)z, z_t\rangle - \int_\Omega \frac{a_t(x,t)}{a(x,t)} a(x,t)|\nabla z|^2 dx \\ &\geqslant -2\langle A(t)z, z_t\rangle - a_1(t)\int_\Omega a(x,t)|\nabla z|^2 dx. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$-\frac{d}{dt}\langle A(t)z, z\rangle \geqslant -2\langle A(t)z, z_t\rangle - a_1(t)\langle A(t)z, z\rangle$$

trong đó $a_1(t) = \sup_{x\in\Omega} \dfrac{a_t(x,t)}{a(x,t)}$. Vì vậy, $A(t)$ thỏa mãn các điều kiện (A1) và (A2).

Tiếp theo, chúng tôi trình bày một số ví dụ về hàm f thỏa mãn các điều kiện (F1)–(F5) và các ứng dụng về đánh giá ổn định.

1) Chúng ta xét bài toán (2.48) trong mô hình sinh lý thần kinh của hệ thống tế bào thần kinh ([38, 47, 67]):

$$f(t,u) = f(u) = u(b - c\|u\|^p), p \geqslant 1,$$

với hằng số thực b và c. Ta có

$$\begin{aligned} f(u) - f(v) &= b(u-v) - c\big(\|u\|^p u - \|v\|^p v\big) \\ &= b(u-v) - \frac{c}{2}\left(\|u\|^p + \|v\|^p\right)(u-v) \\ &\quad - \frac{c}{2}\left(\|u\|^p - \|v\|^p\right)(u+v). \end{aligned}$$

Rõ ràng rằng f không thỏa mãn điều kiện Lipschitz toàn cục. Mặt khác, với $p \geqslant 1$, tồn tại hằng số c_p sao cho

$$\big|\|u\|^p - \|v\|^p\big| \leqslant c_p(\|u\| + \|v\|)^{p-1}\big|\|u\| - \|v\|\big|.$$

Do đó, nếu $\|u\|$ và $\|v\| \leqslant r$, thì

$$\begin{aligned}\|f(u) - f(v)\| &\leqslant |b|\|u - v\| + \frac{|c|}{2}\left(\|u\|^p + \|v\|^p\right)\|u - v\| \\ &\quad + \frac{|c|}{2}c_p(\|u\| + \|v\|)^{p-1}\Big|\|u\| - \|v\|\Big|\|u + v\| \\ &\leqslant |b|\|u - v\| + |c|r^p\|u - v\| + \frac{|c|}{2}c_p(\|u\| + \|v\|)^p\|u - v\| \\ &\leqslant \Big(|b| + |c|(1 + 2^{p-1}c_p)r^p\Big)\|u - v\|.\end{aligned}$$

Vì vậy, f thỏa mãn điều kiện (F1) với $K(r) = |b| + |c|(1 + 2^{p-1}c_p)r^p$. Khi đó, nếu u_1 và u_2 là hai nghiệm của (2.48) và $\|u_i(\cdot, t)\| \leqslant E,\ i = 1, 2, t \in [0, T]$, thì từ Định lý 2.1.2, tồn tại hàm bị chặn $\overline{C}(t)$ sao cho

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leqslant \overline{C}(t)\varepsilon^{\nu(t)}E^{1-\nu(t)},\ t \in [0, T].$$

Chúng ta cũng thấy rằng, nếu $c \geqslant 0$, thì f thỏa mãn (F1)–(F3). Thật vậy, điều kiện (F1) vừa được chứng minh, điều kiện (F2) là rõ ràng. Hơn nữa, từ

$$\|u\|^p u - \|v\|^p v = \frac{1}{2}\left(\|u\|^p + \|v\|^p\right)(u - v) + \frac{1}{2}\left(\|u\|^p - \|v\|^p\right)(u + v),$$

ta có

$$\begin{aligned}\langle f(u) - f(v), u - v\rangle = b\|u - v\|^2 &- \frac{c}{2}\left(\|u\|^p + \|v\|^p\right)\|u - v\|^2 \\ &- \frac{c}{2}\left(\|u\|^p - \|v\|^p\right)(\|u\|^2 - \|v\|^2).\end{aligned}$$

Vì

$$\frac{c}{2}\left(\|u\|^p - \|v\|^p\right)(\|u\|^2 - \|v\|^2) \geq 0$$

nên

$$\langle f(u) - f(v), u - v\rangle \leq |b|\|u - v\|^2.$$

Ta suy ra điều kiện (F3) được thỏa mãn.

Do đó, trong trường hợp $c \geqslant 0$, nếu u_1 và u_2 là hai nghiệm của (2.48) và $\|u_i(\cdot,0)\| \leqslant E,\ i=1,2$, thì từ Định lý 2.1.11, tồn tại hàm bị chặn $\overline{C}_1(t)$ sao cho

$$\|u_1(t)-u_2(t)\| \le \overline{C}_1(t)\varepsilon^{\nu(t)}E^{1-\nu(t)},\ t\in[0,T].$$

2) Xét bài toán (2.48) trong động học enzyme ([62]):

$$f(t,u)=f(u)=\frac{-u}{1+bu+cu^2}$$

với $b,c>0, b^2<4c$. Ta có

$$\begin{aligned}f(u)-f(v)&=\frac{-u}{1+bu+cu^2}-\frac{-v}{1+bv+cv^2}\\&=-\frac{(1+cuv)(u-v)}{(1+bu+cu^2)(1+bv+cv^2)}.\end{aligned}\tag{2.49}$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(1+bu+cu^2)(1+bv+cv^2)}\\&\quad=\frac{1}{\left(1-\frac{b^2}{4c}+\left(\sqrt{c}u+\frac{b}{2\sqrt{c}}\right)^2\right)\left(1-\frac{b^2}{4c}+\left(\sqrt{c}v+\frac{b}{2\sqrt{c}}\right)^2\right)}\\&\quad\leqslant\frac{1}{\left(1-\frac{b^2}{4c}\right)^2}.\end{aligned}$$

Vì $b>0$ và $b^2<4c$ nên $c|uv|\leqslant 1+c^2|uv|^2$ và $1+bu+cu^2>0$. Do đó,

$$\begin{aligned}&\frac{|1+cuv|}{(1+bu+cu^2)(1+bv+cv^2)}\le\frac{1+c|uv|}{(1+bu+cu^2)(1+bv+cv^2)}\\&\quad\leqslant\frac{2+c^2|uv|^2}{(1+bu+cu^2)(1+bv+cv^2)}\\&\quad\leqslant\frac{2}{(1+bu+cu^2)(1+bv+cv^2)}+\frac{c^2|uv|^2}{(1+bu+cu^2)(1+bv+cv^2)}\\&\quad\leqslant 2\left(1-\frac{b^2}{4c}\right)^{-2}\\&\qquad+\frac{c^2|uv|^2}{\left(\frac{1}{4}(4c-b^2)u^2+\left(1+\frac{bu}{2}\right)^2\right)\left(\frac{1}{4}(4c-b^2)v^2+\left(1+\frac{bv}{2}\right)^2\right)}.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{|1+cuv|}{(1+bu+cu^2)(1+bv+cv^2)} \leqslant 2\left(1-\frac{b^2}{4c}\right)^{-2} + \frac{c^2|uv|^2}{\frac{1}{16}(4c-b^2)^2u^2v^2}$$
$$= 2\left(1-\frac{b^2}{4c}\right)^{-2} + \frac{16c^2}{(4c-b^2)^2} := K(b,c).$$

Vì vậy, $\langle f(u)-f(v), u-v\rangle \leqslant K(b,c)\|u-v\|^2$ và

$$\|f(u)-f(v)\| \leqslant K(b,c)\|u-v\|.$$

Suy ra f thỏa mãn các điều kiện (F1)–(F3). Hơn nữa, nếu u_1, u_2 là hai nghiệm của (2.48) với ràng buộc $\|u_i(\cdot,0)\| \le E,\ i=1,2$ thì từ Định lý 2.1.11, tồn tại hàm bị chặn $\overline{C}_2(t)$ sao cho

$$\|u_1(t)-u_2(t)\| \le \overline{C}_2(t)\varepsilon^{\nu(t)}E^{1-\nu(t)},\ t\in[0,T].$$

Trong các ví dụ sau, chúng tôi xét bài toán (2.48) trong không gian một chiều với $\Omega=(0,1)$.

3) Xét bài toán trong phản ứng nhiệt ([62]):

$$f(t,u)=f(u)=-|u|^pu,\ p\geqslant 1.$$

Khi đó f thỏa mãn (F2)–(F5).
Thât vậy, điều kiện (F2) là rõ ràng. Hơn nữa, ta có

$$f(u_1)-f(u_2) = -\frac{1}{2}\big(|u_1|^p+|u_2|^p\big)(u_1-u_2) - \frac{1}{2}(u_1+u_2)\big(|u_1|^p-|u_2|^p\big).$$

Do đó,

$$\begin{aligned}\langle f(u_1)-f(u_2), u_1-u_2\rangle &= -\frac{1}{2}\int_0^1 \big(|u_1|^p+|u_2|^p\big)(u_1-u_2)^2dx\\ &\quad -\frac{1}{2}\int_0^1 (u_1+u_2)(u_1-u_2)\big(|u_1|^p-|u_2|^p\big)dx\\ &\leqslant -\frac{1}{2}\int_0^1 (|u_1|^2-|u_2|^2)\big(|u_1|^p-|u_2|^p\big)dx \leqslant 0.\end{aligned}$$

Suy ra f thỏa mãn điều kiện (F3). Mặt khác,

$$\begin{aligned}&\|f(u_1)-f(u_2)\|^2\\ &= \frac{1}{4}\int_0^1 \left\{\big(|u_1|^p+|u_2|^p\big)(u_1-u_2)+(u_1+u_2)\big(|u_1|^p-|u_2|^p\big)\right\}^2dx\\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 \Big(|u_1|^p+|u_2|^p\Big)^2(u_1-u_2)^2dx + \frac{1}{2}\int_0^1 (u_1+u_2)^2\Big(|u_1|^p-|u_2|^p\Big)^2dx.\end{aligned}$$

Với $p \geqslant 1$, tồn tại hằng số c_p sao cho

$$\Big||u_1|^p - |u_2|^p\Big| \leqslant c_p(|u_1| + |u_2|)^{p-1}\big||u_1| - |u_2|\big|.$$

Do đó,

$$\begin{aligned}
\|f(u_1) - f(u_2)\|^2 &\leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 \big(|u_1|^p + |u_2|^p\big)^2 (u_1 - u_2)^2 dx \\
&\quad + \frac{1}{2}c_p^2 \int_0^1 (u_1 + u_2)^2 \big(|u_1| + |u_2|\big)^{2(p-1)} \big(|u_1| - |u_2|\big)^2 dx \\
&\leqslant \int_0^1 \big(|u_1|^p + |u_2|^p\big)^2 (u_1 - u_2)^2 dx + c_p^2 \int_0^1 \big(|u_1| + |u_2|\big)^{2p} \big(|u_1| - |u_2|\big)^2 dx.
\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
u_i^2(x,t) &= \left(\int_0^x u_{ix}(x,t)dx\right)^2 \leqslant \left(\int_0^1 |u_{ix}(x,t)|dx\right)^2 \leqslant \int_0^1 u_{ix}^2(x,t)dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{a(x,t)} a(x,t) u_{ix}^2 dx \leqslant \frac{1}{a_0}\int_0^1 a(x,t)u_{ix}^2 dx \\
&= -\frac{1}{a_0}\int_0^1 (a(x,t)u_{ix})_x u_i dx = \frac{1}{a_0}\left\langle A(t)u_i, u_i\right\rangle.
\end{aligned}$$

Do đó, nếu $\langle A(t)u_i, u_i\rangle \leqslant r^2$, thì $|u_i(x,t)| \leqslant \dfrac{r}{\sqrt{a_0}}$, $i = 1, 2$. Suy ra

$$\begin{aligned}
\|f(u_1) - f(u_2)\|^2 &\leqslant 4\left(\frac{r^2}{a_0}\right)^p \int_0^1 (u_1 - u_2)^2 dx + c_p^2 \left(\frac{4r^2}{a_0}\right)^p \int_0^1 |u_1 - u_2|^2 dx \\
&= \left(4 + 4^p c_p^2\right)\left(\frac{r^2}{a_0}\right)^p \|u_1 - u_2\|^2.
\end{aligned}$$

Vì vậy f thỏa mãn điều kiện (F4).

Hơn nữa,

$$\langle A(t)u, f(t,u)\rangle = \int_0^1 u|u|^p (a(x,t)u_x)_x dx = -\int_0^1 a(x,t)u_x \big(u|u|^p\big)_x dx.$$

Ta có $(u|u|^p)_x = (p+1)|u|^p u_x$. Do đó

$$-a(x,t)u_x(u|u|^p)_x = -(p+1)a(x,t)|u|^p u_x^2 \leqslant 0.$$

Điều này dẫn đến f thỏa mãn điều kiện (F5). Vậy f thỏa mãn các điều kiện (F2)–(F5). Mặt khác,

$$\begin{aligned}
\langle A(0)u_i(0), u_i(0)\rangle &= \int_0^1 a(x,0)u_{ix}^2(x,0)dx \leqslant a_1 \int_0^1 u_{ix}^2(x,0)dx \\
&= a_1\|u_{ix}(\cdot,0)\|^2 \leqslant a_1 E_1^2,
\end{aligned}$$

và

$$\|u(\cdot,0)\|^2 = \int_0^1 u(x,0)^2 dx = \int_0^1 \left(\int_0^x u_s(s,0)ds \right)^2 dx$$
$$\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^1 |u_s(s,0)|ds \right)^2 dx \leqslant \int_0^1 |u_x(x,0)|^2 dx$$

$$\leqslant \frac{1}{a_0} \int_0^1 a(x,0)|u_x(x,0)|^2 dx = -\frac{1}{a_0} \int_0^1 (a(x,0)u_x(x,0))_x u(x,0)dx$$
$$= \frac{1}{a_0} \langle A(0)u(0), u(0) \rangle .$$

Vì vậy, với bài toán này, nếu u_1 và u_2 là hai nghiệm của (2.48) thỏa mãn

$$\|u_{ix}(\cdot,0)\| \leqslant E_1, \quad i = 1,2$$

với $0 < \varepsilon < E_1$, thì áp dụng Định lý 2.1.14 với $c_2 = 0, L_3 = 1/a_0$, tồn tại hàm bị chặn $\overline{C}_3(t)$ sao cho

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leqslant \overline{C}_3(t)\varepsilon^{\nu(t)} E_1^{1-\nu(t)}, t \in [0,T].$$

4) Xét bài toán Ginzburg-Landau ([39]) :

$$f(t,u) = b(t)u - d(t)u^3, \tag{2.50}$$

trong đó $|b(t)| \leqslant M, 0 \leqslant d(t) \leqslant M$ với mọi $t \in [0,T]$ và $a(x,t)$ là hàm khả vi theo biến t trên $[0,T]$ sao cho $a_1 \geqslant a(x,t) \geqslant a_0 > 0, x \in [0,1], t \in [0,T]$.

Chúng ta sẽ chứng minh f thỏa mãn các điều kiện (F2)–(F5). Điều kiện (F2) là rõ ràng. Vì

$$f(t,u_1) - f(t,u_2) = b(t)(u_1 - u_2) - d(t)(u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2)(u_1 - u_2)$$

và $u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2 = (u_1 + 1/2u_2)^2 + 3/4u_2^2 \geqslant 0$, nên

$$\langle f(t,u_1) - f(t,u_2), u_1 - u_2 \rangle$$
$$= \int_0^1 b(t)(u_1 - u_2)^2 dx - \int_0^1 d(t)(u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2)(u_1 - u_2)^2 dx$$
$$\leqslant M \int_0^1 (u_1 - u_2)^2 dx \leqslant M\|u_1 - u_2\|^2.$$

Suy ra f thỏa mãn điều kiện (F3). Mặt khác,

$$\begin{aligned}\|f(t,u_1)-f(t,u_2)\|^2 &\leqslant 2\int_0^1 |b(t)|^2(u_1-u_2)^2dx \\ &\quad + 2\int_0^1 |d(t)|^2(u_1^2+u_1u_2+u_2^2)^2(u_1-u_2)^2dx \\ &\leqslant 2M^2\|u_1-u_2\|^2 + 5M^2\int_0^1 (u_1^2+u_2^2)^2(u_1-u_2)^2dx\end{aligned}$$

Tương tự như Ví dụ 3 ta có $\langle A(t)u_i, u_i\rangle \leqslant r^2$, và $|u_i(x,t)| \leqslant \dfrac{r}{\sqrt{a_0}}$, $i=1,2$. Do đó

$$\|f(t,u_1)-f(t,u_2)\|^2 \leqslant 2M^2\left(1+\frac{10r^4}{a_0^2}\right)\|u_1-u_2\|^2.$$

Điều này chứng tỏ f thỏa mãn (F4).

Hơn nữa,

$$\begin{aligned}\langle A(t)u, f(t,u)\rangle &= -\int_0^1 (a(x,t)u_x)_x\left(b(t)u-d(t)u^3\right)dx \\ &= \int_0^1 a(x,t)\left(b(t)u_x^2-3d(t)u_x^2u^2\right)dx \\ &\leqslant b(t)\int_0^1 a(x,t)u_x^2dx \leq M\langle A(t)u,u\rangle.\end{aligned}$$

Suy ra f thỏa mãn điều kiện (F5). Vì vậy, f thỏa mãn các điều kiện (F2)–(F5). Hơn nữa, tương tự như Ví dụ 3, ta có

$$\langle A(0)u_i(0), u_i(0)\rangle \leqslant a_1E_1^2,$$

và

$$\|u(\cdot,0)\|^2 \leqslant \frac{1}{a_0}\langle A(0)u(0),u(0)\rangle.$$

Vì vậy, áp dụng Định lý 2.1.14 với $c_2=0, L_3=1/a_0$ ta thấy rằng, nếu u_1 và u_2 là hai nghiệm của (2.48) với f xác định bởi (2.50) và

$$\|u_{ix}(\cdot,0)\| \leqslant E_1, i=1,2$$

với $0<\varepsilon<E_1$, thì tồn tại hàm bị chặn $\overline{C}_4(t)$ sao cho

$$\|u_1(t)-u_2(t)\| \leqslant \overline{C}_4(t)\varepsilon^{\nu(t)}E_1^{1-\nu(t)}, t\in[0,T].$$

5) Tương tự, chúng ta thấy rằng bài toán trong phát triển dân số ([62]) với $f(t,u)=\sigma u(u-\theta)(1-u)(0<\theta<1)$ cũng thỏa mãn (F2)–(F5).

2.3 Đánh giá ổn định cho phương trình parabolic nửa tuyến tính ngược thời gian với hệ số không phụ thuộc thời gian

Trong phần 2.1, chúng tôi đã đưa ra các đánh giá ổn định cho phương trình parabolic nửa tuyến tính ngược thời gian với hệ số phụ thuộc thời gian và nguồn Lipschitz địa phương. Từ các kết quả này chúng ta suy ra được các đánh giá ổn định cho phương trình parabolic nửa tuyến tính ngược thời gian với hệ số không phụ thuộc thời gian và nguồn Lipschitz toàn cục. Tuy nhiên, trong Định lý 2.1.2 và Định lý 2.1.7 để đưa ra đánh giá ổn định thì chúng tôi cần tới điều kiện bị chặn của nghiệm trên toàn miền $[0, T]$. Trong các Định lý 2.1.11, Định lý 2.1.14 và Định lý 2.1.15 để có đánh giá ổn định chỉ với điều kiện bị chặn của nghiệm tại $t = 0$ thì chúng tôi cần điều kiện hàm f thỏa mãn (F2), tức là $f(t, 0) = 0$. Do đó, mục đích của phần này là đưa ra đánh giá ổn định cho phương trình parabolic nửa tuyến tính ngược thời gian với hệ số không phụ thuộc thời gian và nguồn thỏa mãn điều kiện Lipschitz

$$\|f(t, w_1) - f(t, w_2)\| \leq k\|w_1 - w_2\|, \quad w_1, w_2 \in H, \tag{2.51}$$

với hằng số thực không âm k độc lập với t, w_1 và w_2, chỉ với điều kiện bị chặn của nghiệm tại $t = 0$.

Cho A là toán tử tuyến tính không bị chặn, xác định dương, tự liên hợp với miền xác định $D(A) \subset H$. Xét phương trình parabolic nửa tuyến tính ngược thời gian

$$\begin{cases} u_t + Au = f(t, u), \quad 0 < t \leq T, \\ \|u(T) - \varphi\| \leq \varepsilon \end{cases} \tag{2.52}$$

trong đó φ là dữ kiện cuối của bài toán được xác định qua đo đạc với mức nhiễu ε và nghiệm $u \in C^1((0, T), H) \cap C([0, T], H)$.

Bây giờ, chúng tôi trình bày các kết quả đánh giá ổn định.

Định lý 2.3.1. *Giả sử rằng u_1 và u_2 là các nghiệm của bài toán* (2.52) *và hàm f thỏa mãn điều kiện* (2.51). *Nếu $u_i(0) \in D(A)$, $i = 1, 2$ và*

$$\|u_i(0)\| \leq E, \quad i = 1, 2, \tag{2.53}$$

với $E > \varepsilon$, thì với mọi $t \in [0,T]$ ta có

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \le 2\varepsilon^{t/T} E^{1-t/T} \exp\left[\left(2k + \frac{1}{4}k^2(T+t)\right)\frac{t(T-t)}{T}\right]. \quad (2.54)$$

Chứng minh. Đặt $z(t) := u_1(t) - u_2(t)$, và $Bz := z_t + Az$. Ta có

$$\|Bz\| = \|z_t + Az\| = \|f(t,u_1) - f(t,u_2)\| \le k\|u_1 - u_2\| = k\|z\|. \quad (2.55)$$

Nếu $\|z(0)\| = 0$ thì $\|z(t)\| = 0$ với mọi $t \in [0,T]$. Thật vậy, đặt

$$h(t) = \|z(t)\|^2,\ t \in [0,T].$$

Ta có

$$\begin{aligned} h_t(t) &= 2\langle z, z_t\rangle = 2\langle z, -Az + Bz\rangle \\ &= -2\langle Az, z\rangle + 2\langle Bz, z\rangle \le 2\langle Bz, z\rangle \\ &\le 2\|Bz\|\|z\| \le 2k\|z\|^2 = 2kh(t). \end{aligned}$$

Điều này kéo theo $e^{-2kt}h(t) \le h(0)$ với mọi $t \in [0,T]$ hay $\|z(t)\| \le e^{kt}\|z(0)\|$ mọi $t \in [0,T]$. Vì $\|z(0)\| = 0$, nên $\|z(t)\| = 0$ với mọi $t \in [0,T]$. Do đó, nếu $\|z(0)\| = 0$ thì bất đẳng thức (2.54) đúng. Nếu $\|z(0)\| > 0$, thì theo tính duy nhất ngược [24, Định lý 1.1, trang 779], $\|z(t)\| > 0$ mọi $t \in [0,T]$.
Áp dụng Bổ đề 2.1.6, trong trường hợp $A(t) = A$, khi đó $c = c_1 = c_2 = 0$ và $c_5 = 1$, ta có

$$p(t) = \frac{d}{dt}\frac{\langle -Az, z\rangle}{\|z\|^2} + \frac{1}{2}k^2 \ge 0.$$

Hơn nữa

$$\frac{\langle -Az, z\rangle}{\|z\|^2} = -\lambda + \int_0^t p(s)ds - \frac{1}{2}k^2 t, \quad (2.56)$$

ở đây

$$\lambda = \frac{\langle Az(0), z(0)\rangle}{\|z(0)\|^2}.$$

Đặt $h(t) = \|z(t)\|^2,\ t \in [0,T]$. Ta có

$$h_t(t) = 2\langle z, z_t\rangle = 2\langle -Az, z\rangle + 2\langle Bz, z\rangle.$$

Do đó

$$\frac{h_t}{h} = 2\frac{\langle -Az, z\rangle}{\|z\|^2} + 2\frac{\langle Bz, z\rangle}{\|z\|^2}. \quad (2.57)$$

Từ (2.55), (2.56) và (2.57), ta có

$$\frac{h_t}{h} \leq -2\lambda + 2\int_0^t p(s)ds + 2k.$$

Lấy tích phân hai vế bất đẳng thức này từ 0 tới t, ta được

$$\ln h(t) - \ln h(0) \leq 2(k-\lambda)t + 2\int_0^t \left(\int_0^\tau p(s)ds\right) d\tau.$$

Do đó,

$$h(t) \leq h(0) \exp\left(2(k-\lambda)t + 2\int_0^t \left(\int_0^\tau p(s)ds\right) d\tau\right).$$

Điều này kéo theo

$$\|z(t)\| \leq \|z(0)\| \exp\left((k-\lambda)t + \int_0^t \left(\int_0^\tau p(s)ds\right) d\tau\right).$$

Do đó,

$$\begin{aligned} &\|z(t)\|^{1-\frac{t}{T}} \leq \|z(0)\|^{1-\frac{t}{T}} \\ &\times \exp\left((k-\lambda)\frac{t}{T}(T-t) + \left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t \left(\int_0^\tau p(s)ds\right) d\tau\right). \end{aligned} \tag{2.58}$$

Mặt khác, từ (2.55), (2.56) và (2.57), ta có

$$\frac{h_t}{h} \geq -2\lambda + 2\int_0^t p(s)ds - 2k - k^2 t.$$

Lấy tích phân hai vế bất đẳng thức này từ t tới T, ta được

$$\ln h(T) - \ln h(t) \geq -2(k+\lambda)(T-t) - \frac{1}{2}k^2(T^2-t^2) + 2\int_t^T \left(\int_0^\tau p(s)ds\right) d\tau,$$

hay

$$\begin{aligned} h(t) \leq h(T) \exp\Big\{ &2(k+\lambda)(T-t) + \frac{1}{2}k^2(T^2-t^2) \\ &- 2\int_t^T \left(\int_0^\tau p(s)ds\right) d\tau \Big\}. \end{aligned}$$

Điều này kéo theo

$$\begin{aligned} \|z(t)\| \leq \|z(T)\| \exp\Big\{ &(k+\lambda)(T-t) + \frac{1}{4}k^2(T^2-t^2) \\ &- \int_t^T \left(\int_0^\tau p(s)ds\right) d\tau \Big\}. \end{aligned}$$

Do đó,

$$\|z(t)\|^{\frac{t}{T}} \le \|z(T)\|^{\frac{t}{T}} \exp\Big\{(k+\lambda)\frac{t}{T}(T-t) + \frac{1}{4}k^2\frac{t}{T}(T^2-t^2) - \frac{t}{T}\int_t^T \Big(\int_0^\tau p(s)ds\Big)d\tau\Big\}. \tag{2.59}$$

Từ (2.58) và (2.59) suy ra

$$\|z(t)\| \le \|z(T)\|^{\frac{t}{T}}\|z(0)\|^{1-\frac{t}{T}} \exp\Big\{2k\frac{t}{T}(T-t) + \frac{1}{4}k^2\frac{t}{T}(T^2-t^2) + \Big(1-\frac{t}{T}\Big)\int_0^t \Big(\int_0^\tau p(s)ds\Big)d\tau - \frac{t}{T}\int_t^T \Big(\int_0^\tau p(s)ds\Big)d\tau\Big\}. \tag{2.60}$$

Sử dụng Bổ đề 2.1.4 với $\nu(t) = \dfrac{t}{T}$, ta đạt được

$$\begin{aligned}(1-\frac{t}{T})\int_0^t \Big(\int_0^\tau p(s)ds\Big)d\tau - \frac{t}{T}\int_t^T \Big(\int_0^\tau p(s)ds\Big)d\tau \\ = \int_0^t \Big(\int_0^\tau p(s)ds\Big)d\tau - \frac{t}{T}\int_0^T \Big(\int_0^\tau p(s)ds\Big)d\tau \le 0.\end{aligned} \tag{2.61}$$

Từ (2.60) và (2.61) suy ra rằng với mọi $t \in [0,T]$, ta có

$$\|z(t)\| \le \|z(T)\|^{\frac{t}{T}}\|z(0)\|^{(1-\frac{t}{T})} \exp\Big[\Big(2k + \frac{1}{4}k^2(T+t)\Big)\frac{t(T-t)}{T}\Big]. \tag{2.62}$$

Từ (2.62) và $\|z(0)\| \le 2E$, $\|z(T)\| \le 2\varepsilon$ ta đạt được khẳng định của định lý.

Định lý được chứng minh. □

Nhận xét 2.3.2. Với các phương trình tuyến tính ($f \equiv 0$), chúng ta có thể chọn $k = 0$, và từ định lý này chúng ta đạt được đánh giá ổn định

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \le 2\varepsilon^{t/T}E^{1-t/T}, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{2.63}$$

Đây là đánh giá ổn định có bậc tối ưu (xem [73, 74]).

Định lý 2.3.1 không đưa ra bất kỳ thông tin gì về sự phụ thuộc liên tục giữa các nghiệm của bài toán (2.52) tại $t = 0$ vào dữ kiện tại thời điểm cuối, vì điều kiện (2.53) là quá yếu. Để thiết lập sự phụ thuộc này, ta phải áp đặt các điều kiện mạnh hơn như định lý sau đây.

Định lý 2.3.3. *Giả sử rằng có một cơ sở trực chuẩn $\{\phi_i\}_{i\geqslant 1}$ trong H là các véctơ riêng tương ứng với các giá trị riêng $\{\lambda_i\}_{i\geqslant 1}$ của A sao cho $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ và $\lim\limits_{i\to+\infty} \lambda_i = +\infty$. Cho $f : [0, T] \times H \to H$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz (2.51), u_1 và u_2 là các nghiệm của bài toán (2.52) với $u_i(0) \in D(A),\ i = 1, 2$. Khi đó,*

i) Nếu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2\beta} \left\langle u_i(0), \phi_n \right\rangle^2 \leqslant E_1^2, i = 1, 2,\ \beta > 0 \tag{2.64}$$

với $E_1 > \varepsilon$ thì với mọi $t \in [0, T]$, tồn tại hàm bị chặn $C(t)$ sao cho

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \le C(t)\varepsilon^{t/T} E_1^{1-t/T} \left(\left(\ln \frac{E_1}{\varepsilon} \right)^{-\beta} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{E_1}} \right)^{1-t/T}. \tag{2.65}$$

ii) Nếu

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{2\gamma\lambda_n} \left\langle u_i(0), \phi_n \right\rangle^2 \leqslant E_2^2, i = 1, 2,\ \gamma > 0 \tag{2.66}$$

với $E_2 > \varepsilon$ thì với mọi $t \in [0, T]$, tồn tại hàm bị chặn $C_1(t)$ sao cho

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \le C_1(t)\varepsilon^{\frac{\gamma+t}{\gamma+T}} E_2^{1-\frac{\gamma+t}{\gamma+T}}. \tag{2.67}$$

Chứng minh. i) Ta có

$$u_i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{(T-t)\lambda_n} \left\langle u_i(T), \phi_n \right\rangle - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_n} \left\langle f(s, u_i(s)), \phi_n \right\rangle ds \right) \phi_n.$$

Đặt $z(t) = u_1(t) - u_2(t)$ và $Bz = z_t + Az$. Khi đó

$$z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{(T-t)\lambda_n} \left\langle z(T), \phi_n \right\rangle - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_n} \left\langle Bz, \phi_n \right\rangle ds \right) \phi_n.$$

Thay $t = 0$ ta được

$$z(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{T\lambda_n} \left\langle z(T), \phi_n \right\rangle - \int_0^T e^{s\lambda_n} \left\langle Bz, \phi_n \right\rangle ds \right) \phi_n.$$

Do đó

$$\left\langle z(0), \phi_n \right\rangle = e^{T\lambda_n} \left\langle z(T), \phi_n \right\rangle - \int_0^T e^{s\lambda_n} \left\langle Bz, \phi_n \right\rangle ds.$$

Đặt $n_1 = \min\left\{n \in \mathbb{N} : \lambda_n \geq \frac{1}{2T} \ln \dfrac{E_1}{\varepsilon}\right\}$. Khi đó với $\|z(T)\| \leq 2\varepsilon$ ta có

$$\begin{aligned}
\|z(0)\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle z(0), \phi_n\rangle^2 = \sum_{n=1}^{n_1-1} \langle z(0), \phi_n\rangle^2 + \sum_{n=n_1}^{\infty} \langle z(0), \phi_n\rangle^2 \\
&= \sum_{n=1}^{n_1-1} \left(e^{T\lambda_n} \langle z(T), \phi_n\rangle - \int_0^T e^{s\lambda_n} \langle Bz, \phi_n\rangle \, ds \right)^2 \\
&\quad + \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{\lambda_n^{2\beta}}{\lambda_n^{2\beta}} \langle z(0), \phi_n\rangle^2 \\
&\leq 2 \sum_{n=1}^{n_1-1} e^{2T\lambda_n} \langle z(T), \phi_n\rangle^2 + 2 \sum_{n=1}^{n_1-1} \left(\int_0^T e^{s\lambda_n} \langle Bz, \phi_n\rangle \, ds \right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{1}{2T} \ln \frac{E_1}{\varepsilon} \right)^{-2\beta} \sum_{n=n_1}^{\infty} \lambda_n^{2\beta} \langle z(0), \phi_n\rangle^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2\frac{E_1}{\varepsilon} \sum_{n=1}^{n_1-1} \langle z(T), \phi_n\rangle^2 + 2T \sum_{n=1}^{n_1-1} \int_0^T e^{2s\lambda_n} \langle Bz, \phi_n\rangle^2 \, ds \\
&\quad + 2 \left(\frac{1}{2T} \ln \frac{E_1}{\varepsilon} \right)^{-2\beta} \sum_{n=n_1}^{\infty} \lambda_n^{2\beta} \left(\langle u_1(0), \phi_n\rangle^2 + \langle u_2(0), \phi_n\rangle^2 \right) \\
&\leq 2\frac{E_1}{\varepsilon} \|z(T)\|^2 + 2T \int_0^T \left(\frac{E_1}{\varepsilon} \right)^{\frac{s}{T}} \|Bz\|^2 ds + 4 \left(\frac{1}{2T} \ln \frac{E_1}{\varepsilon} \right)^{-2\beta} E_1^2 \\
&\leq 8\varepsilon E_1 + 4 \left(\frac{1}{2T} \ln \frac{E_1}{\varepsilon} \right)^{-2\beta} E_1^2 + 2k^2 T \int_0^T \left(\frac{E_1}{\varepsilon} \right)^{\frac{s}{T}} \|z(s)\|^2 ds. \qquad (2.68)
\end{aligned}$$

Áp dụng Bổ đề 2.1.8 với $\nu(t) = \dfrac{t}{T}$, tồn tại hằng số $\widehat{c}$ sao cho

$$2k^2 T \int_0^T \left(\frac{E_1}{\varepsilon} \right)^{\frac{s}{T}} \|z(s)\|^2 ds \leq \frac{1}{2} \|z(0)\|^2 + \widehat{c} E_1 \varepsilon. \qquad (2.69)$$

Từ (2.68) và (2.69), tồn tại hằng số $\widehat{c}_1$ sao cho

$$\|z(0)\|^2 \leq \widehat{c}_1 E_1^2 \left(\left(\ln \frac{E_1}{\varepsilon} \right)^{-\beta} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{E_1}} \right)^2. \qquad (2.70)$$

Từ (2.70) và bất đẳng thức $\|z(T)\| \leqslant 2\varepsilon$, áp dụng Định lý 2.3.1 ta đạt được khẳng định trong phần i) của định lý.

ii) Đặt

$$n_2 = \min\left\{n \in \mathbb{N} : \lambda_n \geq \frac{1}{\gamma+T} \ln \frac{E_2}{\varepsilon}\right\}.$$

Tương tự như trong chứng minh phần i), ta có

$$\|z(0)\|^2 \leq 2\sum_{n=1}^{n_2-1} e^{2T\lambda_n}\langle z(T), \phi_n\rangle^2 + 2T\sum_{n=1}^{n_2-1}\int_0^T e^{2s\lambda_n}\langle Bz, \phi_n\rangle^2 ds + \sum_{n=n_2}^{\infty} \frac{e^{2\gamma\lambda_n}}{e^{2\gamma\lambda_n}}\langle z(0), \phi_n\rangle^2$$

$$\leq 2\left(\frac{E_2}{\varepsilon}\right)^{\frac{2T}{\gamma+T}} \|z(T)\|^2 + 2k^2T\int_0^T \left(\frac{E_2}{\varepsilon}\right)^{\frac{2s}{\gamma+T}} \|z(s)\|^2 ds + \left(\frac{\varepsilon}{E_2}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma+T}} \sum_{n=n_2}^{\infty} e^{2\gamma\lambda_n}\langle z(0), \phi_n\rangle^2$$

$$\leq 12\varepsilon^{\frac{2\gamma}{\gamma+T}} E_2^{\frac{2T}{\gamma+T}} + 2k^2T\int_0^T \left(\frac{E_2}{\varepsilon}\right)^{\frac{2s}{\gamma+T}} \|z(s)\|^2 ds. \tag{2.71}$$

Áp dụng Bổ đề 2.1.9 với $a(t) = 1$, ta kết luận rằng tồn tại hằng số $\widehat{c}_2$ sao cho

$$2k^2T\int_0^T \left(\frac{E_2}{\varepsilon}\right)^{\frac{2s}{\gamma+T}} \|z(s)\|^2 ds \leq \frac{1}{2}\|z(0)\|^2 + \widehat{c}_2 E_2^{\frac{2T}{\gamma+T}} \varepsilon^{\frac{2\gamma}{\gamma+T}}. \tag{2.72}$$

Từ (2.71) và (2.72), ta có

$$\|z(0)\|^2 \leq E_2^{\frac{2T}{\gamma+T}} \varepsilon^{\frac{2\gamma}{\gamma+T}} \left(24 + 2\widehat{c}_2\right). \tag{2.73}$$

Từ (2.73) và bất đẳng thức $\|z(T)\| \leqslant 2\varepsilon$, áp dụng Định lý 2.3.1 ta đạt được khẳng định trong phần ii) của định lý.

Định lý được chứng minh. □

Nhận xét 2.3.4. Đối với bài toán tuyến tính, chúng ta có thể chọn $k = 0$, và từ định lý trên chúng ta đạt được các đánh giá ổn định sau

i) Nếu điều kiện (2.64) được thỏa mãn với $E_1 > \varepsilon$, thì

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq C(t)E_1^{1-t/T}\left(\left(\ln\frac{E_1}{\varepsilon}\right)^{-\beta} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{E_1}}\right)^{1-t/T}, \ t \in [0,T].$$

Đánh giá này là đánh giá có bậc tối ưu (xem [73, 74]).

ii) Nếu điều kiện (2.66) được thỏa mãn với $E_2 > \varepsilon$ thì

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq C_1(t)\varepsilon^{\frac{\gamma+t}{\gamma+T}}E_2^{1-\frac{\gamma+t}{\gamma+T}}, \ \forall t \in [0,T].$$

Đây cũng là đánh giá ổn định có bậc tối ưu (xem [31]).

2.4 Chỉnh hóa phương trình parabolic nửa tuyến tính ngược thời gian bằng phương pháp Tikhonov có hiệu chỉnh

Trong phần này, ngoài các giả thiết (A1) và (A2), chúng tôi giả sử rằng $(A(t)+I))^{-1}$ là khả vi liên tục mạnh. Hơn nữa, $-A(t)$ sinh ra duy nhất hệ tiến hóa $U(t,s), 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ là một họ các toán tử tuyến tính bị chặn từ H vào chính nó với $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, liên tục theo hai biến và thỏa mãn các điều kiện [46, trang 52]:

(H1) $U(t,s)U(s,r) = U(t,r), U(s,s) = I$,

(H2) $\dfrac{\partial U(t,s)u}{\partial t} = -A(t)U(t,s)u$

(H3) $\dfrac{\partial U(t,s)u}{\partial s} = U(t,s)A(s)u.$

Định nghĩa 2.4.1. Một hàm $u : [0,T] \to H$ được gọi là *nghiệm* của phương trình

$$\begin{cases} u_t + A(t)u = f(t,u(t)), & 0 < t \leqslant T, \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.74}$$

nếu u là liên tục với mọi $t \in [0,T]$ và thỏa mãn phương trình tích phân

$$u(t) = U(t,0)u_0 + \int_0^t U(t,s)f(s,u)ds. \tag{2.75}$$

Nếu ánh xạ f là nửa liên tục[1](demi-continuous), biến các tập bị chặn thành các tập bị chặn và thỏa mãn điều kiện (F3) thì sự tồn tại nghiệm của phương trình (2.74) đã được chứng minh trong [46, Định lý 4]. Sự phụ thuộc liên tục và duy nhất nghiệm được suy ra từ (F3). Hơn nữa, từ (H2), nếu u thỏa mãn (2.75) thì $u \in C^1((0,T],H)$.

Chúng ta sẽ chỉnh hóa bài toán

$$\begin{cases} u_t + A(t)u = f(t,u), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ \|u(T) - \varphi\| \leqslant \varepsilon \end{cases} \tag{2.76}$$

bằng phương pháp Tikhonov có hiệu chỉnh.

Đặt $v(t)$ là nghiệm của bài toán

$$v_t + A(t)v = f(t,v), \quad 0 < t \leqslant T, \ v(0) = g \in D(A(t)). \tag{2.77}$$

Vì ánh xạ f là nửa liên tục, biến các tập bị chặn thành các tập bị chặn và thỏa mãn điều kiện (F3) nên bài toán (2.77) là đặt chỉnh. Để nhấn mạnh sự phụ thuộc của nghiệm v vào dữ kiện ban đầu g, chúng ta viết $v(t,g)$ thay vì $v(t)$. Nếu chúng ta có thể tìm thấy $g \in D(A(t))$ sao cho $\|v(T,g) - \varphi\| \leqslant \varepsilon$, thì bài toán (2.76) được giải quyết. Nếu điều kiện $\|u(0)\| \leqslant E$ được thỏa mãn, ánh xạ f là nửa liên tục, biến các tập bị chặn thành các tập bị chặn và thỏa mãn (F1) - (F3), ta xét cực tiểu phiếm hàm Tikhonov

$$J_\alpha(g) = \|v(T,g) - \varphi\|^2 + \alpha\|g\|^2 \tag{2.78}$$

với $g \in D(A(t))$ và α là tham số hiệu chỉnh. Tuy nhiên, như trong nhiều bài toán phi tuyến đặt không chỉnh khác, ta không biết được cực tiểu của bài toán này có tồn tại hay không. Do đó, chúng tôi đã hiệu chỉnh bằng cách chọn nghiệm gần đúng của cực tiểu phiếm hàm. Thật vậy, đặt

$$I = \inf_{g \in D(A(t))} J_\alpha(g), \tag{2.79}$$

và với $\tau > 0$ cố định chọn $\overline{g} \in D(A(t))$ sao cho

$$J_\alpha(\overline{g}) \leqslant I + \tau\varepsilon^2. \tag{2.80}$$

[1]Cho X và Y là các không gian Banach và f là một ánh xạ đơn trị từ X vào Y. Ánh xạ f được gọi là *nửa-liên tục* nếu $u_n \in D(f)$ và $u_n \to u \in D(f)$ suy ra $f(u_n) \rightharpoonup f(u)$ ([71]).

Bài toán (2.80) luôn có nghiệm. Thật vậy, chọn dãy (g_n) trong $D(A(t))$ sao cho $J(g_n) \leqslant I + \dfrac{1}{n}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Chọn $\overline{g} = g_{n_0}$ với $n_0 > \dfrac{1}{\tau\varepsilon^2}$, ta có $J(\overline{g}) \leqslant I + \tau\varepsilon^2$. Chúng tôi sẽ chứng minh rằng, nếu chọn α thích hợp thì nghiệm $v(t, \overline{g})$ là gần với nghiệm u của (2.76) và chúng tôi sẽ đưa ra đánh giá sai số dạng Hölder.

Hơn nữa, nếu điều kiện $\langle A(0)u(0), u(0)\rangle \leqslant E_1^2$ thỏa mãn, ánh xạ f là nửa liên tục, biến các tập bị chặn thành các tập bị chặn và thỏa mãn điều kiện (F2) - (F5), ta xét phiếm hàm Tikhonov

$$J_\beta(g) = \|v(T, g) - \varphi\|^2 + \beta \langle A(0)g, g\rangle, \quad \beta > 0, \tag{2.81}$$

trong đó β là tham số hiệu chỉnh. Đặt

$$I_1 = \inf_{g \in D(A(t))} J_\beta(g). \tag{2.82}$$

Với $\tau > 0$ cố định, chọn $\widetilde{g} \in D(A(t))$ sao cho

$$J_\beta(\widetilde{g}) \leqslant I_1 + \tau\varepsilon^2, \tag{2.83}$$

thì bài toán (2.83) luôn có nghiệm.

Định lý 2.4.2. *Giả sử rằng ánh xạ f là nửa liên tục, biến các tập bị chặn thành các tập bị chặn và thỏa mãn các điều kiện (F1)–(F3). Nếu bài toán (2.76) có nghiệm là $u(t)$ với $u(0) \in D(A(t))$ thỏa mãn*

$$\|u(0)\| \leqslant E,$$

và $v(t, \overline{g})$ là nghiệm của bài toán (2.77) với $g = \overline{g}$, thì với $\alpha = \left(\dfrac{\varepsilon}{E}\right)^2$ tồn tại hằng số C sao cho

$$\|u(t) - v(t, \overline{g})\| \leqslant C\varepsilon^{\nu(t)} E^{1-\nu(t)}, \quad t \in [0, T].$$

Chứng minh. Từ Định lý 2.1.11, tồn tại hằng số $\tilde{C} > 0$ sao cho với $t \in [0, T]$ ta có

$$\|u(t) - v(t, \overline{g})\| \leqslant \tilde{C}\|u(T) - v(T, \overline{g})\|^{\nu(t)}\|u(0) - v(0, \overline{g})\|^{1-\nu(t)}. \tag{2.84}$$

Từ $v(0, \overline{g}) = \overline{g}$ và (2.80) suy ra

$$\begin{aligned}\|v(T, \overline{g}) - \varphi\|^2 &\leqslant \|v(T, \overline{g}) - \varphi\|^2 + \alpha\|v(0, \overline{g})\|^2 \leqslant I + \tau\varepsilon^2 \\ &\leqslant \|u(T) - \varphi\|^2 + \alpha\|u(0)\|^2 + \tau\varepsilon^2 \leqslant \varepsilon^2 + \alpha E^2 + \tau\varepsilon^2.\end{aligned}$$

Chọn $\alpha = \left(\dfrac{\varepsilon}{E}\right)^2$, ta có $\|v(T,\overline{g}) - \varphi\| \leq \sqrt{2+\tau}\varepsilon$. Suy ra

$$\|u(T) - v(T,\overline{g})\| \leqslant \|u(T) - \varphi\| + \|v(T,\overline{g}) - \varphi\| \leqslant \left(1 + \sqrt{2+\tau}\right)\varepsilon. \tag{2.85}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}\alpha\|\overline{g}\|^2 &\leqslant \|v(T,\overline{g}) - \varphi\|^2 + \alpha\|\overline{g}\|^2 \leqslant I + \tau\varepsilon^2 \\ &\leqslant \|u(T) - \varphi\|^2 + \alpha\|u(0)\|^2 + \tau\varepsilon^2 \leqslant \varepsilon^2 + \alpha E^2 + \tau\varepsilon^2.\end{aligned}$$

Do đó, chọn $\alpha = \left(\dfrac{\varepsilon}{E}\right)^2$, ta có $\|\overline{g}\| \leqslant \sqrt{2+\tau}E$. Suy ra

$$\|u(0) - v(0,\overline{g})\| = \|u(0) - \overline{g}\| \leqslant \|u(0)\| + \|\overline{g}\| \leqslant \left(1 + \sqrt{2+\tau}\right)E. \tag{2.86}$$

Từ (2.84)–(2.86), tồn tại hằng số $C > 0$ sao cho

$$\|u(t) - v(t,\overline{g})\| \leqslant C\varepsilon^{\nu(t)}E^{1-\nu(t)},\ \forall t \in [0,T].$$

Định lý được chứng minh. □

Định lý 2.4.3. *Giả sử rằng ánh xạ f là nửa liên tục, biến các tập bị chặn thành các tập bị chặn, thỏa mãn điều kiện (F2)–(F5) và*

$$\langle A(0)u(0), u(0)\rangle \geqslant L_3\|u(0)\|^2$$

với $u(t)$ là nghiệm của phương trình $u_t + A(t)u = f(t,u),\ 0 < t \leqslant T$. Nếu bài toán (2.76) có nghiệm là $u(t)$ với $u(0) \in D(A(t))$ thỏa mãn

$$\langle A(0)u(0), u(0)\rangle \leqslant E_1^2$$

và $v(t,\widetilde{g})$ là nghiệm của bài toán (2.77) với $g = \widetilde{g}$, thì với $\beta = \left(\dfrac{\varepsilon}{E_1}\right)^2$ tồn tại hằng số C_1 sao cho

$$\|u(t) - v(t,\widetilde{g})\| \leq C_1\varepsilon^{\nu(t)}E_1^{1-\nu(t)}, \quad t \in [0,T].$$

Chứng minh. Từ (2.82) ta có

$$\begin{aligned}\langle A(0)\widetilde{g}, \widetilde{g}\rangle &\leqslant \frac{1}{\beta}\left(\|v(T,\widetilde{g}) - \varphi\| + \beta\langle A(0)\widetilde{g}, \widetilde{g}\rangle\right) \leqslant \frac{1}{\beta}\left(I_1 + \tau\varepsilon^2\right) \\ &\leqslant \frac{1}{\beta}\left(\|u(T) - \varphi\|^2 + \beta\langle A(0)u(0), u(0)\rangle + \tau\varepsilon^2\right) \\ &\leqslant \frac{1}{\beta}(\beta E_1^2 + (\tau+1)\varepsilon^2).\end{aligned} \tag{2.87}$$

Chọn $\beta = \left(\dfrac{\varepsilon}{E_1}\right)^2$, ta có $\langle A(0)\widetilde{g}, \widetilde{g}\rangle \leqslant (\tau+2)E_1^2$.
Từ $\langle A(0)\widetilde{g}, \widetilde{g}\rangle \leqslant (\tau+2)E_1^2$ và $\langle A(0)u(0), u(0)\rangle \leqslant E_1^2$, ta được

$$\|u(0)\|^2 \leqslant \frac{1}{L_3}\langle A(0)u(0), u(0)\rangle \leqslant \frac{1}{L_3}E_1^2 \tag{2.88}$$

và $\|\widetilde{g}\|^2 \leqslant \frac{1}{L_3}\langle A(0)\widetilde{g}, \widetilde{g}\rangle \leqslant \frac{1}{L_3}(\tau+2)E_1^2$. Mặt khác, vì $\beta = \left(\dfrac{\varepsilon}{E_1}\right)^2$ nên

$$\begin{aligned}
\|u(T) - v(T, \widetilde{g})\|^2 &\leqslant (\|u(T) - \varphi\| + \|v(T, \widetilde{g}) - \varphi\|)^2 \\
&\leqslant 2\|u(T) - \varphi\|^2 + 2\|v(T, \widetilde{g}) - \varphi\|^2 \\
&\leqslant 2\varepsilon^2 + 2I_1 + 2\tau\varepsilon^2 \\
&\leqslant 2(\tau+1)\varepsilon^2 + 2\|u(T) - \varphi\|^2 + 2\beta\langle A(0)u(0), u(0)\rangle \\
&\leqslant 2(\tau+3)\varepsilon^2.
\end{aligned} \tag{2.89}$$

Từ các bất đẳng thức $\langle A(0)\widetilde{g}, \widetilde{g}\rangle \leqslant (\tau+2)E_1^2$, $\langle A(0)u(0), u(0)\rangle \leqslant E_1^2$ và (2.88), (2.89), sử dụng Định lí 2.1.14, ta được

$$\|u(t) - v(t, \widetilde{g})\| \leqslant C_1\varepsilon^{\nu(t)}E_1^{1-\nu(t)}, \quad t \in [0, T].$$

Định lý được chứng minh. □

2.5 Kết luận Chương 2

Trong Chương 2, chúng tôi thu được các kết quả sau:
- Đưa ra các đánh giá ổn định nghiệm cho phương trình parabolic nửa tuyến tính ngược thời gian với hệ số phụ thuộc thời gian với các điều kiện khác nhau của hàm nguồn và các ràng buộc khác nhau của nghiệm (Định lý 2.1.2, Định lý 2.1.7, Định lý 2.1.11, Định lý 2.1.14 và Định lý 2.1.15). Đưa ra các ví dụ để minh họa cho lớp hàm thỏa mãn các giả thiết của toán tử $A(t)$ và hàm nguồn Lipschitz địa phương f.
- Đưa ra các đánh giá ổn định nghiệm cho phương trình parabolic nửa tuyến tính ngược thời gian với hệ số không phụ thuộc thời gian (Định lí 2.3.1 và Định lí 2.3.3).
- Chỉnh hóa phương trình parabolic nửa tuyến tính ngược thời gian với hệ số phụ thuộc thời gian bằng phương pháp Tikhonov có hiệu chỉnh (Định lý 2.4.2 và Định lý 2.4.3).

CHƯƠNG 3

ĐÁNH GIÁ ỔN ĐỊNH CHO PHƯƠNG TRÌNH BÜRGERS NGƯỢC THỜI GIAN

Trong chương này, chúng tôi đưa ra các đánh giá ổn định dạng Hölder cho phương trình Bürgers ngược thời gian. Các kết quả này là tổng quát hóa và cải tiến các kết quả của Carasso trong [14] và Ponomarev trong [64]. Cụ thể, chúng tôi đưa ra và chứng minh các kết quả đánh giá ổn định cho phương trình tổng quát hơn dưới các điều kiện yếu hơn so với các điều kiện được đặt ra bởi các tác giả kể trên. Các kết quả trong chương này đã được công bố trong bài báo:
Hào D. N., Duc N. V. and Thang N. V. (2015), Stability estimates for Burgers-type equations backward in time, *J. Inverse and Ill-Posed Problems* 23, 41-49.

Cho $T > 0$. Đặt

$$D = \{(x,t) : \ 0 < x < 1, \ 0 < t < T\}$$

và $\overline{D}$ là bao đóng của D.

Trong chương này, để đơn giản kí hiệu, ta viết $\|\cdot\|$ thay cho $\|\cdot\|_{L^2(0,1)}$.

3.1 Đánh giá ổn định cho phương trình Bürgers ngược thời gian với hệ số phụ thuộc thời gian

Trong mục này, chúng tôi đưa ra đánh giá ổn định cho phương trình Bürgers với hệ số phụ thuộc thời gian sau

$$u_t = (a(x,t)u_x)_x - d(x,t)uu_x + f(x,t), \quad (x,t) \in D, \tag{3.1}$$

$$u(0,t) = g_0(t), \quad u(1,t) = g_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3.2}$$

trong đó $a(x,t)$, $d(x,t)$, $g_0(t)$, $g_1(t)$, $f(x,t)$ là các hàm trơn,

$$a(x,t) \geqslant \overline{a} > 0, (x,t) \in \overline{D}$$

và các hàm $a_t(x,t)$, $d(x,t)$, $d_x(x,t)$ bị chặn trên $\overline{D}$.

Định lý 3.1.1. *Giả sử* $u_1(x,t)$ *và* $u_2(x,t)$ *là hai nghiệm cổ điển của bài toán* (3.1),(3.2) *thỏa mãn*

$$\max_{(x,t)\in\overline{D}} \{|u_i(x,t)|, |u_{ix}(x,t)|\} \leqslant E,\ i = 1, 2. \tag{3.3}$$

Đặt

$$m = \max_{(x,t)\in\overline{D}} \frac{a_t(x,t) + 2(dE)^2}{a(x,t)}$$

và

$$\mu(t) = \frac{t}{T} \text{ nếu } m = 0, \quad \mu(t) = \frac{e^{mt} - 1}{e^{mT} - 1} \text{ nếu } m \neq 0. \tag{3.4}$$

Nếu $\|u_1(\cdot,T) - u_2(\cdot,T)\| \leqslant \delta$, *thì tồn tại hàm bị chặn* $k_1(t)$ *sao cho*

$$\|u_1(\cdot,t) - u_2(\cdot,t)\| \leqslant k_1(t)\delta^{\mu(t)}E^{1-\mu(t)},\ \forall t \in [0,T]. \tag{3.5}$$

Chứng minh. Đặt $z = u_1 - u_2$. Từ (3.1) ta có

$$\begin{aligned} z_t &= (az_x)_x - du_1z_x - du_{2x}z \\ &= (az_x)_x - du_2z_x - du_{1x}z. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{cases} z_t = (az_x)_x - \dfrac{1}{2}d(u_1 + u_2)z_x - \dfrac{1}{2}d(u_{1x} + u_{2x})z,\ (x,t) \in D, \\ z(0,t) = z(1,t) = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T. \end{cases} \tag{3.6}$$

Đặt

$$p(x,t) = \frac{1}{2}\left(u_1(x,t) + u_2(x,t)\right).$$

Ta có

$$\begin{cases} z_t = (az_x)_x - dpz_x - dp_xz,\ (x,t) \in D, \\ z(0,t) = z(1,t) = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T. \end{cases} \tag{3.7}$$

Giả sử $\|z(\cdot,t)\| > 0$ với mọi $t \in [0,T]$. Đặt

$$h(t) = \frac{\int_0^1 (pd_x - dp_x) z^2 dx}{\int_0^1 z^2 dx},\ t \in [0,T].$$

Từ điều kiện (3.3) ta có

$$\max_{(x,t)\in\overline{D}} \{|p|, |p_x|\} \leqslant E. \tag{3.8}$$

Do đó

$$|pd_x - dp_x| \leqslant E\left(|d| + |d_x|\right) \leqslant E_1,\ \forall (x,t) \in \overline{D}.$$

Từ bất đẳng thức này suy ra $|h(t)| \leqslant E_1$ với mọi $t \in [0,T]$.

Đặt $v(x,t) = z(x,t) \exp\left(\frac{1}{2}\int_t^T h(s)ds\right)$. Ta có

$$\begin{cases} v_t = (av_x)_x - dpv_x - dp_x v - \frac{1}{2}h(t)v,\ (x,t) \in D, \\ v(0,t) = v(1,t) = 0, \quad t \in [0,T]. \end{cases} \tag{3.9}$$

Đặt $F(t) = \|v(\cdot,t)\|^2 = \int_0^1 v^2 dx,\ t \in [0,T]$. Ta có

$$\begin{aligned} F'(t) &= 2\int_0^1 vv_t dx = 2\int_0^1 v\left((av_x)_x - dpv_x - dp_x v - \frac{1}{2}h(t)v\right) dx \\ &= 2\int_0^1 v(av_x)_x dx - 2\int_0^1 pdvv_x dx - 2\int_0^1 dp_x v^2 dx - \int_0^1 h(t)v^2 dx \\ &= -2\int_0^1 av_x^2 dx + \int_0^1 (pd_x - dp_x)v^2 dx - \int_0^1 h(t)v^2 dx. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned} \int_0^1 h(t)v^2 dx &= \frac{\int_0^1 (pd_x - dp_x)z^2 dx}{\int_0^1 z^2 dx} \int_0^1 z^2 \exp\left(\int_t^T h(s)ds\right) dx \\ &= \int_0^1 (pd_x - dp_x) z^2 \exp\left(\int_t^T h(s)ds\right) dx \\ &= \int_0^1 (pd_x - dp_x) v^2 dx. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Từ (3.10) và (3.11) ta có $F'(t) = -2\int_0^1 av_x^2 dx$. Do đó

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = \frac{-2\int_0^1 av_x^2 dx}{\int_0^1 v^2 dx}. \tag{3.12}$$

Đặt $\varphi = -dpv_x - dp_x v - \dfrac{1}{2}h(t)v$, ta có

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\int_0^1 v^2dx\right)^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{F'(t)}{F(t)}\right)\\
&= -\left(\int_0^1 a_t v_x^2 dx + 2\int_0^1 a v_x v_{xt} dx\right)\int_0^1 v^2dx\\
&\quad + 2\int_0^1 a v_x^2 dx \int_0^1 v v_t dx\\
&= 2\int_0^1 (av_x)_x v_t dx \int_0^1 v^2 dx - \int_0^1 a_t v_x^2 dx \int_0^1 v^2 dx\\
&\quad - 2\int_0^1 (av_x)_x v dx \int_0^1 v\left((av_x)_x + \varphi\right)dx\\
&= 2\int_0^1 (av_x)_x\left((av_x)_x + \varphi\right)dx \int_0^1 v^2dx - \int_0^1 a_t v_x^2 dx \int_0^1 v^2 dx\\
&\quad - 2\int_0^1 (av_x)_x v dx \left(\int_0^1 (av_x)_x v dx + \int_0^1 v\varphi dx\right)\\
&= 2\int_0^1 \left((av_x)_x + \frac{1}{2}\varphi\right)^2 dx \int_0^1 v^2dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi^2 dx \int_0^1 v^2 dx\\
&\quad - \int_0^1 a_t v_x^2 dx \int_0^1 v^2 dx - 2\left(\int_0^1 \left((av_x)_x + \frac{1}{2}\varphi\right) v dx\right)^2\\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \varphi v dx\right)^2.
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$
\int_0^1 v^2 dx \int_0^1 \left((av_x)_x + \frac{\varphi}{2}\right)^2 dx - \left(\int_0^1 \left((av_x)_x + \frac{\varphi}{2}\right) v dx\right)^2 \geqslant 0. \tag{3.14}
$$

Từ (3.13) và (3.14), dẫn đến

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\int_0^1 v^2dx\right)^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{F'(t)}{F(t)}\right)\\
&\geqslant -\left(\int_0^1 a_t v_x^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi^2 dx\right)\int_0^1 v^2 dx.
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Hơn nữa,

$$
\begin{aligned}
\varphi^2 &\leqslant 2(pd)^2 v_x^2 + 2\left(dp_x - \frac{1}{2}h(t)\right)^2 v^2 \\
&\leqslant 2(pd)^2 v_x^2 + 4\left((dp_x)^2 + \frac{1}{4}\left(h(t)\right)^2\right) v^2 \\
&\leqslant 2(pd)^2 v_x^2 + \left(4\left(dp_x\right)^2 + E_1^2\right) v^2 \\
&\leqslant 2(Ed)^2 v_x^2 + E_2 v^2. \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

Từ (3.15) và (3.16) suy ra

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{F'(t)}{F(t)}\right) &\geqslant \frac{-2\int_0^1 \left(a_t + 2(Ed)^2\right) v_x^2 dx}{\int_0^1 v^2 dx} - 2E_2 \\
&\geqslant \frac{-2\int_0^1 \left(\dfrac{a_t + 2(Ed)^2}{a}\right) a v_x^2 dx}{\int_0^1 v^2 dx} - 2E_2 \\
&\geqslant \frac{-2m\int_0^1 a v_x^2 dx}{\int_0^1 v^2 dx} - 2E_2. \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

Từ (3.12) và (3.17) ta kết luận rằng

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{F'(t)}{F(t)}\right) \geqslant m\frac{F'(t)}{F(t)} - 2E_2. \qquad (3.18)
$$

Nếu $m = 0$ thì

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{F'(t)}{F(t)}\right) \geqslant -2E_2. \qquad (3.19)
$$

Vì vậy, $\ln F(t) + E_2 t^2$ là hàm lồi theo biến t. Do đó, ta có

$$
\ln F(t) + E_2 t^2 \leqslant \left(1 - \frac{t}{T}\right)\ln F(0) + \frac{t}{T}\left(\ln F(T) + E_2 T^2\right),\ t \in [0, T],
$$

hay

$$
F(t) \leqslant F(0)^{1-\frac{t}{T}} F(T)^{\frac{t}{T}} \exp\left(E_2 t(T-t)\right),\ t \in [0, T].
$$

Từ đây suy ra

$$
\|v(\cdot, t)\| \leqslant \|v(\cdot, 0)\|^{1-\frac{t}{T}} \|v(\cdot, T)\|^{\frac{t}{T}} \exp\left(\frac{1}{2}E_2 t(T-t)\right),\ t \in [0, T].
$$

Vì $v = z\exp\left(\frac{1}{2}\int_t^T h(s)ds\right)$ và $|h(t)| \leqslant E_1$ với mọi $t \in [0,T]$ nên ta có

$$\|z(\cdot,t)\| \leqslant \|z(\cdot,0)\|^{1-\frac{t}{T}}\|z(\cdot,T)\|^{\frac{t}{T}}\exp\left(E_1(T-t)+\frac{1}{2}E_2t(T-t)\right). \tag{3.20}$$

Nếu $m \neq 0$ thì $\mu(t) = \dfrac{e^{mt}-1}{e^{mT}-1},\ t \in [0,T]$. Do đó

$$t = \frac{1}{m}\ln\Big(1+\mu(t)\big(e^{mT}-1\big)\Big).$$

Suy ra

$$F(t) = F\Big(\frac{1}{m}\ln\Big(1+\mu(t)\big(e^{mT}-1\big)\Big)\Big) = \tilde{F}(\mu),\ \forall t \in [0,T].$$

Ta có

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = m\frac{e^{mt}}{e^{mT}-1}\frac{\frac{d}{d\mu}\tilde{F}(\mu)}{\tilde{F}(\mu)}. \tag{3.21}$$

Từ đẳng thức (3.21) dẫn đến

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{F'(t)}{F(t)}\right) = \left(\frac{me^{mt}}{e^{mT}-1}\right)^2\frac{d}{d\mu}\left(\frac{\frac{d}{d\mu}\tilde{F}(\mu)}{\tilde{F}(\mu)}\right) + \frac{m^2e^{mt}}{e^{mT}-1}\frac{\frac{d}{d\mu}\tilde{F}(\mu)}{\tilde{F}(\mu)}. \tag{3.22}$$

Từ (3.21) và (3.22), ta đạt được

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{F'(t)}{F(t)}\right) = m\frac{F'(t)}{F(t)} + \left(m\frac{e^{mt}}{e^{mT}-1}\right)^2\frac{d}{d\mu}\left(\frac{\frac{d}{d\mu}\tilde{F}(\mu)}{\tilde{F}(\mu)}\right). \tag{3.23}$$

Từ (3.18) và (3.23), ta có

$$\frac{d}{d\mu}\left(\frac{\frac{d}{d\mu}\tilde{F}(\mu)}{\tilde{F}(\mu)}\right) \geqslant -2E_2\left(m\frac{e^{mt}}{e^{mT}-1}\right)^{-2} \geqslant -2E_2\frac{\big(e^{mT}-1\big)^2e^{2|m|T}}{m^2}. \tag{3.24}$$

Đặt $E_4 = E_2\dfrac{\left(e^{mT}-1\right)^2 e^{2|m|T}}{m^2}$. Từ (3.24) ta thấy $\ln\tilde{F}(\mu)+E_4\mu^2$ là hàm lồi đối với μ. Do đó, ta có

$$\ln\tilde{F}(\mu)+E_4\mu^2 \leqslant (1-\mu)\ln F(0)+\mu\left(\ln F(T)+E_4\right),\ t\in[0,T],$$

hay

$$\begin{aligned}F(t) &\leqslant F(0)^{1-\mu(t)}F(T)^{\mu(t)}\exp\left(E_4\mu(t)(1-\mu(t))\right)\\ &\leqslant F(0)^{1-\mu(t)}F(T)^{\mu(t)}\exp(E_4),\ t\in[0,T].\end{aligned}$$

Điều này dẫn đến

$$\|v(\cdot,t)\| \leqslant \|v(\cdot,0)\|^{1-\mu(t)}\|v(\cdot,T)\|^{\mu(t)}\exp\left(\frac{1}{2}E_4\right).$$

Vì $v(x,t)=z(x,t)\exp\left(\frac{1}{2}\int_t^T h(s)ds\right)$ và $|h(t)|\leqslant E_1$ với mọi $t\in[0,T]$, ta có

$$\|z(\cdot,t)\| \leqslant \|z(\cdot,0)\|^{1-\mu(t)}\|z(\cdot,T)\|^{\mu(t)}\exp\left(\frac{1}{2}E_4+E_1(T-\frac{t}{2})\right),\ \forall t\in[0,T]. \tag{3.25}$$

Hơn nữa, vì $\|z(\cdot,T)\|\leqslant\delta$ và $\|z(\cdot,0)\|\le 2E$ nên tồn tại hàm bị chặn $k_1(t)$ sao cho

$$\|u_1(\cdot,t)-u_2(\cdot,t)\|_{L^2} \leqslant k_1(t)\delta^{\mu(t)}E^{1-\mu(t)},\ \forall t\in[0,T]. \tag{3.26}$$

Bây giờ, ta xét trường hợp khi $\|z(\cdot,t)\|$ có thể triệt tiêu. Nếu $\|z(\cdot,0)\|=0$, thì $\|z(\cdot,t)\|=0$ với mọi $t\in[0,T]$. Thật vậy, đặt $h(t)=\|z(\cdot,t)\|^2,\ t\in[0,T]$. Ta có

$$\begin{aligned}h_t(t) &= 2\int_0^1 zz_t dx = -2\int_0^1 az_x^2dx+\int_0^1\left(pd_x-dp_x\right)z^2dx\\ &\leqslant \int_0^1 E\left(|d_x|+|d|\right)z^2dx \leqslant E_1\int_0^1 z^2dx = E_1h(t).\end{aligned}$$

Điều này kéo theo $e^{-E_1t}h(t)\leqslant h(0),\ t\in[0,T]$ hay

$$\|z(\cdot,t)\|^2 \leqslant e^{E_1t}\|z(\cdot,0)\|^2,\ \forall t\in[0,T].$$

Vì $\|z(\cdot,0)\|=0$ nên $\|z(\cdot,t)\|=0$ với mọi $t\in[0,T]$. Do đó, nếu $\|z(\cdot,0)\|=0$ thì bất đẳng thức (3.5) đúng. Nếu $\|z(\cdot,0)\|>0$, thì $\|z(\cdot,t)\|>0,\ t\in[0,T]$.

Thật vậy, giả sử ngược lại, gọi t_0 là điểm bé nhất mà $\|z(\cdot, t_0)\| = 0$. Do đó $\|z(\cdot, t)\| > 0$ với $0 \leqslant t \leqslant s < t_0$. Sử dụng đánh giá ổn định (3.26) với T được thay thế bởi $s < t_0$ và cho $s \uparrow t_0$ ta đạt được mâu thuẫn.
Định lý được chứng minh. $\square$

Nhận xét 3.1.2.
i) Nếu $m < 0$, thì $\mu(t) > \dfrac{t}{T},\ t \in (0, T)$.
ii) Trong [64], Ponomarev đã xét bài toán

$$
\begin{aligned}
&u_t = a(t)u_{xx} + b(x,t)uu_x + c(x,t)u_x + d(x,t)u + f(x,t), \quad (x,t) \in D,\\
&u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad 0 < t < T,
\end{aligned}
$$

với $a(t) > 0$. Để có kết quả đánh giá ổn định, Ponomarev cần điều kiện

$$
\begin{aligned}
\sup_{(x,t)\in\overline{D}} \Big\{&|u_i(x,t)|, |u_{ix}(x,t)|, |u_{it}(x,t)|, |u_{ixx}(x,t)|,\\
&|u_{itt}(x,t)|, |u_{ixt}(x,t)|\Big\} \le N,\ i = 1, 2. \qquad (3.27)
\end{aligned}
$$

Chúng tôi xét bài toán tổng quát hơn của Ponomarev, hơn nữa điều kiện (3.3) của chúng tôi yếu hơn nhiều so với điều kiện (3.27) của Ponomarev.

3.2 Đánh giá ổn định cho phương trình Bürgers ngược thời gian với hệ số không phụ thuộc thời gian

Trong mục này, chúng tôi đưa ra đánh giá ổn định cho phương trình Bürgers ngược thời gian với hệ số không phụ thuộc thời gian. Kết quả này là tổng quát hóa và cải tiến kết quả của Carasso trong [14].

Định lý 3.2.1. *Giả sử $u_1(x,t)$ và $u_2(x,t)$ là các nghiệm cổ điển của bài toán*

$$u_t = \nu u_{xx} - \alpha u u_x + f(x,t), \quad (x,t) \in D, \qquad (3.28)$$

$$u(0,t) = g_0(t), \quad u(1,t) = g_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \qquad (3.29)$$

ở đây $\nu > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, và g_0, g_1, f là các hàm trơn. Nếu $u_1,\ u_2$ thỏa mãn

$$\max_{(x,t)\in\overline{D}} \{|u_i(x,t)|, |u_{ix}(x,t)|, |u_{it}(x,t)|\} \leqslant E,\ i = 1, 2 \qquad (3.30)$$

và $\|u_1(\cdot,T)-u_2(\cdot,T)\| \leqslant \delta$, *thì tồn tại hàm bị chặn* $k_2(t)$ *sao cho*

$$\|u_1(\cdot,t)-u_2(\cdot,t)\| \leqslant k_2(t)\delta^{\frac{t}{T}}E^{1-\frac{t}{T}}, \quad t\in[0,T]. \tag{3.31}$$

Chứng minh Định lý 3.2.1

Ta cần kết quả bổ trợ sau.

Bổ đề 3.2.2. ([14]) *Giả sử* $u(x,t)$ *là một nghiệm của phương trình*

$$\begin{cases} u_t = \nu u_{xx} - b(x,t)u_x - d(x,t)u, & (x,t)\in D, \\ u(0,t)=u(1,t)=0, & t\in[0,T], \end{cases} \tag{3.32}$$

ở đây $b(x,t)$ *và* $d(x,t)$ *là các hàm trơn. Đặt* $B(x,t)=\int\limits_0^x b(s,t)ds$ *và*

$$z(x,t)=u(x,t)\exp\left(\frac{-B(x,t)}{2\nu}\right).$$

Khi đó $z(x,t)$ *thỏa mãn*

$$\begin{cases} z_t = \nu z_{xx} - \left(\frac{b^2+2B_t}{4\nu}+d-\frac{b_x}{2}\right)z, & (x,t)\in D, \\ z(0,t)=z(1,t)=0, & t\in[0,T]. \end{cases} \tag{3.33}$$

Bây giờ, ta chứng minh Định lý 3.2.1.

Đặt $z=u_1-u_2$. Ta có $z_t=\nu z_{xx}-\alpha p z_x-\alpha p_x z$ với $p(x,t)=\dfrac{u_1(x,t)+u_2(x,t)}{2}$ và $z(0,t)=z(1,t)=0, t\in[0,T]$. Giả sử $\|z(\cdot,t)\|>0$ với mọi $t\in[0,T]$. Đặt $P(x,t)=\alpha\int_0^x p(s,t)ds$ và

$$v(x,t)=z(x,t)\exp\left(-\frac{P(x,t)}{2\nu}\right).$$

Ta có $\|v(t)\|>0,\ t\in[0,T]$. Từ Bổ đề 3.2.2, ta khẳng định rằng $v(x,t)$ là nghiệm của bài toán

$$\begin{cases} v_t=\nu v_{xx}-\left(\dfrac{\alpha^2p^2+2P_t}{4\nu}+\dfrac{\alpha p_x}{2}\right)v, & (x,t)\in D, \\ v(0,t)=v(1,t)=0,\ 0\leqslant t\leqslant T. \end{cases} \tag{3.34}$$

Đặt $Q=\dfrac{\alpha^2p^2+2P_t}{4\nu}+\dfrac{\alpha p_x}{2}$. Vì $\max\limits_{(x,t)\in\overline{D}}\{|p|,|p_x|,|p_t|\}\leqslant E$ nên

$$|Q|\leqslant E_3,\ \forall (x,t)\in\overline{D}$$

và

$$\begin{cases} v_t = \nu v_{xx} - Qv, \quad (x,t) \in D, \\ v(0,t) = v(1,t) = 0, \ 0 \leqslant t \leqslant T. \end{cases} \tag{3.35}$$

Đặt $h(t) = \dfrac{\int_0^1 Qv^2dx}{\int_0^1 v^2dx}, \ 0 \leqslant t \leqslant T$. Ta có $\max\limits_{t\in[0,T]} |h(t)| \leqslant E_3$. Đặt

$$\omega(x,t) = v(x,t) \exp\left(\int_0^t h(s)ds\right).$$

Ta có

$$\omega_t = \nu\omega_{xx} - Q\omega + h(t)\omega, \tag{3.36}$$

và

$$\omega(0,t) = \omega(1,t) = 0, \ 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Đặt $F(t) = \|\omega(\cdot,t)\|^2 = \int_0^1 \omega^2 dx, \ t \in [0,T]$. Ta có

$$\begin{aligned} F'(t) &= 2\int_0^1 \omega\omega_t dx = 2\int_0^1 \omega(\nu\omega_{xx} - Q\omega + h(t)\omega)dx \\ &= -2\nu\int_0^1 \omega_x^2 dx - 2\int_0^1 Q\omega^2 dx + 2h(t)\int_0^1 \omega^2 dx. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Mặt khác,

$$h(t)\int_0^1 \omega^2 dx = \frac{\int_0^1 Qv^2dx}{\int_0^1 v^2dx}\int_0^1 v^2 \exp\left(2\int_0^t h(s)ds\right)dx = \int_0^1 Q\omega^2 dx. \tag{3.38}$$

Từ (3.37) và (3.38) dẫn đến

$$F'(t) = -2\nu\int_0^1 \omega_x^2 dx. \tag{3.39}$$

Do đó

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = -2\nu\frac{\int_0^1 \omega_x^2 dx}{\int_0^1 \omega^2 dx}. \tag{3.40}$$

Đặt $\varphi = -(Q - h(t))\omega$. Từ (3.40) ta có

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\nu}\left(\int_0^1 \omega^2 dx\right)^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{F'(t)}{F(t)}\right) \\
&= \left(\int_0^1 \omega^2 dx\right)^2 \frac{d}{dt}\left(-\frac{\int_0^1 \omega_x^2 dx}{\int_0^1 \omega^2 dx}\right) \\
&= -2\int_0^1 \omega^2 dx \int_0^1 \omega_x \omega_{xt} dx + 2\int_0^1 \omega_x^2 dx \int_0^1 \omega\omega_t dx \\
&= 2\int_0^1 \omega^2 dx \int_0^1 \omega_{xx}\omega_t dx - 2\int_0^1 \omega\omega_{xx} dx \int_0^1 \omega\omega_t dx \\
&= 2\int_0^1 \omega^2 dx \int_0^1 \omega_{xx}(\nu\omega_{xx} + \varphi) dx - 2\int_0^1 \omega\omega_{xx} dx \int_0^1 \omega(\nu\omega_{xx} + \varphi) dx \\
&= 2\int_0^1 \omega^2 dx \int_0^1 \omega_{xx}(\nu\omega_{xx} + \varphi) dx \\
&\quad - 2\int_0^1 \omega\omega_{xx} dx \left(\int_0^1 \nu\omega\omega_{xx} dx + \int_0^1 \varphi\omega dx\right) \\
&= 2\int_0^1 \omega^2 dx \int_0^1 \left(\sqrt{\nu}\omega_{xx} + \frac{1}{2\sqrt{\nu}}\varphi\right)^2 dx - \frac{1}{2\nu}\int_0^1 \omega^2 dx \int_0^1 \varphi^2 dx \\
&\quad - 2\left(\int_0^1 \left(\sqrt{\nu}\omega_{xx} + \frac{1}{2\sqrt{\nu}}\varphi\right)\omega dx\right)^2 + \frac{1}{2\nu}\left(\int_0^1 \varphi\omega dx\right)^2. \qquad (3.41)
\end{aligned}
$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz,

$$
\int_0^1 \omega^2 dx \int_0^1 \left(\sqrt{\nu}\omega_{xx} + \frac{1}{2\sqrt{\nu}}\varphi\right)^2 dx \geq \left(\int_0^1 \left(\sqrt{\nu}\omega_{xx} + \frac{1}{2\sqrt{\nu}}\varphi\right)\omega dx\right)^2. \tag{3.42}
$$

Do đó từ (3.41) và (3.42) ta được

$$
\frac{1}{2\nu}\left(\int_0^1 \omega^2 dx\right)^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{F'(t)}{F(t)}\right) \geqslant -\frac{1}{2\nu}\int_0^1 \omega^2 dx \int_0^1 \varphi^2 dx. \tag{3.43}
$$

Mặt khác,

$$
\varphi^2 = (Q - h(t))^2 \omega^2 \leqslant 4E_3^2\omega^2. \tag{3.44}
$$

Từ (3.43) và (3.44) suy ra

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{F'(t)}{F(t)}\right) \geqslant -4E_3^2. \tag{3.45}
$$

Từ (3.45) ta thấy rằng $\ln F(t) + 2E_3^2t^2$ là hàm lồi đối với t. Do đó, ta có

$$\ln F(t) + 2E_3^2t^2 \leqslant \left(1 - \frac{t}{T}\right)\ln F(0) + \frac{t}{T}\left(\ln F(T) + 2E_3^2T^2\right), \ \forall t \in [0,T].$$

Điều này kéo theo

$$F(t) \leqslant F(0)^{1-\frac{t}{T}}F(T)^{\frac{t}{T}}\exp\left(2E_3^2t(T-t)\right)$$

hay

$$\|\omega(\cdot,t)\| \leqslant \|\omega(\cdot,0)\|^{1-\frac{t}{T}}\|\omega(\cdot,T)\|^{\frac{t}{T}}\exp\left(E_3^2t(T-t)\right). \tag{3.46}$$

Vì $\omega(x,t) = v(x,t)\exp\left(\int_0^t h(s)ds\right)$ và $|h(t)| \leqslant E_3$ với mọi $t \in [0,T]$ nên

$$\|v(\cdot,t)\| \leqslant \|v(\cdot,0)\|^{1-\frac{t}{T}}\|v(\cdot,T)\|^{\frac{t}{T}}\exp\left(2E_3t + E_3^2t(T-t)\right). \tag{3.47}$$

Từ $v(x,t) = z(x,t)\exp\left(-\dfrac{P}{2\nu}\right)$ và $\max\limits_{(x,t)\in\overline{D}}|P| \leqslant |\alpha|E$ ta khẳng định rằng

$$\|z(\cdot,t)\| \leqslant \|z(\cdot,0)\|^{1-\frac{t}{T}}\|z(\cdot,T)\|^{\frac{t}{T}}\exp\left(\frac{|\alpha|E}{\nu} + 2E_3t + E_3^2t(T-t)\right). \tag{3.48}$$

Mặt khác, ta có

$$\|z(T)\| = \|u_1(T) - u_2(T)\| \leqslant \delta, \tag{3.49}$$

và

$$\|z(0)\| = \|u_1(0) - u_2(0)\| \leqslant \|u_1(0)\| + \|u_2(0)\| \leqslant 2E. \tag{3.50}$$

Từ (3.48), (3.49) và (3.50) suy ra tồn tại hàm bị chặn $k_2(t)$ sao cho

$$\|u_1(\cdot,t) - u_2(\cdot,t)\|_{L^2} \leqslant k_2(t)\delta^{\frac{t}{T}}N^{1-\frac{t}{T}}, \ \forall t \in [0,T]. \tag{3.51}$$

Trường hợp tồn tại $t_0 \in [0,T]$ sao cho $\|z(\cdot,t_0)\| = 0$ được xử lý tương tự như trong chứng minh Định lý 3.1.1.

Định lý được chứng minh. □

Nhận xét 3.2.3. Trong [14], Carasso chỉ xét bài toán (3.28) trong trường hợp $\alpha = 1$. Hơn nữa, để có đánh giá ổn định tương tự (3.31), Carasso cần điều kiện

$$\max_{(x,t)\in\overline{D}}\{|u_i|, |u_{it}|, |u_{itt}|, |u_{ixt}|\} \leq N, \ i = 1,2. \tag{3.52}$$

Chúng tôi xét bài toán (3.28) cho số thực α bất kỳ. Hơn nữa, điều kiện (3.30) của chúng tôi là yếu hơn điều kiện (3.52) của Carasso.

3.3 Kết luận Chương 3

Trong Chương 3, chúng tôi đã thu được các kết quả sau:
- Đưa ra đánh giá ổn định dạng Hölder cho phương trình Bürgers ngược thời gian với hệ số phụ thuộc thời gian (Định lý 3.1.1).
- Đưa ra đánh giá ổn định dạng Hölder cho phương trình Bürgers ngược thời gian với hệ số không phụ thuộc thời gian (Định lý 3.2.1).

CHƯƠNG 4

CHỈNH HÓA PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC BẬC PHÂN THỨ NGƯỢC THỜI GIAN

Xét bài toán sau trong không gian $\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \dfrac{d^\gamma u}{dt^\gamma} = \Delta u, \ x \in \mathbb{R}^n, t \in (0,T) \\ u(x,T) = \varphi(x), \ x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{4.1}$$

trong đó $0 < \gamma < 1$, φ là dữ kiện cuối chính xác của bài toán nhưng ta không được biết mà chỉ biết dữ kiện nhiễu (qua đo đạc) φ^ε với mức sai số

$$\|\varphi^\varepsilon(\cdot) - \varphi(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leqslant \varepsilon \tag{4.2}$$

đã biết.

Trong chương này, chúng tôi sẽ chỉnh hóa bài toán (4.1)-(4.2) bởi bài toán

$$\begin{cases} \dfrac{d^\gamma v^\nu}{dt^\gamma} = \Delta v^\nu, \ x \in \mathbb{R}^n, t \in (0,T) \\ v^\nu(x,T) = S_\nu(\varphi^\varepsilon(x)), \ x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{4.3}$$

trong đó $\nu > 0$ và $S_\nu(\varphi^\varepsilon(x))$ là tích chập của $\varphi^\varepsilon(x)$ với nhân Dirichlet.

Các kết quả trong chương này là tổng quát hóa và cải tiến các kết quả của Liu J. và các cộng sự trong [82, 88]. Các kết quả này đã được viết thành bài báo:

Duc N. V., Muoi P. Q., Thang N. V., A molification method backward time-fractional heat equation, *Acta Math. Vietnam.* (Đã được nhận đăng).

4.1 Tính đặt chỉnh của bài toán chỉnh hóa

Định nghĩa 4.1.1. ([88]) Ta gọi $u(x,t)$ là *nghiệm* của bài toán (4.1) nếu

(4.1) đúng trong $L^2(\mathbb{R}^n)$ với mỗi $t \in (0,T)$,

$$u \in C([0,T];L^2(\mathbb{R}^n)), u(\cdot,t) \in H^2(\mathbb{R}^n),\ t \in (0,T)$$

và

$$\lim_{t\to T} \|u(\cdot,t) - \varphi\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Tiếp theo, chúng ta sẽ chứng minh bài toán (4.3) là đặt chỉnh. Đầu tiên, chúng ta cần kết quả bổ trợ sau.

Bổ đề 4.1.2. *Nếu $u(x,t)$ là nghiệm của bài toán*

$$\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma} = \Delta u,\ x \in \mathbb{R}^n, t \in (0,T), \tag{4.4}$$

và $u(\cdot,0) \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $u(\cdot,T) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ thì tồn tại hằng số C_2 sao cho

$$\|u(\cdot,t)\| \le C_2\|u(\cdot,T)\|^{\frac{s}{s+2}}.\|u(\cdot,0)\|^{\frac{2}{s+2}}_{H^s(\mathbb{R}^n)},\ t \in [0,T].$$

Chứng minh. Dùng phép biến đổi Fourier cho hai vế của phương trình (4.4) theo biến x, ta có

$$\frac{\partial^\gamma \widehat{u}(\xi,t)}{\partial t^\gamma} = -|\xi|^2\widehat{u}(\xi,t).$$

Do đó, (xem [88])

$$\widehat{u}(\xi,t) = E_{\gamma,1}(-|\xi|^2t^\gamma)\widehat{u}(\xi,0).$$

Từ $0 \le E_{\gamma,1}(-|\xi|^2t^\gamma) \le 1$, sử dụng bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\begin{aligned}
\|\widehat{u}(\cdot,t)\|^2 &\le \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi,0)|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left((1+|\xi|^2)^{\frac{2s}{s+2}}|\widehat{u}(\xi,0)|^{\frac{4}{s+2}}\right)\left((1+|\xi|^2)^{\frac{-2s}{s+2}}|\widehat{u}(\xi,0)|^{\frac{2s}{s+2}}\right) d\xi \\
&\le \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s|\widehat{u}(\xi,0)|^2 d\xi\right)^{\frac{2}{s+2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\widehat{u}(\xi,0)|^2}{(1+|\xi|^2)^2} d\xi\right)^{\frac{s}{s+2}}.
\end{aligned}$$

Vì $\dfrac{1}{1+|\xi|^2} \le \dfrac{1+T^\gamma}{1+|\xi|^2T^\gamma}$, nên từ Bổ đề 1.2.6 suy ra

$$\begin{aligned}
\|\widehat{u}(\cdot,t)\|^2 &\le \|u(\cdot,0)\|^{\frac{4}{s+2}}_{H^s(\mathbb{R}^n)} \left((1+T^\gamma)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\widehat{u}(\xi,0)|^2}{(1+|\xi|^2T^\gamma)^2} d\xi\right)^{\frac{s}{s+2}} \\
&= \|u(\cdot,0)\|^{\frac{4}{s+2}}_{H^s(\mathbb{R}^n)} \Big\{(1+T^\gamma)^2 \left(\frac{C}{\Gamma(1-\gamma)}\right)^{-2} \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{C}{(1+|\xi|^2T^\gamma)\Gamma(1-\gamma)}\right)^2 |\widehat{u}(\xi,0)|^2 d\xi\Big\}^{\frac{s}{s+2}}
\end{aligned}$$

$$\leq \|u(\cdot,0)\|^{\frac{4}{s+2}}_{H^s(\mathbb{R}^n)}\Big\{(1+T^\gamma)^2\left(\frac{C}{\Gamma(1-\gamma)}\right)^{-2}$$
$$\times\int_{\mathbb{R}^n}\left(E_{\gamma,1}(-|\xi|^2T^\gamma)|\widehat{u}(\xi,0)|\right)^2 d\xi\Big\}^{\frac{s}{s+2}}$$
$$\leq \|u(\cdot,0)\|^{\frac{4}{s+2}}_{H^s(\mathbb{R}^n)}\left((1+T^\gamma)^2\left(\frac{C}{\Gamma(1-\gamma)}\right)^{-2}\int_{\mathbb{R}^n}|\widehat{u}(\xi,T)|^2 d\xi\right)^{\frac{s}{s+2}}$$
$$\leq \|u(\cdot,0)\|^{\frac{4}{s+2}}_{H^s(\mathbb{R}^n)}\left((1+T^\gamma)^2\left(\frac{C}{\Gamma(1-\gamma)}\right)^{-2}\|u(\cdot,T)\|^2\right)^{\frac{s}{s+2}}.$$

Do đó, bổ đề được chứng minh. □

Định lý 4.1.3. *Với $\varphi^\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^n)$, bài toán (4.3) có duy nhất nghiệm $v^\nu \in L^2(\mathbb{R}^n)$ và tồn tại hằng số C_3 sao cho*

$$\|v^\nu(\cdot,t)\| \leq C_3(1+\nu^2)\|\varphi^\varepsilon\|,\ t\in[0,T].$$

Chứng minh. Từ chứng minh của Bổ đề 4.1.2, ta có

$$\widehat{v^\nu}(\xi,t) = E_{\gamma,1}(-|\xi|^2t^\gamma)\widehat{v^\nu}(\xi,0).$$

Điều này kéo theo

$$\widehat{v^\nu}(\xi,t) = \frac{E_{\gamma,1}(-|\xi|^2t^\gamma)\widehat{v^\nu}(\xi,T)}{E_{\gamma,1}(-|\xi|^2T^\gamma)} = \frac{E_{\gamma,1}(-|\xi|^2t^\gamma)\widehat{S_\nu(\varphi^\varepsilon)}(\xi)}{E_{\gamma,1}(-|\xi|^2T^\gamma)}.$$

Do đó

$$v^\nu(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x}\frac{E_{\gamma,1}(-|\xi|^2t^\gamma)\widehat{S_\nu(\varphi^\varepsilon)}(\xi)}{E_{\gamma,1}(-|\xi|^2T^\gamma)}d\xi \tag{4.5}$$

Hơn nữa, với $t\in(0,T]$, ta có

$$\|v^\nu(\cdot,t)\|^2_{H^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^2\left|\frac{E_{\gamma,1}(-|\xi|^2t^\gamma)\widehat{S_\nu(\varphi^\varepsilon)}(\xi)}{E_{\gamma,1}(-|\xi|^2T^\gamma)}\right|^2 d\xi$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^2\left(\frac{\frac{C_1}{\Gamma(1-\gamma)}\frac{1}{1+t^\gamma|\xi|^2}}{\frac{C}{\Gamma(1-\gamma)}\frac{1}{1+T^\gamma|\xi|^2}}\right)^2|\widehat{S_\nu(\varphi^\varepsilon)}(\xi)|^2 d\xi$$
$$\leq \frac{C_1^2}{C^2}\left(\frac{T}{t}\right)^{2\gamma}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^2\widehat{S_\nu(\varphi^\varepsilon)}(\xi)|^2 d\xi$$
$$= \frac{C_1^2}{C^2}\left(\frac{T}{t}\right)^{2\gamma}\int_{M_\nu}(1+|\xi|^2)^2|\widehat{\varphi^\varepsilon}(\xi)|^2 d\xi.$$

Do đó tồn tại hằng số $\widetilde{C}$ sao cho

$$\begin{aligned}\|v^\nu(\cdot,t)\|^2_{H^2(\mathbb{R}^n)} &\le \widetilde{C}\Big(\frac{T}{t}\Big)^{2\gamma}\int_{M_\nu}(1+\nu^2)^2|\widehat{\varphi^\varepsilon}(\xi)|^2 d\xi\\ &\le \widetilde{C}\Big(\frac{T}{t}\Big)^{2\gamma}(1+\nu^2)^2\|\varphi^\varepsilon\|^2,\ t\in(0,T].\end{aligned}$$

Vì vậy $v^\nu(x,t)\in H^2(\mathbb{R}^n),\ t\in(0,T]$. Vì $0\le E_{\gamma,1}(-|\xi|^2t^\gamma)\le 1$ nên

$$\|v^\nu(\cdot,t)\|^2=\int_{\mathbb{R}^n}|\widehat{v^\nu}(\cdot,t)|^2d\xi\le\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{|\widehat{v^\nu}(\cdot,T)|}{E_{\gamma,1}(-|\xi|^2T^\gamma)}\right)^2d\xi.$$

Điều này dẫn đến

$$\begin{aligned}\|v^\nu(\cdot,t)\|^2 &\le \int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{|F[S_\nu(\varphi^\varepsilon)](\xi)|}{E_{\gamma,1}(-|\xi|^2T^\gamma)}\right)^2d\xi\\ &=\int_{M_\nu}\left(\frac{|\widehat{\varphi^\varepsilon}(\xi)|}{E_{\gamma,1}(-|\xi|^2T^\gamma)}\right)^2d\xi\\ &\le\int_{M_\nu}\left(\frac{\Gamma(1-\gamma)}{C}(1+|\xi|^2T^\gamma)\right)^2|\widehat{\varphi^\varepsilon}(\xi)|^2d\xi\\ &\le\int_{M_\nu}\left(\frac{\Gamma(1-\gamma)}{C}(1+T^\gamma)(1+|\xi|^2)\right)^2|\widehat{\varphi^\varepsilon}(\xi)|^2d\xi.\end{aligned}\tag{4.6}$$

Từ (4.6), tồn tại hằng số $C_3>0$ sao cho

$$\begin{aligned}\|v^\nu(\cdot,t)\|^2&\le C_3^2\int_{M_\nu}(1+\nu^2)^2|\widehat{\varphi^\varepsilon}(\xi)|^2d\xi\\ &\le C_3^2(1+\nu^2)^2\|\varphi^\varepsilon(\cdot)\|^2,\ t\in[0,T].\end{aligned}\tag{4.7}$$

Từ (4.7), dẫn đến

$$\|v^\nu(\cdot,t)\|\le C_3(1+\nu^2)\|\varphi^\varepsilon\|,\ t\in[0,T].$$

Suy ra $v^\nu\in C([0,T],L^2(\mathbb{R}^n))\cap C((0,T],H^2(\mathbb{R}^n))$.
Định lý được chứng minh. □

4.2 Tốc độ hội tụ

Trong phần này, chúng tôi nêu quy tắc chọn tham số tiên nghiệm, hậu nghiệm và đưa ra tốc độ hội tụ của nghiệm chỉnh hóa về nghiệm chính xác.

Đầu tiên chúng ta xét quy tắc chọn tham số tiên nghiệm. Để đạt được các kết quả cho phần tiên nghiệm, chúng tôi cần một số bổ đề sau.

Kí hiệu $w(\cdot, t)$ là nghiệm của bài toán

$$\begin{cases} \dfrac{d^\gamma w}{dt^\gamma} = \Delta w, x \in \mathbb{R}^n, t \in (0, T), \\ w(x, T) = S_\nu(\varphi)(x),\ x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{4.8}$$

Bổ đề 4.2.1. *Nếu v^ν là nghiệm của bài toán (4.3) và w là nghiệm của (4.8), thì tồn tại hằng số $C_4 > 0$ sao cho*

$$\|v^\nu(\cdot, t) - w(\cdot, t)\| \le C_4(1 + \nu^2)\varepsilon,\ \forall t \in [0, T].$$

Chứng minh. Ta thấy rằng $v^\nu(\cdot, t) - w(\cdot, t)$ là nghiệm của bài toán (4.3) với dữ kiện cuối $S_\nu(\varphi^\varepsilon)$ được thay thế bởi $S_\nu(\varphi^\varepsilon - \varphi)$. Từ Định lý 4.1.3, tồn tại hằng số C_4 sao cho

$$\begin{aligned} \|v^\nu(\cdot, t) - w(\cdot, t)\| &\le C_4(1 + \nu^2)\|S_\nu(\varphi - \varphi^\varepsilon)\| \\ &= C_4(1 + \nu^2)\left(\int_{\mathbb{R}^n} |S_\nu\left(\varphi - \varphi^\varepsilon\right)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Điều này dẫn đến

$$\begin{aligned} \|v^\nu(\cdot, t) - w(\cdot, t)\| &\le C_4(1 + \nu^2)\left(\int_{\mathbb{R}^n} |F[S_\nu\left(\varphi - \varphi^\varepsilon\right)]|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= C_4(1 + \nu^2)\left(\int_{M_\nu} |\widehat{\varphi} - \widehat{\varphi^\varepsilon}|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le C_4(1 + \nu^2)\|\varphi - \varphi^\varepsilon(\cdot)\| \\ &\le C_4(1 + \nu^2)\varepsilon. \end{aligned}$$

Bổ đề được chứng minh. □

Bổ đề 4.2.2. *Cho $s \ge 0$ và $w(x, t)$ là nghiệm của bài toán* (4.8). *Nếu $u(x, t)$ là nghiệm của bài toán (4.1) và tồn tại hằng số dương $E > \varepsilon$ sao cho*

$$\|u(\cdot, 0)\|_{H^s(\mathbb{R})} \le E, \tag{4.9}$$

thì tồn tại hằng số C_5 sao cho

$$\|u(\cdot, t) - w(\cdot, t)\| \le C_5 \nu^{-s} E,\ \forall t \in [0, T].$$

Chứng minh. Ta có

$$
\begin{aligned}
&\|u(\cdot,t) - w(\cdot,t)\|^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left| E_{\gamma,1}(-|\xi|^2 t^\gamma)\widehat{u}(\cdot,0) - E_{\gamma,1}(-|\xi|^2 t^\gamma)\widehat{w}(\cdot,0)\right|^2 d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\cdot,0) - \widehat{w}(\cdot,0)|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \widehat{u}(\cdot,0) - \frac{F[S_\nu(u(\cdot,T))]}{E_{\gamma,1}(-|\xi|^2 T^\gamma)}\right|^2 d\xi \\
&= \int_{M_\nu} \left| \widehat{u}(\cdot,0) - \frac{\widehat{u}(\cdot,T)}{E_{\gamma,1}(-|\xi|^2 T^\gamma)}\right|^2 d\xi + \int_{Q_\nu} |\widehat{u}(\cdot,0)|^2 d\xi \\
&= \int_{Q_\nu} |\widehat{u}(\cdot,0)|^2 d\xi = \int_{Q_\nu} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^s}(1+|\xi|^2)^s |\widehat{u}(\cdot,0)|^2 d\xi. \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

Từ (4.10), tồn tại hằng số C_5 sao cho

$$\|u(\cdot,t) - w(\cdot,t)\| \leq C_5 \nu^{-s} E, \ \forall t \in [0,T].$$

Bổ đề được chứng minh. □

Bây giờ, chúng tôi sẽ trình bày đánh giá về tốc độ hội tụ của nghiệm chỉnh hóa tới nghiệm chính xác theo cả chuẩn $\|\cdot\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}$ và chuẩn $\|\cdot\|_{H^l(\mathbb{R}^n)}$.

Định lý 4.2.3. *Nếu $u(x,t)$ là nghiệm của bài toán (4.1) thỏa mãn* (4.9) *và v^ν là nghiệm của bài toán (4.3) thì với $\nu = \left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{s+2}}$, $E > \varepsilon$ tồn tại hằng số $\overline{C}_1 > 0$ sao cho*

$$\|v^\nu(\cdot,t) - u(\cdot,t)\|_{H^l(\mathbb{R})} \leqslant \overline{C}_1 \varepsilon^{\frac{s-l}{s+2}} E^{\frac{l+2}{s+2}}, \ 0 \leq l < s, \ t \in [0,T]. \qquad (4.11)$$

Chứng minh. Chứng minh sẽ được chia ra hai trường hợp.

a) $l = 0$: Sử dụng Bổ đề 4.2.1 và Bổ đề 4.2.2, ta có

$$
\begin{aligned}
\|v^\nu(\cdot,t) - u(\cdot,t)\| &\leq \|u(\cdot,t) - w(\cdot,t)\| + \|v^\nu(\cdot,t) - w(\cdot,t)\| \\
&\leq C_4(1+\nu^2)\varepsilon + C_5\nu^{-s}E.
\end{aligned}
$$

Với $\nu = \left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{s+2}}$ và $E > \varepsilon$ tồn tại hằng số $\overline{C}_1$ sao cho

$$\|v^\nu(\cdot,t) - u(\cdot,t)\| \leqslant \overline{C}_1 \varepsilon^{\frac{s}{s+2}} E^{\frac{2}{s+2}}, \ \forall t \in [0,T].$$

b) $l > 0$: Ta có

$$
\begin{aligned}
&\|w(\cdot,t) - v^{\nu}(\cdot,t)\|^2_{H^l(\mathbb{R}^n)}\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^l |\widehat{w}(\xi,t) - \widehat{v^{\nu}}(\xi,t)|^2 d\xi\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^l \left(\frac{E_{\gamma,1}(-t^{\gamma}|\xi|^2)|F[S_{\nu}(\varphi^{\varepsilon}-\varphi]|}{E_{\gamma,1}(-T^{\gamma}|\xi|^2)}\right)^2 d\xi\\
&= \int_{M_{\nu}} (1+|\xi|^2)^l \left(\frac{E_{\gamma,1}(-t^{\gamma}|\xi|^2)|\widehat{\varphi^{\varepsilon}}-\widehat{\varphi}|}{E_{\gamma,1}(-T^{\gamma}|\xi|^2)}\right)^2 d\xi\\
&\le \int_{M_{\nu}} (1+|\xi|^2)^l \left(\frac{|\widehat{\varphi^{\varepsilon}}-\widehat{\varphi}|}{E_{\gamma,1}(-T^{\gamma}|\xi|^2)}\right)^2 d\xi\\
&\le \frac{(\Gamma(1-\gamma))^2}{C^2} \int_{M_{\nu}} (1+|\xi|^2)^l (1+T^{\gamma}|\xi|^2)^2 |\widehat{\varphi^{\varepsilon}}-\widehat{\varphi}|^2 d\xi\\
&\le \frac{(\Gamma(1-\gamma))^2}{C^2}(1+T^{\gamma})^2 \int_{M_{\nu}} (1+|\xi|^2)^{l+2} |\widehat{\varphi^{\varepsilon}}-\widehat{\varphi}|^2 d\xi.
\end{aligned}
$$

Từ bất đẳng thức trên ta suy ra tồn tại hằng số C_6 sao cho

$$\|w(\cdot,t) - v^{\nu}(\cdot,t)\|^2_{H^l(\mathbb{R}^n)} \le C_6(1+\nu^2)^{l+2}\varepsilon^2. \tag{4.12}$$

Mặt khác, ta có

$$
\begin{aligned}
&\|u(\cdot,t) - w(\cdot,t)\|^2_{H^l(\mathbb{R}^n)}\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^l |\widehat{u}(\xi,t) - \widehat{w}(\xi,t)|^2 d\xi\\
&\le \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^l |\widehat{u}(\xi,0) - \widehat{w}(\xi,0)|^2 d\xi\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^l \left|\widehat{u}(\xi,0) - \frac{F[S_{\nu}(u(\cdot,T))]}{E_{\gamma,1}(-T^{\gamma}|\xi|^2)}\right|^2 d\xi\\
&= \int_{M_{\nu}} (1+|\xi|^2)^l \left|\widehat{u}(\xi,0) - \frac{\widehat{u}(\xi,T)}{E_{\gamma,1}(-T^{\gamma}|\xi|^2)}\right|^2 d\xi\\
&\quad + \int_{Q_{\nu}} (1+|\xi|^2)^l \left|\widehat{u}(\xi,0)\right|^2 d\xi\\
&= \int_{Q_{\nu}} (1+|\xi|^2)^{l-s} (1+|\xi|^2)^s \left|\widehat{u}(\xi,0)\right|^2 d\xi\\
&\le (1+\nu^2)^{l-s}E^2.
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

Từ (4.12) và (4.13), dẫn đến

$$\|u(\cdot,t) - v^{\nu}(\cdot,t)\|^2_{H^l(\mathbb{R}^n)} \le C_6(1+\nu^2)^{l+2}\varepsilon^2 + (1+\nu^2)^{l-s}E^2.$$

$$\text{Chọn } \nu = \left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{s+2}} \text{ với } \varepsilon < E \text{ tồn tại hằng số } \overline{C}_1 \text{ sao cho}$$

$$\|u(\cdot,t) - w(\cdot,t)\|_{H^l(\mathbb{R})} \leq \overline{C}_1 \varepsilon^{\frac{s-l}{s+2}} E^{\frac{l+2}{s+2}}, \ t \in [0,T].$$

Định lý được chứng minh. □

Tiếp theo, chúng tôi đề xuất quy tắc chọn tham số hậu nghiệm. Trước hết, chúng tôi cần bổ đề sau.

Bổ đề 4.2.4. *Đặt* $\rho(\nu) = \|v^\nu(\cdot,T) - \varphi^\varepsilon(\cdot)\|$. *Nếu* $0 < \|\varphi^\varepsilon(\cdot)\|$, *thì*

a) ρ *là hàm liên tục,*

b) $\lim\limits_{\nu\to 0^+} \rho(\nu) = \|\varphi^\varepsilon(\cdot)\|$,

c) $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \rho(\nu) = 0$,

d) ρ *là hàm giảm.*

Chứng minh. Từ Bổ đề 1.2.12, ta có

$$\rho^2(\nu) = \|v^\nu(\cdot,T) - \varphi^\varepsilon\|^2 = \|\widehat{S_\nu(\varphi^\varepsilon)} - \widehat{\varphi^\varepsilon}\|^2 = \int_{Q_\nu} |\widehat{\varphi^\varepsilon}(\xi)|^2 d\xi.$$

a) Cố định $\nu_0 \in (0,+\infty)$, ta có

$$\lim_{\nu\to\nu_0} \rho^2(\nu) = \lim_{\nu\to\nu_0} \int_{Q_\nu} |\widehat{\varphi^\varepsilon}(\xi)|^2 d\xi = \int_{Q_{\nu_0}} |\widehat{\varphi^\varepsilon}(\xi)|^2 d\xi = \rho^2(\nu_0).$$

Vậy ρ là hàm liên tục.

b) Vì $\lim\limits_{\nu\to 0^+} Q_\nu = \mathbb{R}^n$ nên

$$\lim_{\nu\to 0^+} \rho^2(\alpha) = \lim_{\nu\to 0^+} \int_{Q_\nu} |\widehat{\varphi^\varepsilon}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\varphi^\varepsilon}(\xi)|^2 d\xi = \|\varphi^\varepsilon\|^2.$$

Suy ra $\lim\limits_{\nu\to 0^+} \rho(\alpha) = \|\varphi^\varepsilon(\cdot)\|$.

c) Vì $\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\varphi^\varepsilon}(\xi)|^2 d\xi = \|\varphi^\varepsilon\|^2 < +\infty$ nên

$$\lim_{\nu\to+\infty} \rho^2(\nu) = \lim_{\nu\to+\infty} \int_{Q_\nu} |\widehat{\varphi^\varepsilon}(\xi)|^2 d\xi = 0.$$

Điều này kéo theo $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \rho(\alpha) = 0$.

d) Nếu $\nu_1 \leq \nu_2$ thì $Q_{\nu_1} \supseteq Q_{\nu_2}$. Ta có

$$\int_{Q_{\nu_1}} |\widehat{\varphi^\varepsilon}(\xi)|^2 d\xi \geq \int_{Q_{\nu_2}} |\widehat{\varphi^\varepsilon}(\xi)|^2 d\xi.$$

Vậy ρ là hàm giảm.

Bổ đề được chứng minh. □

Định lý 4.2.5. *Giả sử rằng* $0 < \varepsilon < \|\varphi^\varepsilon(\cdot)\|$. *Chọn* $\tau > 1$ *sao cho* $0 < \tau\varepsilon < \|\varphi^\varepsilon\|$. *Khi đó, tồn tại một số* $\nu_\varepsilon > 0$ *sao cho*

$$\|v^{\nu_\varepsilon}(\cdot, T) - \varphi^\varepsilon(\cdot)\| = \tau\varepsilon. \tag{4.14}$$

Hơn nữa, nếu $u(x,t)$ *là nghiệm của (4.1) thỏa mãn (4.9), thì tồn tại hằng số* $\overline{C}_2 > 0$ *sao cho*

$$\|v^{\nu_\varepsilon}(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|_{H^l(\mathbb{R})} \leqslant \overline{C}_2 \varepsilon^{\frac{s-l}{s+2}} E^{\frac{l+2}{s+2}}, \ 0 \leq l < s, \ t \in [0, T]. \tag{4.15}$$

Chứng minh. Chứng minh được chia ra hai trường hợp.

a) $l = 0$: Từ Bổ đề 4.2.4, tồn tại một số $\nu_\varepsilon > 0$ thỏa mãn (4.14). Hơn nữa, ta có

$$\begin{aligned}
&\|w(\cdot, T) - u(\cdot, T)\| \\
&\leq \|v^{\nu_\varepsilon}(\cdot, T) - w(\cdot, T)\| + \|v^{\nu_\varepsilon}(\cdot, T) - \varphi^\varepsilon\| + \|\varphi - \varphi^\varepsilon\| \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |F[S_\nu(\varphi^\varepsilon - u(\cdot, T))]|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} + (\tau + 1)\varepsilon \\
&= \left(\int_{M_{\nu_\varepsilon}} |\widehat{\varphi^\varepsilon} - \widehat{u}(\cdot, T)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} + (\tau + 1)\varepsilon \\
&\leq \|u(\cdot, T) - \varphi^\varepsilon\| + (\tau + 1)\varepsilon \leq (\tau + 2)\varepsilon.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Từ bất đẳng thức $(a+b)^2 \leq \left(1 + \left(\frac{\tau-1}{2}\right)^2\right) a^2 + \left(1 + \left(\frac{2}{\tau-1}\right)^2\right) b^2$, ta có

$$\begin{aligned}
\tau^2\varepsilon^2 = \|v^{\nu_\varepsilon}(\cdot, T) - \varphi^\varepsilon\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{S_{\nu_\varepsilon}(\varphi\varepsilon)} - \widehat{\varphi^\varepsilon}|^2 d\xi \\
&= \int_{Q_{\nu_\varepsilon}} |\widehat{\varphi^\varepsilon}|^2 d\xi = \int_{Q_{\nu_\varepsilon}} |\widehat{\varphi^\varepsilon} - \varphi + \varphi|^2 d\xi
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \int_{Q_{\nu_\varepsilon}} \left(1+\left(\frac{\tau-1}{2}\right)^2\right) |\widehat{\varphi^\varepsilon}-\widehat{\varphi}|^2 d\xi \\
&\quad + \int_{Q_{\nu_\varepsilon}} \left(1+\left(\frac{2}{\tau-1}\right)^2\right) |\widehat{\varphi}|^2 d\xi \\
&\le \Big(1+\Big(\frac{\tau-1}{2}\Big)^2\Big)\varepsilon^2 + \int_{Q_{\nu_\varepsilon}} \Big(1+\Big(\frac{2}{\tau-1}\Big)^2\Big)|\widehat{u}(\xi,T)|^2 d\xi \\
&\le \Big(1+\frac{(\tau-1)^2}{4}\Big)\varepsilon^2 \\
&\quad + \left(1+\frac{4}{(\tau-1)^2}\right)\int_{Q_{\nu_\varepsilon}} |E_{\gamma,1}(-\xi^2T^\gamma)\widehat{u}(\xi,0)|^2 d\xi \\
&\le \Big(1+\frac{(\tau-1)^2}{4}\Big)\varepsilon^2 \\
&\quad + \left(1+\frac{4}{(\tau-1)^2}\right)\int_{Q_{\nu_\varepsilon}} \left(\frac{C_1}{\Gamma(1-\gamma)}\cdot\frac{|\widehat{u}(\cdot,0)|}{1+|\xi|^2T^\gamma}\right)^2 d\xi.
\end{aligned}
$$

Áp dụng bất đẳng thức $\dfrac{1}{1+T^\gamma|\xi|^2} \le \dfrac{1+T^{-\gamma}}{1+|\xi|^2}$, ta có

$$
\begin{aligned}
\frac{(\tau-1)^2}{4}\varepsilon^2 &\le \left(1+\frac{4}{(\tau-1)^2}\right)\int_{Q_{\nu_\varepsilon}} \left(\frac{C_1(1+T^{-\gamma})}{\Gamma(1-\gamma)}\cdot\frac{|\widehat{u}(\cdot,0)|}{1+|\xi|^2}\right)^2 d\xi \\
&= \left(1+\frac{4}{(\tau-1)^2}\right)\left(\frac{C_1(1+T^{-\gamma})}{\Gamma(1-\gamma)}\right)^2 \\
&\quad \times \int_{Q_{\nu_\varepsilon}} (1+|\xi|^2)^{-s-2}(1+|\xi|^2)^s|\widehat{u}(\cdot,0)|^2 d\xi \\
&\le \left(1+\frac{4}{(\tau-1)^2}\right)\left(\frac{C_1(1+T^{-\gamma})}{\Gamma(1-\gamma)}\right)^2 (1+\nu_\varepsilon^2)^{-s-2}E^2. \qquad (4.17)
\end{aligned}
$$

Do đó, tồn tại hằng số C_7 sao cho

$$
1+\nu_\varepsilon^2 \le C_7\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\frac{2}{s+2}}. \qquad (4.18)
$$

Mặt khác

$$
\begin{aligned}
&\|u(\cdot,0)-w(\cdot,0)\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\cdot,0)-\widehat{w}(\cdot,0)|^2(1+\xi^2)^s d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\widehat{u}(\cdot,0)-\frac{F[S_\nu(u(\cdot,T))]}{E_{\gamma,1}(-|\xi|^2T^\gamma)}\right|^2 (1+\xi^2)^s d\xi
\end{aligned}
$$

$$= \int_{M_{\nu_\varepsilon}} \left| \widehat{u}(\cdot,0) - \frac{\widehat{u}(\cdot,T)}{E_{\gamma,1}(-|\xi|^2 T^\gamma)} \right|^2 (1+\xi^2)^s d\xi$$
$$+ \int_{Q_{\nu_\varepsilon}} |\widehat{u}(\cdot,0)|^2 (1+\xi^2)^s d\xi$$
$$= \int_{Q_{\nu_\varepsilon}} |\widehat{u}(\cdot,0)|^2 (1+\xi^2)^s d\xi \le E^2. \tag{4.19}$$

Từ (4.16), (4.19), và Bổ đề 4.1.2, tồn tại hằng số C_8 sao cho

$$\|u(\cdot,t) - w(\cdot,t)\| \le C_8 \varepsilon^{\frac{s}{s+2}} E^{\frac{2}{s+2}}. \tag{4.20}$$

Từ (4.20) và Bổ đề 4.2.1, ta có

$$\begin{aligned}\|v^{\nu_\varepsilon}(\cdot,t) - u(\cdot,t)\| &\le \|u(\cdot,t) - w(\cdot,t)\| + \|w(\cdot,t) - v^{\nu_\varepsilon}(\cdot,t)\| \\ &\le C_8 \varepsilon^{\frac{s}{s+2}} E^{\frac{2}{s+2}} + C_4(1+\nu_\varepsilon^2)\varepsilon. \end{aligned}\tag{4.21}$$

Từ (4.18) và (4.21), tồn tại hằng số $\overline{C}_2 > 0$ sao cho

$$\|v^{\nu_\varepsilon}(\cdot,t) - u(\cdot,t)\| \leqslant \overline{C}_2 \varepsilon^{\frac{s}{s+2}} E^{\frac{2}{s+2}}, \ \forall t \in [0,T].$$

b) $l > 0$: Đặt $z(x,t) = u(x,t) - w(x,t)$, từ (4.16) và (4.19) ta có

$$\|z(\cdot,0)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \le E$$

và

$$\|z(\cdot,T)\| \le (\tau+2)\varepsilon.$$

Do đó

$$\begin{aligned}
\|z(\cdot,t)\|^2_{H^l(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^l |\widehat{z}(\xi,t)|^2 d\xi \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^l |\widehat{z}(\xi,0)|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left((1+|\xi|^2)^{\frac{s(l+2)}{s+2}} |\widehat{z}(\xi,0)|^{\frac{2(l+2)}{s+2}} \right) \left((1+|\xi|^2)^{\frac{2(l-s)}{s+2}} |\widehat{z}(\xi,0)|^{\frac{2(s-l)}{s+2}} \right) d\xi \\
&\le \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{z}(\xi,0)|^2 d\xi \right)^{\frac{l+2}{s+2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{-2} |\widehat{z}(\xi,0)|^2 d\xi \right)^{\frac{s-l}{s+2}} \\
&\le E^{\frac{2(l+2)}{s+2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\widehat{z}(\xi,0)}{1+|\xi|^2} \right|^2 d\xi \right)^{\frac{s-l}{s+2}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le E^{\frac{2(l+2)}{s+2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{(1+T^\gamma)\widehat{z}(\xi,0)}{1+T^\gamma|\xi|^2} \right|^2 d\xi \right)^{\frac{s-l}{s+2}} \\
&\le E^{\frac{2(l+2)}{s+2}} \left(\frac{(\Gamma(1-\gamma))^2(1+T^\gamma)^2}{C_1^2} \int_{\mathbb{R}^n} \left| E_{\gamma,1}(-T^\gamma|\xi|^2)\widehat{z}(\xi,0) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{s-l}{s+2}} \\
&= E^{\frac{2(l+2)}{s+2}} \left(\frac{(\Gamma(1-\gamma))^2(1+T^\gamma)^2}{C_1^2} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \widehat{z}(\xi,T) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{s-l}{s+2}} \\
&\le \left(\frac{\Gamma(1-\gamma)(1+T^\gamma)}{C_1} \right)^{\frac{2(s-l)}{s+2}} E^{\frac{2(l+2)}{s+2}} \varepsilon^{\frac{2(s-l)}{s+2}}. \qquad (4.22)
\end{aligned}
$$

Từ (4.12) và (4.22), ta có

$$
\begin{aligned}
&\|u(\cdot,t) - v^{\nu_\varepsilon}(\cdot,t)\|^2_{H^l(\mathbb{R})} \\
&\le C_6(1+\nu_\varepsilon^2)^{l+2}\varepsilon^2 + \left(\frac{\Gamma(1-\gamma)(1+T^\gamma)}{C_1} \right)^{\frac{2(s-l)}{s+2}} E^{\frac{2(l+2)}{s+2}} \varepsilon^{\frac{2(s-l)}{s+2}}. \qquad (4.23)
\end{aligned}
$$

Từ (4.18) và (4.23), tồn tại hằng số $\overline{C}_2$ sao cho

$$
\|u(\cdot,t) - v^{\nu_\varepsilon}(\cdot,t)\|_{H^l(\mathbb{R})} \le \overline{C}_2 E^{\frac{l+2}{s+2}} \varepsilon^{\frac{s-l}{s+2}}, \ t \in [0,T].
$$

Định lý được chứng minh. □

4.3 Ví dụ số

Trong phần này, chúng tôi minh họa số cho phương pháp chỉnh hóa vừa đề xuất ở trên. Các ví dụ số này được thực hiện trên máy tính LENOVO, Microsoft Windows 10 Home với phiên bản MATLAB 2015a.

Để có được dữ liệu chính xác và nhiễu, trước tiên chúng tôi giải quyết bài toán thuận:

$$
\begin{cases}
\dfrac{d^\gamma u}{dt^\gamma} = \Delta u, x \in \mathbb{R}^2, t \in (0,T), \\
u(x,0) = g(x),
\end{cases} \qquad (4.24)
$$

với g là hàm cụ thể.

Nghiệm chỉnh hóa của (4.24) là nghiệm của bài toán chỉnh hóa

$$
\begin{cases}
\dfrac{d^\gamma v^\nu}{dt^\gamma} = \Delta v^\nu, x \in \mathbb{R}^2, t \in (0,T), \\
v^\nu(x,T) = S_\nu(\varphi(x)), \ x \in \mathbb{R}^2,
\end{cases}
$$

trong đó $\nu > 0$ đạt được bởi quy tắc chọn tham số tiên nghiệm và hậu nghiệm trong Định lí 4.2.3 và Định lí 4.2.5 tương ứng.

Trong tất cả các ví dụ, chúng tôi đặt $\gamma = 0.8, T = 1$ và giải quyết bài toán (4.24) trên miền $\Omega = [-10, 10]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$, được chia thành $M(x_i, y_j)$ theo lưới $x_i, y_j \in \{-10 : h : 10\}$. Khi đó, dữ kiện rời rạc chính xác $U = u(\cdot, T)$ và dữ kiện nhiễu rời rạc $\varphi^\varepsilon = U^{noise}$ được tạo ra như sau

$$U^{noise}(\cdot) = u(\cdot, T) + \varepsilon \frac{n}{\|n\|_{L_2(\Omega)}},$$

trong đó $n = randn(size(U))$ là ma trận ngẫu nhiên ("randn" là hàm trong Matlab) và độ lớn ε cho biết mức độ nhiễu được thêm vào dữ liệu.

Thuật toán 4.3.1 Giải thuật tính xấp xỉ tham số chỉnh hóa theo quy quy tắc chọn hậu nghiệm

---

Đầu vào: Khởi tạo: $k = 0, \tau \in \left(1, \frac{\|\varphi\|}{\varepsilon}\right)$ và $\nu = 0 : 2 : 10^3$

```
1: N = size(ν, 2)
2: for i = 1, 2, 3, ..., N do
3:     ν_i = ν(i); tg_1 = m(ν_i)
4:     if tg_1 ≤ τε then
5:         break
6:     end if
7: end for
```

Đầu ra: $\nu_\varepsilon = \nu_i$

Về quy tắc chọn tham số hậu nghiệm, chúng ta chú ý rằng phương trình

$$\|v^{\nu_\varepsilon}(\cdot, T) - \varphi\| = \tau\varepsilon$$

là tương đương với phương trình

$$m(\nu_\varepsilon) := \|S_{\nu_\varepsilon}(\varphi) - \varphi\| = \tau\varepsilon. \tag{4.25}$$

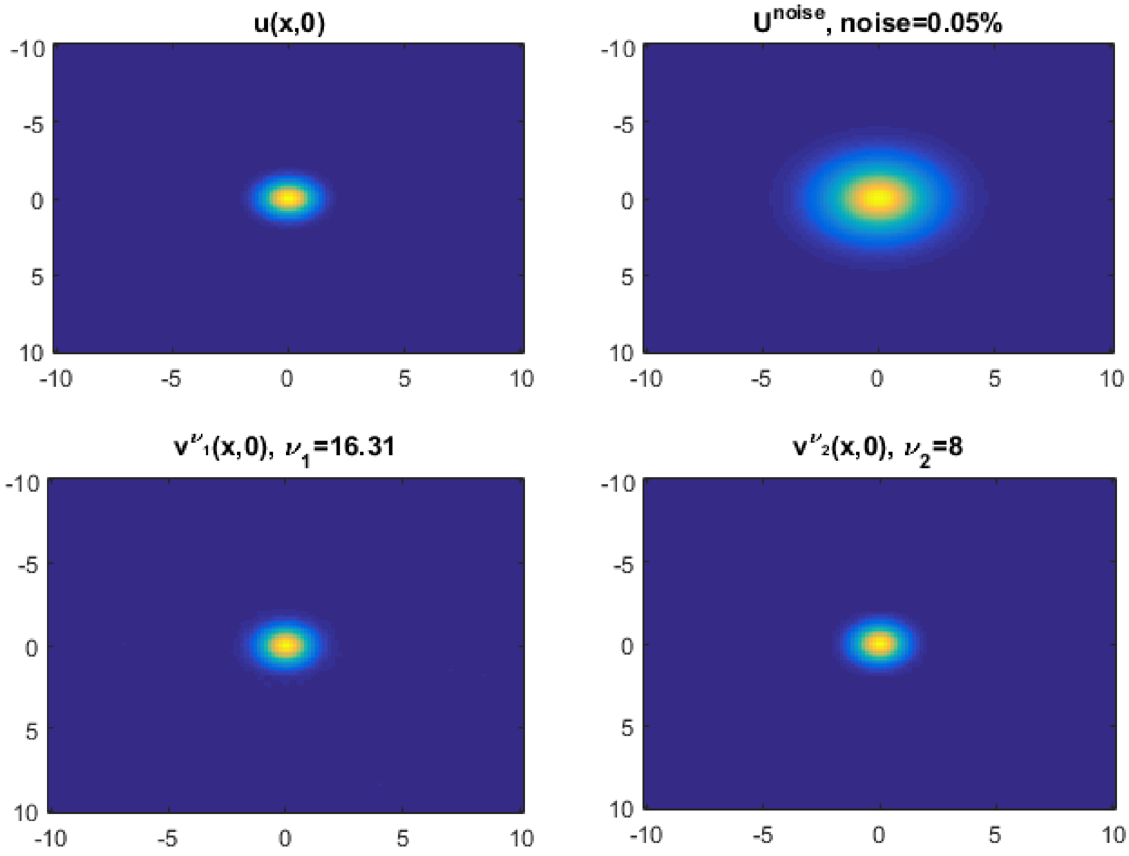
Vì $\lim_{\nu\to 0^+} m(\nu) = \|\varphi\|$, $\lim_{\nu\to+\infty} m(\nu) = 0$ và $m(\cdot)$ là đơn điệu giảm, nên phương trình có nghiệm. Thuật toán 4.3.1 đưa ra phương pháp xấp xỉ nghiệm của (4.25).

Trong các ví dụ sau, chúng tôi luôn đặt ν_1 và ν_2 tương ứng với quy tắc chọn tham số tiên nghiệm và hậu nghiệm. Giá trị của ν_2 đạt được bởi Thuật toán 4.3.1.

Ví dụ 4.3.1. Xét trường hợp $g(x) = e^{-x_1^2 - x_2^2}$, $x = (x_1, x_2)$. Đây là hàm trơn. Với $\varepsilon = 5.10^{-3}$ hoặc 5.10^{-4}, $s = 1$ và $\tau = 1.3$, ta có

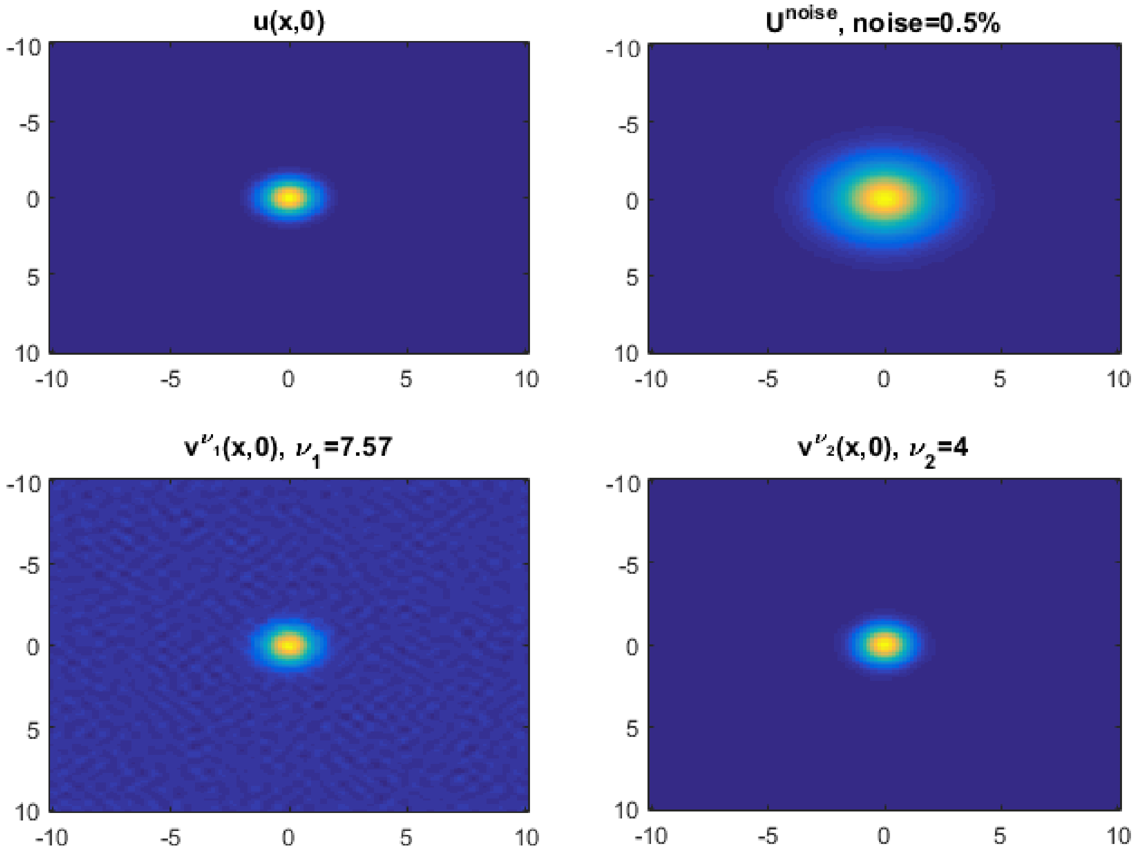
$$E := \|u(x,0)\|_{H^s(\Omega)} \approx 2.17.$$

Với $\varepsilon = 5.10^{-4}$ ta có $\nu_1 \approx 16.31, \nu_2 \approx 8$ và nghiệm chính xác $u(x,0)$, dữ kiện nhiễu U^{noise} và nghiệm phục hồi $u^{\nu_i}(x,0)(i = 1,2)$ là minh họa trong Hình 4.1. Trong đó, $u^{\nu_1}(x,0)$ là xấp xỉ của $u(x,0)$ với quy tắc chọn tham số tiên nghiệm trong Định lý 4.2.3 và $u^{\nu_2}(x,0)$ là xấp xỉ của $u(x,0)$ với quy tắc chọn tham số hậu nghiệm trong Định lý 4.2.5.

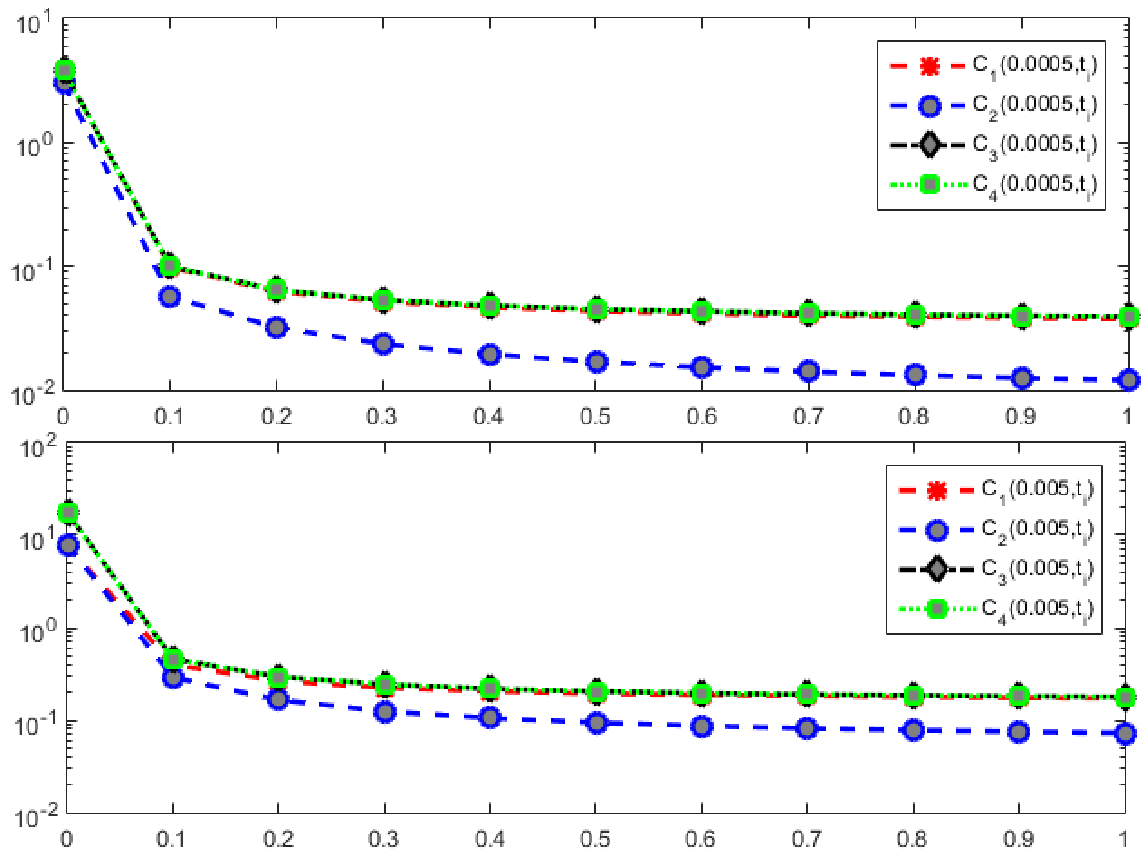


Hình 4.1: Nghiệm chính xác $u(x,0)$, dữ kiện nhiễu U^{noise} và nghiệm phục hồi $v^{\nu_\varepsilon}(x,0)$ với $\varepsilon = 5.10^{-4}$ đối với hai quy tắc chọn tham số trong Ví dụ 4.3.1.

Hình 4.2 minh họa nghiệm chính xác $u(x,0)$, U^{noise} và nghiệm phục hồi của $u(x,0)$ với $\varepsilon = 5.10^{-3}$. Trong trường hợp này, ta có $\nu_1 \approx 7.57, \nu_2 \approx 4$ với mức nhiễu lớn hơn, tất cả các xấp xỉ của $u(x,0)$ là ít chính xác hơn so với những trường hợp trước đó, nhưng vẫn còn chấp nhận được.



Hình 4.2: Nghiệm chính xác $u(x,0)$, dữ kiện nhiễu U^{noise} và nghiệm phục hồi $v^{\nu_\varepsilon}(x,0)$ với $\varepsilon = 5.10^{-3}$ đối với hai quy tắc chọn tham số trong Ví dụ 4.3.1.



Hình 4.3: Đồ thị của $C_1(\varepsilon, t), C_2(\varepsilon, t), C_3(\varepsilon, t), C_4(\varepsilon, t)$ với $\varepsilon \in \{0.01, 0.001\}$ và $t = 0 : 0.1 : 1$ trong Ví dụ 4.3.1.

Bây giờ chúng tôi sẽ minh họa cho tốc độ hội tụ. Để làm điều đó, chúng tôi định nghĩa

$$C_1(\varepsilon, t) = \frac{\|v^{\nu^1}(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|}{\varepsilon^{\frac{s}{s+2}} E^{\frac{2}{s+2}}}, \tag{4.26}$$

$$C_2(\varepsilon, t) = \frac{\|v^{\nu^1}(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|_{H^l(\Omega)}}{\varepsilon^{\frac{s-l}{s+2}} E^{\frac{l+2}{s+2}}}, \tag{4.27}$$

$$C_3(\varepsilon, t) = \frac{\|v^{\nu^2}(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|}{\varepsilon^{\frac{s}{s+2}} E^{\frac{2}{s+2}}}, \tag{4.28}$$

$$C_4(\varepsilon, t) = \frac{\|v^{\nu^2}(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|_{H^l(\Omega)}}{\varepsilon^{\frac{s-l}{s+2}} E^{\frac{l+2}{s+2}}}. \tag{4.29}$$

Bởi Định lý 4.2.3, Định lý 4.2.5, với mỗi $\varepsilon > 0$ $C_i(\varepsilon, t)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ là bị chặn đều với mọi $t \in [0, T]$. Kết quả này được minh họa trong Hình 4.3. Với cả $\varepsilon = 0.0005$ và $\varepsilon = 0.005$ các sai số là tăng khi t gần 0 và tại 0. Từ hình này, chúng ta có thể quan sát tính bị chặn của các hàm này trên $t \in [0, 1]$. Chúng ta tiếp tục quan sát rằng các hằng số $\overline{C}_1$ và $\overline{C}_2$ trong Định lý 4.2.3, Định lý 4.2.5 nhỏ hơn khi các giá trị của ε đang nhận được nhỏ hơn.

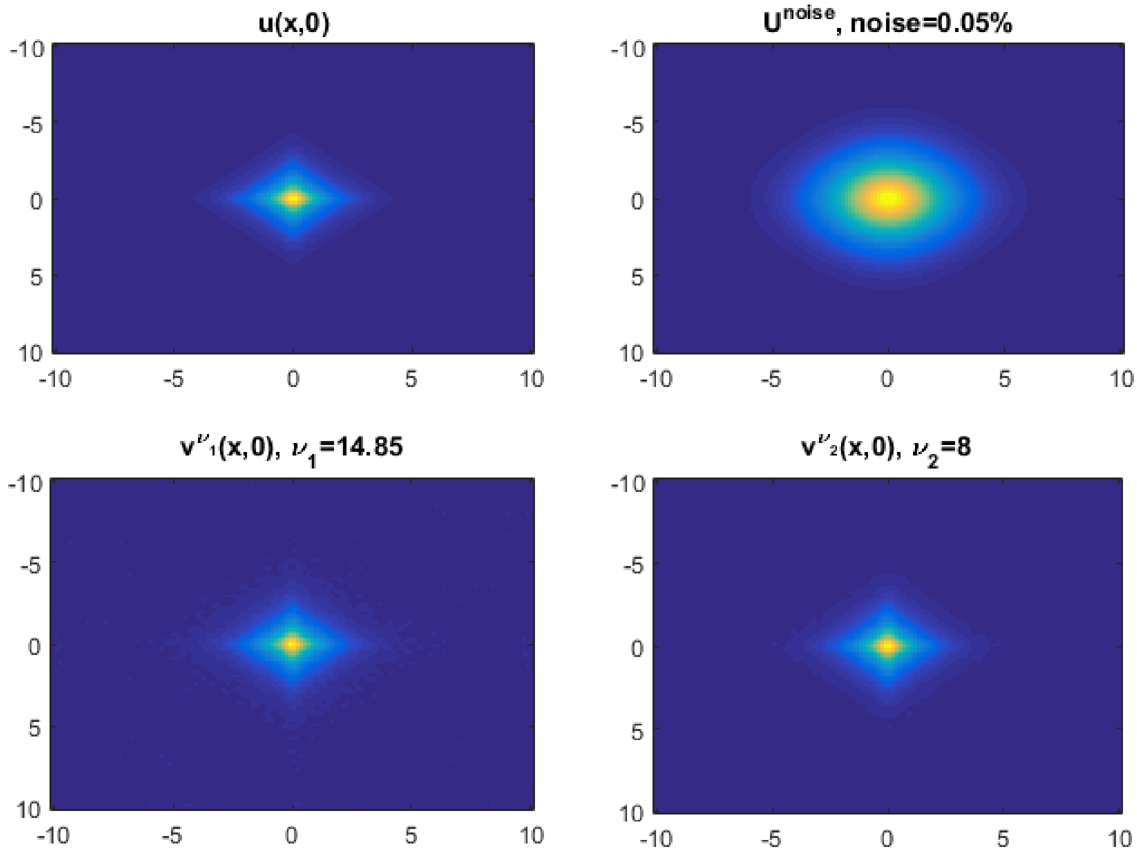
Tiếp theo, khác với Ví dụ 4.3.1, ta xét hàm g không trơn.

Ví dụ 4.3.2. Xét hàm không trơn: $g(x) = e^{-|x_1|-|x_2|}, x = (x_1, x_2)$. Với $\varepsilon = 5.10^{-4}$ hoặc 5.10^{-3}, $s = 1$ và $\tau = 1.3$, ta có

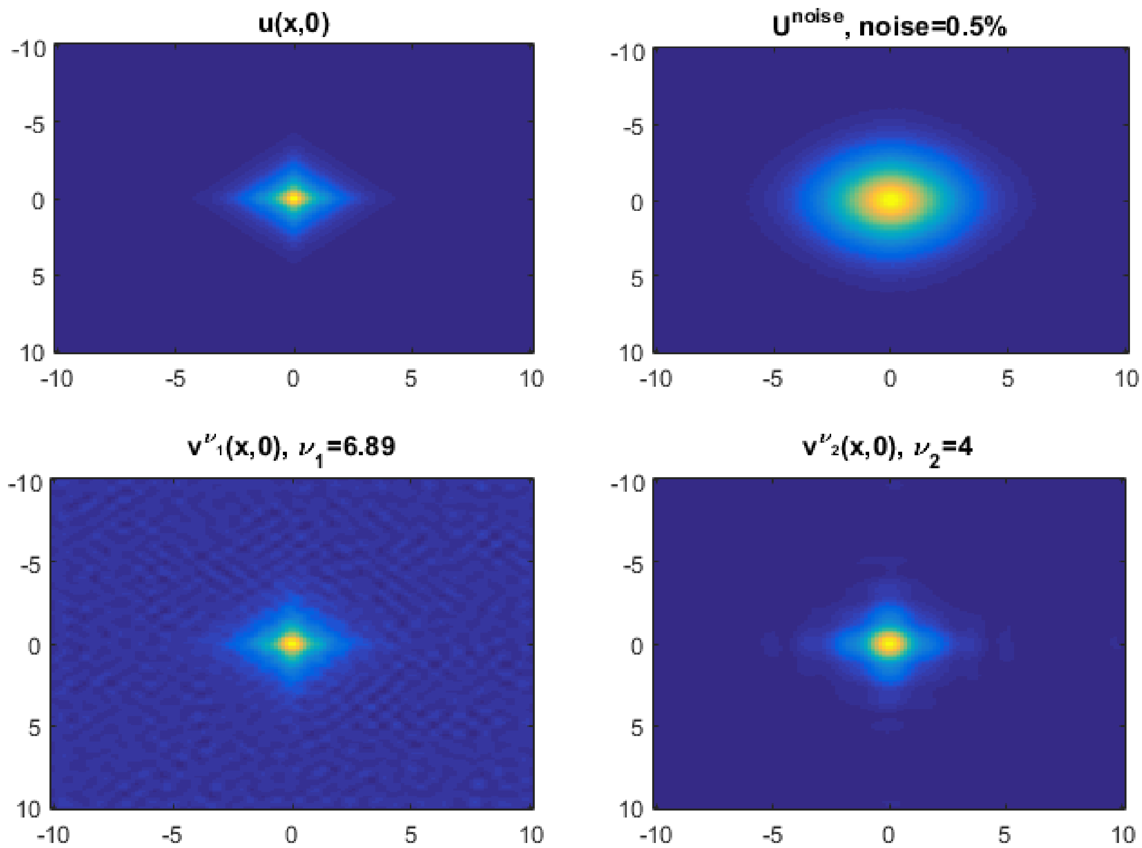
$$E := \|u(x, 0)\|_{H^s(\Omega)} \approx 1.64.$$

Hình 4.4 và Hình 4.5 mô tả nghiệm chính xác $u(x, 0)$ với hai mức độ nhiễu $\varepsilon = 5.10^{-4}$ và $\varepsilon = 5.10^{-3}$. Nghiệm xấp xỉ với quy tắc chọn tham số tiên nghiệm và hậu nghiệm. Chúng tôi có cùng quan sát như trong Ví dụ 4.3.1, tức là tất cả các nghiệm gần đúng đều chấp nhận được, sai số tăng khi mức nhiễu tăng. Điều này phù hợp với các kết quả lý thuyết được đưa ra trong Định lý 4.2.3 và Định lý 4.2.5.

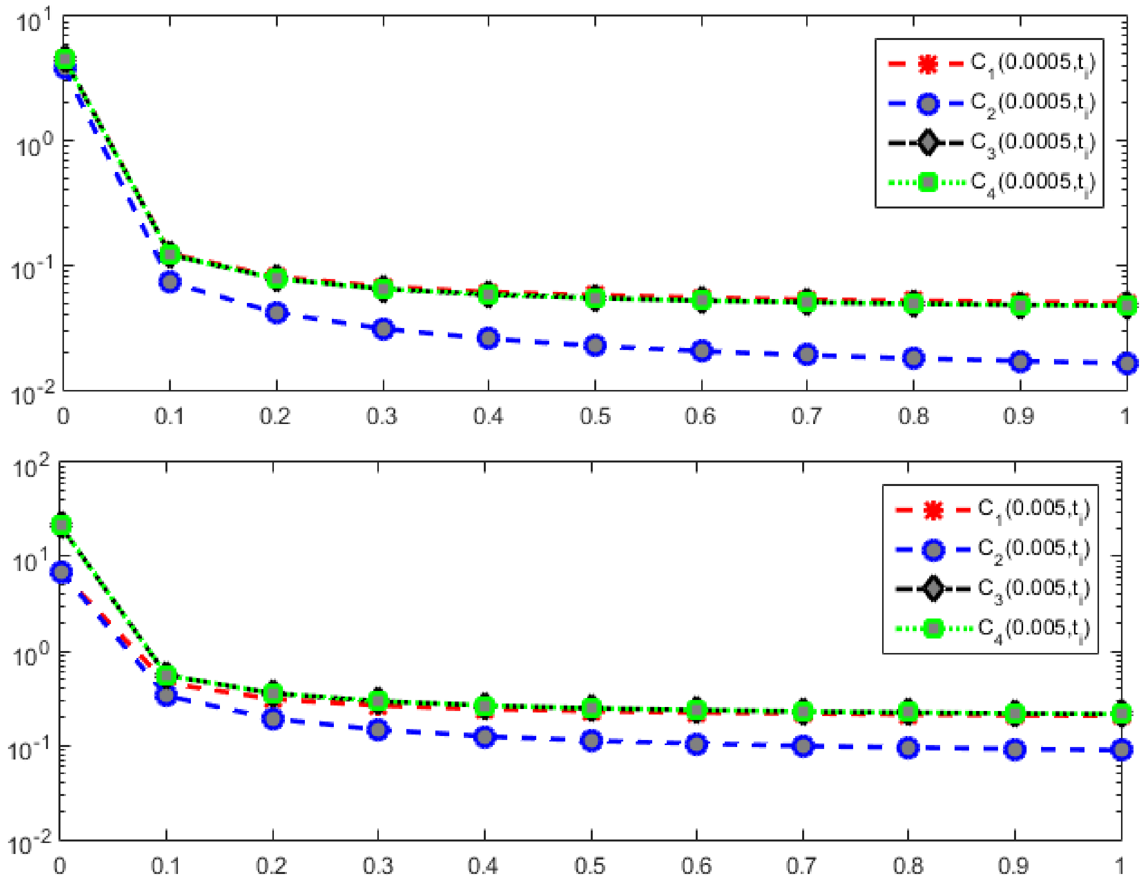
Một lần nữa, Hình 4.6 xác nhận các quan sát của chúng tôi như trong Ví dụ 4.3.1. Thứ tự của các tốc độ hội tụ có thể đạt được đối với các quy tắc chọn tham số và các giá trị của C_i tương tự như trong ví dụ trước.



Hình 4.4: Nghiệm chính xác $u(x,0)$, dữ kiện nhiễu U^{noise} và nghiệm phục hồi $v^{\nu_\varepsilon}(x,0)$ with $\varepsilon = 5.10^{-4}$ đối với hai quy tắc chọn tham số trong Ví dụ 4.3.2.



Hình 4.5: Nghiệm chính xác $u(x,0)$, dữ kiện nhiễu U^{noise} và nghiệm phục hồi $v^{\nu_\varepsilon}(x,0)$ với $\varepsilon = 5.10^{-3}$ đối với hai quy tắc lựa chọn tham số trong Ví dụ 4.3.2.



Hình 4.6: Đồ thị của $C_1(\varepsilon,t), C_2(\varepsilon,t), C_3(\varepsilon,t), C_4(\varepsilon,t)$ với $\varepsilon \in \{0.01, 0.001\}$ và $t = 0 : 0.1 : 1$ trong Ví dụ 4.3.2.

4.4 Kết luận Chương 4

Trong chương 4, chúng tôi đã đạt được các kết quả sau:
- Áp dụng phương pháp nhuyễn để chỉnh hóa bài toán (4.1)-(4.2), chứng minh bài toán chỉnh hóa là đặt chỉnh (Định lý 4.1.3)
- Chỉ ra tốc độ hội tụ dạng Hölder của nghiệm chỉnh hóa về nghiệm chính xác, theo cả quy tắc chọn tham số tiên nghiệm (Định lý 4.2.3) và hậu nghiệm (Định lý 4.2.5).
- Đưa ra ví dụ số minh họa cho phần lý thuyết (Ví dụ 4.3.1, Ví dụ 4.3.2).

KẾT LUẬN CHUNG VÀ KIẾN NGHỊ

Kết luận chung

Luận án nghiên cứu về các đánh giá ổn định và chỉnh hóa cho phương trình parabolic bậc nguyên và bậc phân thứ ngược thời gian. Các kết quả đạt được trong luận án này là:

1. Đưa ra đánh giá ổn định cho phương trình parabolic bậc nguyên nửa tuyến tính với hệ số hằng và nguồn Lipschitz toàn cục (với hằng số Lipschitz $k \geq 0$ tùy ý). Đây là kết quả đầu tiên chỉ cần đòi hỏi tính bị chặn của nghiệm tại $t = 0$.

2. Đưa ra đánh giá ổn định và chỉnh hóa Tikhonov có hiệu chỉnh cho phương trình parabolic bậc nguyên nửa tuyến tính với hệ số phụ thuộc thời gian và nguồn Lipschitz địa phương.

3. Tổng quát hóa và cải tiến các kết quả của Carasso [14] và Ponomarev [64] về đánh giá ổn định cho phương trình Bürgers.

4. Chỉnh hóa tiên nghiệm và hậu nghiệm cho phương trình parabolic bậc phân thứ bằng phương pháp làm nhuyễn. Kết quả này là tổng quát hóa và cải tiến các kết quả trong [82, 88].

Kiến nghị

Trong thời gian tới, chúng tôi mong muốn tiếp tục nghiên cứu các vấn đề sau:

1. Nghiên cứu về đánh giá ổn định cũng như các phương pháp chỉnh hóa cho phương trình parabolic bậc nguyên phi tuyến trong không gian Banach.

2. Nghiên cứu về đánh giá ổn định cũng như các phương pháp chỉnh hóa cho phương trình parabolic bậc phân thứ tuyến tính trong không gian Banach và bậc phân thứ phi tuyến trong không gian Hilbert.

3. Nghiên cứu bài toán xác định nguồn cho phương trình parabolic.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH CỦA NGHIÊN CỨU SINH CÓ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

1. Hào D. N., Duc N. V. and Thang N. V.(2015), Stability estimates for Burgers-type equations backward in time, *J. Inverse and Ill-Posed Problems* 23, 41-49.

2. Duc N. V. and Thang N. V.(2017), Stability results for semi-linear parabolic equations backward in time, *Acta Math. Vietnam.*, 42, 99–111.

3. Hào D. N., Duc N. V. and Thang N. V. (2018), Backward semi-linear parabolic equations with time-dependent coefficients and locally Lipschitz source, *Inverse Problems,* **34**, 055010, 33 pp.

4. Duc N. V. , Muoi P. Q. and Thang N. V., A Mollification Method for Backward Time-fractional Heat Equation, *Acta Math. Vietnam.* (Đã được nhận đăng)

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Abazari R. and Borhanifar A. (2010), "Numerical study of the solution of the Burgers and coupled Burgers equations by a differential transformation method", *Comput. Math. Appl* **59**, 2711–2722.

[2] Agmon S. and Nirenberg L. (1963), "Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach spaces", *Comm. Pure Appl. Math.*, **16**, 121–239.

[3] Agmon S. (1966), Unicité et convexité dans les problèmes différentiels, *Les presses de l' université de Montréal*, 152pp.

[4] Agoshkov V. I. (2003), *Optimal Control Methods and the Method of Adjoint Equations in Problems of Mathematical Physics*, Russian Academy of Sciences, Institute for Numerical Mathematics, Moscow, 257 pp. (in Russian).

[5] Allahverdi N., Pozo A. and Zuazua E. (2016), "Numerical aspects of large-time optimal control of Burgers' equation", *ESAIM Mathematical Modeling and Numerical Analysis* **50**, 1371–1401.

[6] Allen S. M. and Cahn J. W. (1972), "Ground state structures in ordered binary alloys with second neighbor interactions", *Acta Met.* **20**, 423–433.

[7] Al-Jamal M. F. (2017), A backward problem for the time-fractional diffusion equation. *Math. Methods Appl. Sci.***40**, 2466–2474.

[8] Ames K. A. and Stranghan B. (1997), "Non-standard and Improperly Posed Problems", *Mathematics in Science and Engineering*, Vol. **194**, Academic Press.

[9] Ames K. A. , Clark G. W. , Epperson J. F. and Oppenheimer S. F. (1998), "A comparison of regularizations for an ill-posed problem", *Math. Comput.,* **224**, 1451–1471.

[10] Anatoly, A. Kibas, Hari M. S. and Juan J. Trujillo (2006) , *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies 204, Elsevier.

[11] Baumeister J. (1987), *Stable Solution of Inverse Problems,* Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig.

[12] Bear J. (1972), *Dynamics of Fluids in Porous Media*, Elsevier, New York.

[13] Boris B. , Kovacsa M. and Mark M. (2008), "Numerical solutions for fractional reaction diffusion equations", *Comput. Math. Appl* **55**, 2212–2226.

[14] Carasso A. S. (1977), "Computing small solutions of Burgers' equation backwards in time", *J. Math. Anal. Appl.,* **59**, 169-209.

[15] Carasso A. S. (2013), "Hazardous continuation backward in time in nonlinear parabolic equations, and an experiment in deblurring nonlinearly blurred imagery", *Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology* **118**, 199–217.

[16] Carasso A. S. (2014), "Compensating operators and stable backward in time marching in nonlinear parabolic equations". *GEM Int. J. Geomath.* **5**, 1–16.

[17] Changming C., Liu F. and Burrage K.(2008), "Finite difference methods and a fourier analysis for the fractional reactio subdiffusion equation", *Appl. Math. Comput.*, **198**, 754–769.

[18] Denisov A. M. (1999), *Elements of the Theory of Inverse Problems*, Inverse and Ill-Posed Problems Series, Walter De Gruyter.

[19] Duc N. V. and Thang N. V. (2017), "Stability results for semi-linear parabolic equations backward in time", *Acta Math. Vietnam.* **42**, 99–111.

[20] Duc N. V. , Muoi P. Q. and Thang N. V., "A Mollification Method for Backward Time-fractional Heat Equation", *Acta Math. Vietnam.* (Đã được nhận đăng).

[21] Ewing R. E. (1975), "The approximation of certain parabolic equations backward in time by Sobolev equations", *SIAM J. Math.Anal.,* **6**, 283–294.

[22] Gafiychuk V. V. , Datsko B. Yo. (2006), "Pattern formation in a fractional reaction diffusion system", *Physica A***365**, 300–306.

[23] Gajewski H. and Zacharias K. (1972), "Zur Ruguliarisierung einer nichtkorrekter Probleme bei Evolutionsgleichungen", *J. Math. Anal. Appl.*, **38**, 784–789.

[24] Ghidaglia J. M. (1986), "Some backward uniqueness results", *Nonlinear Anal.,* **8**, 777–790.

[25] Hào D. N. (1994), "A mollification method for ill-posed problems", *Numer. Math.*, **68**, 469–506.

[26] Hào D. N. (1996), "A mollification method for a noncharacteristic Cauchy problem for a parabolic equation", *J. Math. Anal. Appl.,* **199**, 873–909.

[27] Hào D. N. (1998), *Methods for Inverse Heat Conduction Problems*, Peter Lang, New York.

[28] Hào D. N., Duc N. V. and Sahli H. (2008)," A non-local boundary value problem method for parabolic equations backward in time", *J. Math. Anal. Appl.,* No. **345**, 805–815.

[29] Hào D. N. and Duc N. V. (2009), "Stability results for the heat equation backward in time", *J. Math. Anal. Appl.,* No. **353**, 627-641.

[30] Hào D. N, Duc N. V. and Lesnic D. (2009), "A non-local boundary value problem method for the Cauchy problem for elliptic equations", *Inverse Problems,* **25**, 055002, 27pp.

[31] Hào D. N., Duc N. V. and Lesnic D . (2010), "Regularization of parabolic equations backward in time by a non-local boundary value problem method", *IMA J. Appl. Math.*, No. **75**, 291-315.

[32] Hào D. N. and Duc N. V. (2011), "Stability results for backward parabolic equations with time dependent coefficients", *Inverse Problems*, Vol. **27**, No. **2**, 025003, 20 pp.

[33] Hào D. N. and Duc N. V. (2012), "Regularization of backward parabolic equations in Banach spaces", *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, Vol **20**, No. **5-6**, 745–763.

[34] Hào D. N. and Duc N. V. (2015), "A non-local boundary value problem method for semi-linear parabolic equations backward in time", *Applicable Analysis: An International Journal*, **94**, 446-463.

[35] Hào D. N. , Duc N. V. and Thang N. V. (2015), "Stability estimates for Burgers-type equations backward in time", *J. Inverse and Ill-Posed Problems* **23**, 41-49.

[36] Hào D. N., Duc N. V. and Thang N. V. (2018), "Backward semi-linear parabolic equations with time-dependent coefficients and locally Lipschitz source", *Inverse Problems,* **34**, 055010, 33 pp.

[37] Hilfer R. (2000), *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, Singapore .

[38] Hodgkin A. L. and Rushton W. A. H. (1946), "The electrical constants of a crustacean nerve fibre", *Proc. Roy. Soc. London.* **B133**, 444–479.

[39] Hoffmann K. H. and Tang Q. (2001), *Ginzburg-Landau Phase Transition Theory and Superconductivity.* Birkhäuser Verlag, Basel.

[40] Huang Y. and Quan Z., (2004), "Regularization for ill-posed Cauchy problems associated with generators of analytic semigroups", *J. Differential Equations*, **203**, 38–54.

[41] Huang Y. and Quan Z. (2005), "Regularization for a class of ill-posed Cauchy problem", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **133**, 3005–3012.

[42] Huang Y. (2008), "Modified quasi-reversibility method for final value problems in Banach spaces", *J. Math. Anal. Appl.*, **340**, 757-769.

[43] Isakov V. (1998), *Inverse Problems for Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York.

[44] Jiang H., Liu F., Turner I. and Burrage K. (2012), "Analytical solutions for the multiterm time-space Caputo-Riesz fractional advection-diffusion equations on a finite domain", *J. Math. Anal. Appl.*, **389**, 1117-1127.

[45] Jin B., Lazarov R. and Zhou Z., "Error estimates for a semidiscrete finite element method for fractional order parabolic equations", *SIAM J. Numer. Anal.* **1**, 455–466.

[46] Kato T. (1964), "Nonlinear evolution equations in Banach space", *Proc. Symp. Appl. Math*,**17**, 50–67.

[47] Koch C. (1999), *Biophysics of Computation: Information Processing in Single Neurons*, Oxford U. Press, Oxford.

[48] Koenderink J. J. (1984), "The structures of images", *Biol. Cybernet*, **50**, 363-370.

[49] Lavrent'ev M. M. , Romanov V. G. and Shishat-skii S. P. (1986), *Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis*, Amer. Math. Soc. Providence. Rhode Island.

[50] Lin Y. and Xu C. (2007), "Finite difference/spectral approximations for the time-fractional diffusion equation", *J. Comput. Phys.* **225** , 1533-1552

[51] Liu F. , Zhuang P, Anh V. , Turner I. and Burrage K. (2007) ,Stability and convergence of the difference methods for the space–time fractional advection–diffusion equation, *Appl. Math. Comput.* **191**, 12-20.

[52] Liu J. J. and Yamamoto M. (2010), "A backward problem for the time-fractional diffusion equation", *Applicable Analysis* **89**, 1769–1788.

[53] Long N. T. and Dinh A. P. N. (1994), "Approximation of a parabolic non-linear evolution equation backward in time", *Inverse Problems,* **10**, 905–914.

[54] Luchko Y. (2010), "Some uniqueness and existence results for the initial-boundary-value problems for the generalized time-fractional diffusion equation", *Comput. Math. Appl.*,**59**, 1766–1772.

[55] Luchko Y. (2011), "Initial-boundary-value problems for the generalized multi-term time-fractional diffusion equation", *J. Math. Anal. Appl.*, **374**, 538–548.

[56] Lundvall J., Kozlov V. and Weinerfelt P. (2006), "Iterative methods for data assimilation for Burgers' equation", *J. Inv. Ill-Posed Problems* **14**, 505–535.

[57] Marchuk G. I., Agoshkov V. I. and Shutyaev V. P. (1996), *Adjoint Equations and Perturbation Algorithms in Nonlinear Problems*. CRC Press, Boca Raton, FL.

[58] Metzler R. and Klafter J. (2000), "The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach", *Phys. Rep.* **339**, 1–77.

[59] Metzler R., Klafter J. (2004), "The restaurant at the end of the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics", *J. Phys. A: Math. Gen.* **37**, 161–208.

[60] Nam P. T. (2010), "An approximate solution for nonlinear backward parabolic equations", *J. Math. Anal. Appl.*, **367**, 337–349.

[61] Nikol'skii S. M. (1975), *Approximation of Functions of Several Variables and Imbedding Theorems*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg-New York .

[62] Pao C.V. (1992), *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations,* Plenum Press, New York .

[63] Perona P. and Malik J. (1990), "Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion", *IEEE Trans. Pat. Anal. Mach. Inte.,* **12**, 629-639.

[64] Ponomarev S. M. (1986), "On an ill-posed problem in nonlinear wave theory", *Soviet. Math. Dokl.*, **33**, 621–624.

[65] Renardy M. and Rogers R. C. (2004), *An Introduction to Partial Differential Equations*, 2nd Edition, Springer-Verlag, New York Inc.

[66] Sakamoto K. and Yamamoto M. (2011), "Initial value/boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems", *J. Math. Anal. Appl.* **382**, 426–447.

[67] Schurz H. (2010), "Nonlinear stochastic heat equations with cubic nonlinearities and additive Q-regular noise in $\mathbb{R}^1$, Eighth Mississippi State - UAB Conference on Differential Equations and Computational Simulations". *Electronic Journal of Differential Equations,***19**, 221–233.

[68] Showalter R. E. (1974), "The final value problem for evolution equations", *J. Math. Anal. Appl.*, **47**, 563–572.

[69] Shutyaev V. P. (2001), *Control Operators and Iterative Algorithms in Variational Data Assimilation Problems.* Nauka, Moscow, 240 pp.

[70] Srivastava V. K., Tamsir M., Bhardwaj U., Sanyasiraju. (2011),"Crank-Nicolson scheme for numerical solutions of two-dimensional coupled Burgers' equations", *International Journal of Scientific and Engineering Research*, **2**, 1–7.

[71] Tanabe H. (1979), *Equations of Evolution*, Pitman, London.

[72] Tartar L., *An Introduction to Sobolev Spaces and Interpolation Spaces*, Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, vol. 3, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2007.

[73] Tautenhahn U. and Schröter T. (1996), "On optimal regularization methods for the backward heat equation", *Zeitschrift für Analysis und Anwendungen*, **15**, 475–493.

[74] Tautenhahn U. (1998) , "Optimality for ill-posed problems under general source conditions", *Numer. Funct. Anal. and Optimiz.*, **19**, 377–398.

[75] Tikhonov A. N. (1963), "On the solution of ill-posed problems and the method of regularization", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **151**, 501-504.

[76] Tikhonov A. N. and Arsenin V. Y. (1977), *Solutions of Ill-Posed Problems*, Winston, Washington.

[77] Trong D. D. , Quan P. H. , Khanh T. V. and Tuan N. H. (2007), " A nolinear case of the 1-D backward heat problem: Regularization and Eror estimate ", *Journal for Analysis and its Applications,* Vol. **26**, 231–245.

[78] Trong D. D. and Tuan N. H. (2009), "Regularization of the nolinear backward heat problem using a method of integral equation", *Nonlinear Anal.,* Vol. **71**, 4167-4176.

[79] Trong D. D., Duy B. T. and Nguyet M. M. (2015), "Backward heat equations with locally Lipchitz source", *Applicable Analysis*, Vol. **94**, No. 10, 2023–2036.

[80] Tuan N. H. and Trong D. D.(2014), "On a backward parabolic problem with local Lipschitz source", *J. Math. Anal. Appl.* **414**, 678–692.

[81] Wang L. and Liu J. (2012), "Data regularization for a backward time-fractional diffusion problem", *Comput. Math. Appl.*,**64**, 3613–3626.

[82] Wang L. and Liu J. (2013), "Total variation regularization for a backward time-fractional diffusion problem", *Inverse Problems*, **29**, 115013, 22pp.

[83] Wang J. G. Zhou Y. B. and Wei T. (2013), "A posteriori regularization parameter choice rule for the quasi-boundary value method for the backward time-fraction diffusion problem", *Appl. Math. Lett.* **26**, 741-747.

[84] Wang J. G. Zhou Y. B. and Wei T. (2015), Optimal error bound and simplified Tikhonov regularization method for a backward problem for the time-fractional diffusion equation. *J. Comput. Appl. Math.* **279**, 277-292.

[85] Wei T. and Wang J. G. (2014), A modified quasi-boundary value method for the backward time-fractional diffusion problem,*ESAIM Math. Model. Numer. Anal.* **48**, 603–621.

[86] Xua X., Chenga J. and Yamamotob M. (2011), "Carleman estimate for a fractional diffusion equation with half order and application", *Applicable Analysis* Vol. 90, **9** , 1355–1371

[87] Yang M. and Liu J. (2013), "Solving a final value fractional diffusion problem by boundary condition regularization", *Appl. Numer. Math.* **66**, 45-58.

[88] Yang M. and Liu J. (2015), "Fourier regularization for a final value time-fractional diffusion problem", *Applicable Analysis*, **94**, 1508-1526.

[89] Zhang Y. , Benson D. A. and Reeves D. M. (2009), "Time and space nonlocalities underlying fractional-derivative models: Distinction and literature review of field applications", *Adv. Water Resour.* , **32**, 561–581.

[90] Zhanlav T., Chuluunbaatar O., Ulziibayar V. (2016), "Higher-order numerical solution of two-dimensional coupled Burgers' equations", *American Journal of Computational Mathematics*, **6**, 120– 129.

[91] Zheng G. H., Wei T. (2010), "Spectral regularization method for the time fractional inverse advection–dispersion equation", *Mathematics and Computaters in Simulation* , **81**, 37–51.

[92] Zheng G. H., Wei T. (2011), "Spectral regularization method for solving a time-fractional inverse diffusion problem", *Appl. Math. Comput*, **218**, 396–405.

[93] Zhu H. , Shu H. and Ding M. (2010), "Numerical solutions of two-dimensional Burgers' equations by discrete Adomian decomposition method", *Comput. Math. Appl.*, **60**, 840–848.