BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

NGUYỄN VĂN THẮNG

VỀ ĐÁNH GIÁ ỔN ĐỊNH VÀ CHỈNH HÓA CHO PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC BẬC NGUYÊN VÀ BẬC PHÂN THỨ NGƯỢC THỜI GIAN

MÃ SỐ: 946 01 02

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Nghệ An - 2019

Công trình được hoàn thành tại Trường Đại học Vinh

Người hướng dẫn khoa học:

1. **PGS. TS. Nguyễn Văn Đức**
2. **PGS. TS. Đinh Huy Hoàng**

Phản biện 1: GS.TSKH. Phạm Kỳ Anh

Phản biện 2: TS. Phan Xuân Thành

Phản biện 3: PGS.TS. Hà Tiến Ngoạn

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp Trường vào hồi .... giờ .... ngày .....tháng ..... năm......

Có thể tìm hiểu luận án tại:

1. Thư viện Nguyễn Thúc Hào, Trường Đại học Vinh
2. Thư Viện Quốc gia Việt Nam

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Phương trình parabolic bậc nguyên và bậc phân thứ ngược thời gian được dùng để mô tả nhiều hiện tượng vật lý quan trọng. Chẳng hạn, quá trình truyền nhiệt, quá trình địa vật lý và địa chất, khoa học vật liệu, thủy động học, xử lý ảnh, mô tả sự vận chuyển bởi dòng chất lỏng trong môi trường xốp. Ngoài ra, lớp các phương trình parabolic nửa tuyến tính dạng $u_t + A(t)u(t) = f(t, u(t))$, cũng được dùng để mô tả một số hiện tượng vật lý quan trọng. Chẳng hạn: a) $f(t,u) = u\left(b - c\|u\|^2\right), c > 0$ trong mô hình sinh lý thần kinh của các hệ thống tế bào thần kinh lớn có tiềm năng hành động, b) $f(t,u) = -\sigma u/\left(1 + au + bu^2\right),\ \sigma, a, b > 0$, trong động học enzyme, c) $f(t,u) = -|u|^p u, p \geqslant 1$ hoặc $f(t,u) = -u^p$ trong các phản ứng nhiệt, d) $f(t,u) = au - bu^3$ như phương trình Allen-Cahn mô tả quá trình tách pha trong hệ thống hợp kim đa thành phần hoặc phương trình Ginzburg-Landau trong siêu dẫn, hoặc e) $f(t,u) = \sigma u(u-\theta)(1-u)(0 < \theta < 1)$ trong bài toán dân số. Bên cạnh đó, dạng phương trình Bürgers ngược thời gian cũng thường xuyên được bắt gặp trong ứng dụng về đồng hóa số liệu, quá trình sóng phi tuyến, trong lý thuyết về âm học phi tuyến hay lý thuyết nổ và trong ứng dụng điều khiển tối ưu.

Các bài toán đã nêu ở trên thường *đặt không chỉnh* theo nghĩa Hadamard. Đối với lớp các bài toán ngược đặt không chỉnh, khi dữ kiện cuối của bài toán thay đổi nhỏ có thể dẫn đến bài toán không có nghiệm hoặc nếu có thì nghiệm này lại cách xa nghiệm chính xác. Vì vậy, việc đưa ra các đánh giá ổn định, phương pháp chỉnh hóa cũng như các phương pháp số hữu hiệu để tìm nghiệm gần đúng cho bài toán đặt không chỉnh luôn là vấn đề thời sự. Với các lý do nêu trên, chúng tôi chọn đề tài nghiên cứu cho luận án của mình là: ***"Về***

đánh giá ổn định và chỉnh hóa cho phương trình parabolic bậc nguyên và bậc phân thứ ngược thời gian".

2. Mục đích nghiên cứu

Mục đích của chúng tôi là thiết lập các kết quả mới về đánh giá ổn định cũng như chỉnh hóa cho các dạng phương trình parabolic bậc nguyên và bậc phân thứ ngược thời gian.

3. Đối tượng nghiên cứu

Đối với phương trình parabolic bậc nguyên, chúng tôi tập trung nghiên cứu phương trình kiểu Bürgers ngược thời gian, phương trình parabolic nửa tuyến tính ngược thời gian. Còn đối với phương trình parabolic bậc phân thứ, chúng tôi tập trung nghiên cứu phương trình tuyến tính.

4. Phạm vi nghiên cứu

Chúng tôi nghiên cứu đánh giá ổn định và chỉnh hoá cho phương trình parabolic bậc nguyên và bậc phân thứ ngược thời gian.

5. Phương pháp nghiên cứu

Chúng tôi sử dụng các phương pháp như *phương pháp lồi logarithm*, *phương pháp bài toán giá trị biên không địa phương*, *phương pháp chỉnh hoá Tikhonov* và *phương pháp làm nhuyễn.*

6. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn

Luận án đã đạt được một số kết quả về đánh giá ổn định và chỉnh hóa cho phương trình parabolic bậc nguyên phi tuyến và phương trình parabolic bậc phân thứ tuyến tính. Do đó, luận án góp phần làm phong phú thêm các kết quả nghiên cứu trong lĩnh vực bài toán ngược và bài toán đặt không chỉnh.

Luận án có thể làm tài liệu tham khảo cho các sinh viên, học viên cao học và nghiên cứu sinh ngành toán.

7. Tổng quan và cấu trúc của luận án

7.1. Tổng quan một số vấn đề liên quan đến luận án

Bài toán đặt không chỉnh xuất hiện từ thập niên 50 của thế kỉ trước. Các nhà toán học đầu tiên đề cập tới bài toán này là Tikhonov A. N., Lavrent'ev M. M., John J., Pucci C., Ivanov V. K. Đặc biệt, vào năm 1963, Tikhonov A. N. đưa ra phương pháp chỉnh hóa mang tên ông cho các bài toán đặt không chỉnh. Kể từ đó, bài toán đặt không chỉnh và bài toán ngược đã trở thành một ngành riêng của toán vật lý và khoa học tính toán.

Xét phương trình parabolic nửa tuyến tính ngược thời gian

$$\begin{cases} u_t + Au = f(t,u), \quad 0 < t \le T, \\ \|u(T) - \varphi\| \le \varepsilon \end{cases} \tag{1}$$

với mức nhiễu ε.

Chú ý rằng đã có nhiều kết quả đánh giá ổn định và chỉnh hóa cho bài toán trong trường hợp $f = 0$, một số phương pháp cho trường hợp tuyến tính có thể kể ra là phương pháp tựa đảo, phương pháp phương trình Sobolev, phương pháp chỉnh hóa Tikhonov, phương pháp bài toán giá trị biên không địa phương, phương pháp nhuyễn. Tuy nhiên, đối với bài toán phi tuyến, vẫn còn nhiều vấn đề cần được quan tâm nghiên cứu. Chẳng hạn như, tìm các đánh giá ổn định và chỉnh hóa cho phương trình có hệ số phụ thuộc thời gian.

Vào năm 1994, Nguyễn Thành Long và Alain Phạm Ngọc Định đã xem xét bài toán ngược cho phương trình parabolic nửa tuyến tính dạng (1). Bằng cách sử dụng nửa nhóm co liên tục mạnh sinh bởi toán tử

$$A_\beta = -A(I + \beta A)^{-1}, \beta > 0,$$

họ đạt được đánh giá sai số kiểu logarithm trên $(0, 1]$ giữa nghiệm của bài toán ban đầu và nghiệm của bài toán chỉnh hóa.

Vào năm 2009, Đặng Đức Trọng và các cộng sự xét bài toán (1) trong không gian một chiều có dạng

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x,t,u(x,t)), \ (x,t) \in (0,\pi) \times (0,T), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \ t \in (0,T), \\ \|u(x,T) - \varphi\| \le \varepsilon, \end{cases} \tag{2}$$

với f thỏa mãn điều kiện Lipschitz toàn cục. Các tác giả này đã sử dụng phương pháp phương trình tích phân để chỉnh hóa phương trình (2). Cụ thể, họ chỉnh hóa bài toán (2) bằng bài toán

$$u^\epsilon(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(\epsilon n^2 + e^{-Tn^2})^{\frac{t-T}{T}}\left(\varphi_n - \int_t^T e^{(s-T)n^2} f_n(u^\epsilon)ds\right)\sin nx. \tag{3}$$

Với điều kiện

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{2Tn^2} |\langle u(t), \phi_n\rangle|^2 < \infty,\ \forall t \in [0,T], \tag{4}$$

trong đó $\phi_n = \sin(nx)$. Các tác giả này đạt được đánh giá sai số dạng Hölder như sau

$$\|u(t) - u^\epsilon(t)\| \le M e^{k^2T(T-t)} \epsilon^{\frac{t}{T}} \left(\frac{T}{1+\ln\frac{T}{\epsilon}}\right)^{1-t/T}.$$

Sau đó vào năm 2010, Phan Thành Nam đã chỉnh hóa bài toán (1) bằng phương pháp chặt cụt. Tác giả xét A là một toán tử dương, tự liên hợp, không bị chặn và H có một cơ sở trực chuẩn $\{\phi_i\}_{i\geqslant 1}$ là các véctơ riêng tương ứng với các giá trị riêng $\{\lambda_i\}_{i\geqslant 1}$ của toán tử A sao cho

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots, \quad \text{và} \quad \lim_{i\to+\infty} \lambda_i = +\infty \tag{5}$$

và f thỏa mãn điều kiện Lipschitz toàn cục. Phan Thành Nam đã chứng minh bài toán sau là đặt chỉnh

$$\begin{cases} v_t + Av = P_M f(t, v(t)), & 0 < t < T, \\ v(T) = P_M g \end{cases} \tag{6}$$

trong đó

$$P_M w = \sum_{\lambda_n \le M} \langle \phi_n, w\rangle \phi_n$$

và đạt được các kết quả như sau.
Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{2\lambda_n \min(t,\beta)} |(u(t), \phi_n)|^2 \leqslant E_0^2$ thì với $\beta \ge T$ ta có

$$\|v(t) - u(t)\| \le c\epsilon^{t/T}.$$

Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2\beta'} e^{2\lambda_n \min(t,\beta)} |(u(t), \phi_n)|^2 \leqslant E_1^2$ thì với $\beta \ge T$ ta có

$$\|v(t) - u(t)\| \le c\epsilon^{t/T} \max\left\{\ln(1/\epsilon)^{-\beta'}, \epsilon^{(\tau-T)/\tau}\right\}.$$

Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{2\lambda_n}|(u(t),\phi_n)|^2 \leqslant E_2^2$ thì

$$\|v(t)-u(t)\| \leq c\epsilon^{t/T} \max\left\{\epsilon^{(\beta-T)/\tau}, \epsilon^{(\tau-T)/\tau}\right\}.$$

Vào năm 2014, Nguyễn Huy Tuấn và Đặng Đức Trọng đã xét bài toán (1) với A thỏa mãn các điều kiện như Phan Thành Nam. Với $v \in H$, họ đưa ra định nghĩa

$$A_\varepsilon(v) = \sum_{k=0}^{\infty} \ln^+\left(\frac{1}{\varepsilon\lambda_k + e^{-\lambda_k}}\right)\langle v, \phi_k\rangle \phi_k$$

trong đó $\ln^+(x) = \max\{\ln x, 0\}$. Hơn nữa, hai tác này giả sử rằng f thỏa mãn các điều kiện

(F0) Tồn tại hằng số $L_0 \geqslant 0$ sao cho

$$\langle f(t,w_1) - f(t,w_2), w_1 - w_2\rangle + L_0\|w_1 - w_2\|^2 \geqslant 0.$$

(F1) Với $r > 0$, tồn tại hằng số $K(r) \geqslant 0$ sao cho $f : \mathbb{R} \times H \to H$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz địa phương

$$\|f(t,w_1) - f(t,w_2)\| \leqslant K(r)\|w_1 - w_2\|$$

với $w_1, w_2 \in H$ sao cho $\|w_i\| \leqslant r, i = 1, 2.$

(F2) $f(t,0) = 0$ với mọi $t \in [0,T]$.

Nguyễn Huy Tuấn và Đặng Đức Trọng đã chỉnh hóa bài toán (1) bằng bài toán tựa đảo sau

$$\begin{cases} \dfrac{dv_\varepsilon(t)}{dt} + A_\varepsilon v_\varepsilon(t) = f(v_\varepsilon(t), t), \quad 0 < t < T, \\ v_\varepsilon(T) = \varphi. \end{cases} \tag{7}$$

Các tác giả này cần đến điều kiện

$$E^2 = \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 e^{2\lambda_k} \left|\langle u(s), \phi_k\rangle\right|^2 < \infty.$$

Khi đó, họ đạt được tốc độ hội tụ của nghiệm chỉnh hóa về nghiệm chính xác có dạng $\varepsilon^{t/T}\left(\ln\frac{e}{\varepsilon}\right)^{t/T-1}$.

Đến năm 2015, Đinh Nho Hào và Nguyễn Văn Đức đã chỉnh hóa bài toán (1) bằng bài toán biên không địa phương

$$\begin{cases} v_t + Av = f(t, v(t)), & 0 < t < T, \\ \alpha v(0) + v(T) = \varphi, & 0 < \alpha < 1. \end{cases} \tag{8}$$

Hai tác giả trên xét hàm f thỏa mãn điều kiện Lipschitz

$$\|f(t, w_1) - f(t, w_2)\| \leqslant k\|w_1 - w_2\| \tag{9}$$

với hằng số Lipschitz $k \in [0, 1/T)$ độc lập với t, w_1, w_2.

Hơn nữa, với giả thiết $\|u(0)\| \leqslant E, E > \varepsilon$, hai tác giả này đã đưa ra đánh giá sai số kiểu Hölder

$$\|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\| \leqslant C\varepsilon^{t/T} E^{1-t/T}, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{10}$$

Đinh Nho Hào và Nguyễn Văn Đức là hai tác giả đầu tiên đạt được tốc độ dạng Hölder khi chỉnh hóa bài toán (1) chỉ với điều kiện $\|u(0)\| \leq E$. Tuy nhiên, điều này chỉ đúng với hằng số Lipschitz $k \in [0, 1/T)$.

Bên cạnh phương trình parabolic nửa tuyến tính, phương trình Bürgers ngược thời gian cũng được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu. Abazari R., Borhanifar A., Srivastava V. K., Tamsir M., Bhardwaj U., Sanyasiraju Y., Zhanlav T., Chuluunbaatar O., Ulziibayar V., Zhu H., Shu H., Ding M. đã đưa ra phương pháp số cho phương trình Bürgers. Allahverdi N. và các cộng sự xét ứng dụng của phương trình Bürgers trong điều khiển tối ưu. Lundvall J. và các cộng sự xét ứng dụng của phương trình Bürgers trong đồng hóa số liệu. Carasso A. S., Ponomarev S. M. dùng phương pháp lồi logarithm để đưa ra đánh giá ổn định cho phương trình Bürgers.

Khác với phương trình parabolic bậc nguyên ngược thời gian, phương trình parabolic bậc phân thứ ngược thời gian xuất hiện muộn hơn nhưng cũng là một hướng nghiên cứu hết sức sôi động trong những năm gần đây. Các nhà toán học đã đạt được nhiều kết quả quan trọng theo hướng nghiên cứu này. Chẳng hạn, Sakamoto K. và Yamamoto M. đã đạt được kết quả về sự tồn tại và tính duy nhất ngược của nghiệm. Xua X. và các cộng sự đã đạt được kết quả đánh giá ổn định bằng phương pháp đánh giá Carleman. Các phương pháp chỉnh hoá và các phương pháp số hữu hiệu cho phương trình parabolic bậc phân thứ ngược thời gian cũng đã được các nhà toán học đề xuất như phương pháp bài toán giá trị biên không địa phương, phương pháp chỉnh hóa Tikhonov, phương pháp chặt cụt, phương pháp tựa đảo, phương pháp sai phân, phương pháp phần tử hữu hạn, phương pháp biến phân và một số phương pháp khác.

7.2. Cấu trúc luận án

Nội dung chính của luận án được trình bày trong 4 chương.

Chương 1 trình bày các kiến thức cơ sở và một số kiến thức bổ trợ cho các chương sau.

Chương 2 trình bày các kết quả về đánh giá ổn định và chỉnh hóa Tikhonov có hiệu chỉnh cho phương trình parabolic bậc nguyên nửa tuyến tính ngược thời gian.

Chương 3 trình bày các kết quả về đánh giá ổn định cho phương trình Bürgers ngược thời gian.

Chương 4 trình bày phương pháp chỉnh hóa cho phương trình parabolic bậc phân thứ tuyến tính ngược thời gian bằng phương pháp làm nhuyễn.

Các kết quả chính của luận án đã được trình bày tại seminar của Bộ môn Giải tích thuộc Viện sư phạm tự nhiên - Trường Đại học Vinh, seminar của phòng phương trình vi phân của Viện toán học thuộc Viện hàn lâm khoa học và công nghệ Việt Nam, Hội thảo khoa học "Tối ưu và Tính toán khoa học lần thứ 15" tại Ba Vì ngày 20-22/4/2017. Kết quả trong luận án cũng đã được báo cáo tại Đại hội Toán học Việt Nam lần thứ 9 tại Nha Trang 14-18/8/2018.

Các kết quả này cũng đã được viết thành 04 bài báo trong đó có 01 bài đăng trên tạp chí thuộc danh mục SCI (*Inverse Problems*), 01 bài đăng trên tạp chí thuộc danh mục SCIE (*Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*), 02 bài (01 bài đăng và 01 bài đã được nhận đăng) trên tạp chí thuộc danh mục Scopus (*Acta Mathematica Vietnamica*).

CHƯƠNG 1

KIẾN THỨC CƠ SỞ

1.1 Khái niệm bài toán đặt không chỉnh, đánh giá ổn định và chỉnh hóa

Mục này, trình bày các khái niệm bài toán đặt không chỉnh, đánh giá ổn định và chỉnh hóa.

1.2 Một số kết quả bổ trợ

Mục này, nêu một số kiến thức cần dùng cho các chương sau.

Định nghĩa 1.2.3. Hàm Gamma Γ được xác định bởi công thức

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \tag{1.1}$$

với z thuộc nửa mặt phẳng bên phải $\mathrm{Re} z > 0$ của mặt phẳng phức.

Định nghĩa 1.2.5. Hàm $E_{\alpha,\beta}(z)$ được xác định bởi

$$E_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, z \in \mathbb{C},$$

trong đó $\alpha > 0, \beta > 0$ và Γ là hàm Gamma được gọi là *hàm Mittag-Leffler*.

Định nghĩa 1.2.7. Cho f là hàm khả vi liên tục trên $[0, T]$ $(T > 0)$. Đạo hàm bậc phân thứ Caputo với bậc $\gamma \in (0, 1)$ của hàm f trên $(0, T]$ được xác định như sau

$$\frac{d^\gamma}{dt^\gamma} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t (t-s)^{-\gamma} \frac{d}{ds} f(s) ds,\ 0 < t \leqslant T.$$

Định nghĩa 1.2.11. Hàm $D_\nu(x) = \prod_{j=1}^{n} \frac{sin(\nu x_j)}{x_j}$ $(\nu > 0)$ được gọi là *nhân Dirichlet*.

CHƯƠNG 2

KẾT QUẢ ỔN ĐỊNH CHO PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC NỬA TUYẾN TÍNH NGƯỢC THỜI GIAN

Trong chương này, chúng tôi đề xuất các kết quả đánh giá ổn định cho phương trình parabolic nửa tuyến tính ngược thời gian. Sau đó, chúng tôi dùng phương pháp Tikhonov có hiệu chỉnh để chỉnh hóa phương trình này. Kết quả trong chương này của chúng tôi là những kết quả đầu tiên đưa ra đánh giá ổn định, cũng như chỉnh hóa cho phương trình parabolic nửa tuyến tính ngược thời gian (hằng số Lipschitz không âm tùy ý) chỉ với điều kiện bị chặn của nghiệm tại $t = 0$. Các kết quả này đã được công bố trong hai bài báo:

- Duc N. V. , Thang N. V. (2017), Stability results for semi-linear parabolic equations backward in time, *Acta Mathematica Vietnamica* 42, 99-111.

- Hào D. N., Duc N. V. and Thang N. V. (2018), Backward semi-linear parabolic equations with time-dependent coefficients and locally Lipschitz source, *J. Inverse Problems* 34, 055010, 33 pp.

2.1 Đánh giá ổn định cho phương trình parabolic nửa tuyến tính ngược thời gian với hệ số phụ thuộc thời gian

Cho H là không gian Hilbert với tích vô hướng $\langle \cdot, \cdot \rangle$ và chuẩn $\| \cdot \|$. Giả sử rằng các điều kiện sau thỏa mãn:

(A1) $A(t)$ là toán tử tuyến tính xác định dương, tự liên hợp và không bị chặn trên H với mỗi $t \in [0, T]$.

(A2) Nếu $u_i(t) : [0,T] \to H, i = 1,2$ là hai nghiệm của phương trình

$$Lu = \frac{du}{dt} + A(t)u = f(t,u), \quad 0 < t \le T, \tag{2.1}$$

thì tồn tại hàm liên tục $a_1(t)$ trên $[0,T]$ với $c \leqslant a_1(t) \leqslant c_1, \forall t \in [0,T]$, và tồn tại hằng số c_2 sao cho $w = u_1 - u_2$ thỏa mãn bất đẳng thức

$$-\frac{d}{dt}\langle A(t)w, w\rangle \geqslant -2\langle A(t)w, w_t\rangle - a_1(t)\langle A(t)w, w\rangle - c_2\|w\|^2.$$

Với $t \in [0,T]$, đặt

$$a_2(t) = \exp\left(\int_0^t a_1(\tau)d\tau\right), \quad a_3(t) = \int_0^t a_2(\xi)d\xi$$

và

$$\nu(t) = \frac{a_3(t)}{a_3(T)}. \tag{2.2}$$

Bây giờ, chúng tôi đưa ra các đánh giá ổn định. Đầu tiên, là các đánh giá ổn định với ràng buộc của nghiệm trên miền $[0,T]$. Giả sử f thỏa mãn điều kiện (F1) như sau.

(F1) Với $r > 0$, tồn tại hằng số $K(r) \geqslant 0$ sao cho $f : [0,T] \times H \to H$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz địa phương

$$\|f(t,w_1) - f(t,w_2)\| \leqslant K(r)\|w_1 - w_2\|$$

với $w_1, w_2 \in H$ sao cho $\|w_i\| \leqslant r, i = 1,2$.

Định lý 2.1.2. *Giả sử rằng $A(t)$ thỏa mãn các điều kiện (A1),(A2) và f thỏa mãn điều kiện (F1). Cho u_1 và u_2 là hai nghiệm của bài toán* (2.1) *thỏa mãn $\|u_i(T) - \varphi\| \leqslant \varepsilon$ với $\varphi \in H$ và ràng buộc*

$$\|u_i(t)\| \leqslant E, \quad t \in [0,T], \quad i = 1,2, \quad 0 < \varepsilon < E. \tag{2.3}$$

Khi đó, với $t \in [0,T]$ ta có

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leqslant 2\varepsilon^{\nu(t)}E^{1-\nu(t)}\exp\Big(c_3\nu(t)(1-\nu(t))\Big), \tag{2.4}$$

trong đó

$$c_3 = \left(\frac{1}{2}K^2T + |c_2|T + 2K\right)c_4c_5$$

với $c_4 = \frac{a_3(T)}{T}, c_5 = \max\{\exp|c_1|T, \exp|c|T\}$ *và* $K = K(E)$ *là hằng số Lipschitz được xác định bởi (F1).*

Định lý 2.1.2 không đưa ra bất kì thông tin nào về sự phụ thuộc liên tục của nghiệm bài toán (2.1) tại $t = 0$ theo dữ kiện cuối. Để thiết lập sự phụ thuộc này, chúng tôi đòi hỏi nhiều điều kiện hơn đối với toán tử $A(t)$ và tính bị chặn mạnh hơn của nghiệm. Chúng tôi đạt được kết quả sau.

Định lý 2.1.7. *Cho* $D(A) \subset H$ *và* $A : D(A) \to H$ *là toán tử tuyến tính xác định dương, tự liên hợp và không bị chặn sao cho với hệ cơ sở trực chuẩn* $\{\phi_i\}_{i\geqslant 1}$ *trong* H *thì* A *có hệ giá trị riêng* $\{\lambda_i\}_{i\geqslant 1}$ *thỏa mãn* $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ *và* $\lim\limits_{i\to+\infty} \lambda_i = +\infty$. *Giả sử* $a(t)$ *là hàm khả vi liên tục trên* $[0, T]$ *sao cho* $0 < a_0 \leqslant a(t) \leqslant a_1$, $M = \max\limits_{t\in[0,T]} |a_t(t)| < +\infty$ *và* f *thỏa mãn điều kiện (F1),* u_1 *và* u_2 *là hai nghiệm của bài toán* $u_t + a(t)Au = f(t, u(t)), 0 < t \leqslant T$ *thỏa mãn* $\|u_i(T) - \varphi\| \leqslant \varepsilon, \quad i = 1, 2$. *Khi đó, ta có các đánh giá ổn định sau.*

i) Nếu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2\beta} \langle u_i(t), \phi_n\rangle^2 \leqslant \overline{E}^2, t \in [0, T], i = 1, 2, \tag{2.5}$$

với $\overline{E} > \varepsilon$ *và* $\beta > 0$ *thì*

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq C_1(t)\varepsilon^{\nu(t)}\overline{E}^{1-\nu(t)} \left(\left(\ln \frac{\overline{E}}{\varepsilon} \right)^{-\beta} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\overline{E}}} \right)^{1-\nu(t)}, \ t \in [0, T],$$

trong đó $\nu(t) = \dfrac{\int_0^t a(\xi)d\xi}{\int_0^T a(\xi)d\xi}$ *và* $C_1(t)$ *là hàm bị chặn trên* $[0, T]$.

ii) Nếu

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{2\gamma\lambda_n} \langle u_i(t), \phi_n\rangle^2 \leqslant \widetilde{E}^2, t \in [0, T], i = 1, 2 \tag{2.6}$$

với $\widetilde{E} > \varepsilon$ *và* $\gamma > 0$ *thì*

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leqslant C_2(t)\varepsilon^{\nu_1(t)}\widetilde{E}^{1-\nu_1(t)}, \ t \in [0, T],$$

trong đó $\nu_1(t) = \dfrac{\gamma + \int_0^t a(\xi)d\xi}{\gamma + \int_0^T a(\xi)d\xi}$ *và* $C_2(t)$ *là hàm bị chặn trên* $[0, T]$.

Trong Định lý 2.1.7, chúng tôi đòi hỏi tính bị chặn của nghiệm trên toàn miền $t \in [0, T]$. Để đạt kết quả tốt hơn chỉ với tính bị chặn của nghiệm tại $t = 0$, chúng tôi giả thiết thêm rằng

(F2) $f(t,0) = 0$ với mọi $t \in [0,T]$.

(F3) Tồn tại hằng số $L_1 \geqslant 0$ sao cho

$$\langle f(t,w_1) - f(t,w_2), w_1 - w_2 \rangle \leqslant L_1 \|w_1 - w_2\|^2.$$

Định lý 2.1.11. *Giả sử toán tử $A(t)$ thỏa mãn các điều kiện (A1),(A2) và f thỏa mãn các điều kiện (F1)–(F3). Nếu u_1 và u_2 là hai nghiệm của bài toán (2.1) với ràng buộc $\|u_i(T) - \varphi\| \leqslant \varepsilon$ và*

$$\|u_i(0)\| \leqslant E, \quad i = 1,2,$$

với $0 < \varepsilon < E$, thì

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leqslant 2\exp\Big(\Big(\frac{1}{2}K^2T + |c_2|T + 2K\Big) c_4c_5\nu(t)(1-\nu(t))\Big) \\ \times \varepsilon^{\nu(t)}E^{1-\nu(t)}, \forall t \in [0,T]$$

trong đó $c_4 = \frac{a_3(T)}{T}, c_5 = \max\{\exp|c_1|T, \exp|c|T\}$ và $K = K(e^{L_1T}E)$ là hằng số Lipschitz xác định trong (F1).

Trong các phần trước, chúng tôi không đưa ra bất kỳ mối quan hệ nào giữa toán tử $A(t)$ và hàm f. Để mở rộng lớp hàm chứa hàm f thay vì (F1), chúng tôi giả sử:

(F4) Với mỗi $r > 0$ và và u_1, u_2 là hai nghiệm của bài toán (2.1) với $\langle A(t)u_i, u_i\rangle \leqslant r^2, i = 1,2,\ t \in [0,T]$, thì tồn tại hằng số $K(r) \geqslant 0$ sao cho $f : [0,T] \times H \to H$ thỏa mãn điều kiện

$$\|f(t,u_1) - f(t,u_2)\| \leqslant K(r)\|u_1 - u_2\|.$$

(F5) Tồn tại hằng số $L_2 \geqslant 0$ sao cho với u là nghiệm của bài toán (2.1), ta có

$$\langle A(t)u, f(t,u)\rangle \leqslant L_2 \langle A(t)u, u\rangle.$$

Chúng tôi đạt được các kết quả sau

Định lý 2.1.14. *Giả sử rằng các điều kiện (A1),(A2), (F2)–(F5) là thỏa mãn và tồn tại hằng số $L_3 > 0$ sao cho*

$$\langle A(0)u(0), u(0)\rangle \geqslant L_3\|u(0)\|^2.$$

Nếu u_1, u_2 *là hai nghiệm của bài toán (2.1) với ràng buộc* $\|u_i(T) - \varphi\| \leqslant \varepsilon$ *và*

$$\langle A(0)u_i(0), u_i(0)\rangle \leqslant E_1^2, \quad i = 1, 2 \tag{2.7}$$

với $0 < \varepsilon < E_1$*, thì với* $t \in [0, T]$ *tồn tại hàm bị chặn* $\widetilde{C}(t)$ *sao cho*

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leqslant \widetilde{C}(t)\varepsilon^{\nu(t)} E_1^{1-\nu(t)}. \tag{2.8}$$

Định lý 2.1.15. *Cho toán tử* A *và hàm* $a(t)$ *thỏa mãn các điều kiện như trong Định lý 2.1.7. Giả sử rằng* f *thỏa mãn các điều kiện (F2)–(F5), và* u_1, u_2 *là hai nghiệm của bài toán* $u_t + a(t)Au = f(t, u(t)), 0 < t \leqslant T$ *sao cho* $\|u_i(T) - \varphi\| \leqslant \varepsilon, \quad i = 1, 2$. *Khi đó, các đánh giá sau đây đúng.*

i) Nếu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2\beta} \langle u_i(0), \phi_n\rangle^2 \leqslant \overline{E}^2, i = 1, 2 \tag{2.9}$$

với $\overline{E} > \varepsilon$ *và* $\beta \geqslant \dfrac{1}{2}$*, thì tồn tại hàm bị chặn* $\overline{C}(t)$ *trên* $[0, T]$ *sao cho*

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leqslant \overline{C}(t)\varepsilon^{\nu(t)}\overline{E}^{1-\nu(t)} \left(\left(\ln \frac{\overline{E}}{\varepsilon} \right)^{-\beta} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\overline{E}}} \right)^{1-\nu(t)}, \tag{2.10}$$

trong đó $\nu(t) = \dfrac{\int_0^t a(\xi)d\xi}{\int_0^T a(\xi)d\xi}$.

ii) Nếu

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{2\gamma\lambda_n} \langle u_i(0), \phi_n\rangle^2 \leqslant \widetilde{E}^2, i = 1, 2 \tag{2.11}$$

với $\widetilde{E} > \varepsilon$ *và* $\gamma > 0$*, thì tồn tại hàm bị chặn* $\overline{C}_1(t)$ *trên* $[0, T]$ *sao cho*

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leqslant \overline{C}_1(t)\varepsilon^{\nu_1(t)}\widetilde{E}^{1-\nu_1(t)}, \tag{2.12}$$

trong đó $\nu_1(t) = \dfrac{\gamma + \int_0^t a(\xi)d\xi}{\gamma + \int_0^T a(\xi)d\xi}$.

2.2 Các ví dụ

Trong mục này, chúng tôi trình bày một số ví dụ để minh họa cho các giả thiết mà chúng tôi đặt ra trong mục 2.1. Các ví dụ này cũng chỉ ra rằng các định lý về đánh giá ổn định trong mục 2.1 là ứng dụng được cho một số bài toán vật lý quan trọng như bài toán trong mô hình sinh lý thần kinh của hệ thống tế bào thần kinh, bài toán trong phản ứng nhiệt, bài toán dân số, bài toán Ginzburg-Landau, bài toán trong động học enzyme.

2.3 Đánh giá ổn định cho phương trình parabolic nửa tuyến tính ngược thời gian với hệ số không phụ thuộc thời gian

Trong phần 1.1, chúng tôi đã đưa ra các đánh giá ổn định cho phương trình parabolic nửa tuyến tính ngược thời gian với hệ số phụ thuộc thời gian và nguồn Lipschitz địa phương. Từ các kết quả này chúng ta suy ra được các đánh giá ổn định cho phương trình parabolic nửa tuyến tính ngược thời gian với hệ số không phụ thuộc thời gian và nguồn Lipschitz toàn cục. Tuy nhiên, trong Định lý 2.1.2 và Định lý 2.1.7 để đưa ra đánh giá ổn định thì chúng tôi cần tới điều kiện bị chặn của nghiệm trên toàn miền $[0,T]$. Trong các Định lý 2.1.11, Định lý 2.1.14 và Định lý 2.1.15 để có đánh giá ổn định chỉ với điều kiện bị chặn của nghiệm tại $t=0$ thì chúng tôi cần điều kiện hàm f thỏa mãn (F2), tức là $f(t,0)=0$. Do đó, mục đích của phần này là đưa ra đánh giá ổn định cho phương trình parabolic nửa tuyến tính ngược thời gian với hệ số không phụ thuộc thời gian và nguồn thỏa mãn điều kiện Lipschitz

$$\|f(t,w_1)-f(t,w_2)\| \le k\|w_1-w_2\|, \quad w_1,w_2\in H, \tag{2.13}$$

với hằng số thực không âm k độc lập với t, w_1 và w_2, chỉ với điều kiện bị chặn của nghiệm tại $t=0$.

Cho A là toán tử tuyến tính không bị chặn, xác định dương, tự liên hợp với miền xác định $D(A)\subset H$. Xét phương trình parabolic nửa tuyến tính ngược thời gian

$$\begin{cases} u_t + Au = f(t,u), \quad 0<t\le T, \\ \|u(T)-\varphi\| \le \varepsilon \end{cases} \tag{2.14}$$

trong đó φ là dữ kiện cuối của bài toán được xác định qua đo đạc với mức nhiễu ε và nghiệm $u\in C^1((0,T),H)\cap C([0,T],H)$.

Bây giờ, chúng tôi trình bày các kết quả đánh giá ổn định.

Định lý 2.3.1. *Giả sử rằng u_1 và u_2 là các nghiệm của bài toán* (2.14) *và hàm f thỏa mãn điều kiện* (2.13). *Nếu $u_i(0) \in D(A)$, $i = 1, 2$, và*

$$\|u_i(0)\| \le E, \quad i = 1, 2, \tag{2.15}$$

với $E > \varepsilon$, thì với mọi $t \in [0, T]$ ta có

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \le 2\varepsilon^{t/T} E^{1-t/T} \exp\left[\left(2k + \frac{1}{4}k^2(T+t)\right)\frac{t(T-t)}{T}\right]. \tag{2.16}$$

Định lý 2.3.3. *Giả sử rằng có một cơ sở trực chuẩn $\{\phi_i\}_{i\geqslant 1}$ trong H tương ứng với các giá trị riêng $\{\lambda_i\}_{i\geqslant 1}$ của A sao cho $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ và $\lim\limits_{i\to+\infty} \lambda_i = +\infty$. Giả sử rằng $f : [0, T] \times H \to H$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz* (2.13), *u_1 và u_2 là các nghiệm của bài toán* (2.14) *với $u_i(0) \in D(A)$, $i = 1, 2$.*

i) Nếu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2\beta} \langle u_i(0), \phi_n\rangle^2 \leqslant E_1^2, i = 1, 2,\ \beta > 0 \tag{2.17}$$

với $E_1 > \varepsilon$ thì với mọi $t \in [0, T]$, tồn tại hàm bị chặn $C(t)$ sao cho

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \le C(t)\varepsilon^{t/T} E_1^{1-t/T}\left(\left(\ln\frac{E_1}{\varepsilon}\right)^{-\beta} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{E_1}}\right)^{1-t/T}. \tag{2.18}$$

ii) Nếu

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{2\gamma\lambda_n} \langle u_i(0), \phi_n\rangle^2 \leqslant E_2^2, i = 1, 2,\ \gamma > 0 \tag{2.19}$$

với $E_2 > \varepsilon$ thì với mọi $t \in [0, T]$, tồn tại hàm bị chặn $C_1(t)$ sao cho

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \le C_1(t)\varepsilon^{\frac{\gamma+t}{\gamma+T}} E_2^{1-\frac{\gamma+t}{\gamma+T}}. \tag{2.20}$$

2.4 Chỉnh hóa phương trình parabolic nửa tuyến tính ngược thời gian bằng phương pháp Tikhonov

Trong phần này, ngoài các giả thiết (A1) và (A2), chúng tôi giả sử rằng $(A(t) + I))^{-1}$ là khả vi liên tục mạnh. Hơn nữa, $-A(t)$ sinh ra duy nhất hệ tiến hóa $U(t, s), 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ là một họ các toán tử tuyến tính bị chặn từ H vào chính nó với $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, liên tục theo hai biến.

Chúng ta sẽ chỉnh hóa bài toán

$$\begin{cases} u_t + A(t)u = f(t,u), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ \|u(T) - \varphi\| \leqslant \varepsilon \end{cases} \tag{2.21}$$

bằng phương pháp Tikhonov có hiệu chỉnh.

Đặt $v(t)$ là nghiệm của bài toán

$$v_t + A(t)v = f(t,v), \quad 0 < t \leqslant T,\ v(0) = g \in D(A(t)). \tag{2.22}$$

Để nhấn mạnh sự phụ thuộc của nghiệm v vào g, chúng tôi viết $v(t,g)$ thay vì $v(t)$. Nếu điều kiện $\|u(0)\| \leqslant E$ được thỏa mãn và f thỏa mãn (F1) - (F3), ta xét cực tiểu phiếm hàm Tikhonov

$$J_\alpha(g) = \|v(T,g) - \varphi\|^2 + \alpha\|g\|^2 \tag{2.23}$$

với $g \in D(A(t))$ và α là tham số hiệu chỉnh. Tuy nhiên, ta không biết được cực tiểu của bài toán này tồn tại hay không. Do đó, chúng tôi đã hiệu chỉnh bằng cách chọn nghiệm gần đúng của cực tiểu phiếm hàm. Thật vậy, đặt

$$I = \inf_{g \in D(A(t))} J_\alpha(g), \tag{2.24}$$

và với $\tau > 0$ cố định chọn $\overline{g} \in D(A(t))$ sao cho

$$J_\alpha(\overline{g}) \leqslant I + \tau\varepsilon^2. \tag{2.25}$$

Hơn nữa, nếu điều kiện $\langle A(0)u(0), u(0)\rangle \leqslant E_1^2$ thỏa mãn và f thỏa mãn điều kiện (F2) - (F5), ta xét phiếm hàm Tikhonov

$$J_\beta(g) = \|v(T,g) - \varphi\|^2 + \beta \langle A(0)g, g\rangle, \quad \beta > 0, \tag{2.26}$$

trong đó β là tham số hiệu chỉnh. Đặt

$$I_1 = \inf_{g \in D(A(t))} J_\beta(g). \tag{2.27}$$

Với $\tau > 0$ cố định, chọn $\widetilde{g} \in D(A(t))$ sao cho

$$J_\beta(\widetilde{g}) \leqslant I_1 + \tau\varepsilon^2, \tag{2.28}$$

thì bài toán (2.28) luôn có nghiệm.

Định lý 2.4.2. *Giả sử rằng ánh xạ f là nửa liên tục, biến các tập bị chặn* *thành các tập bị chặn và thỏa mãn các điều kiện (F1)–(F3). Nếu bài toán* (2.21) *có nghiệm là $u(t)$ với $u(0) \in D(A(t))$ thỏa mãn*

$$\|u(0)\| \leqslant E$$

và $v(t, \overline{g})$ là nghiệm của bài toán (2.22) với $g = \overline{g}$, thì với $\alpha = \left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^2$ tồn tại hằng số C sao cho

$$\|u(t) - v(t, \overline{g})\| \leqslant C\varepsilon^{\nu(t)} E^{1-\nu(t)}, \quad t \in [0, T].$$

Định lý 2.4.3. *Giả sử rằng ánh xạ f là nửa liên tục, biến các tập bị chặn thành các tập bị chặn và thỏa mãn (F2)–(F5) và $\langle A(0)u(0), u(0)\rangle \geqslant L_3\|u(0)\|^2$ với $u(t)$ là nghiệm của $u_t + A(t)u = f(t, u),\ 0 < t \leqslant T$. Nếu bài toán* (2.21) *có nghiệm là $u(t)$ với $u(0) \in D(A(t))$ thỏa mãn*

$$\langle A(0)u(0), u(0)\rangle \leqslant E_1^2$$

và $v(t, \widetilde{g})$ là nghiệm của bài toán (2.22) với $g = \widetilde{g}$, thì chọn $\beta = \left(\frac{\varepsilon}{E_1}\right)^2$ tồn tại hằng số C_1 sao cho

$$\|u(t) - v(t, \widetilde{g})\| \leq C_1\varepsilon^{\nu(t)} E_1^{1-\nu(t)}, \quad t \in [0, T].$$

2.5 Kết luận Chương 2

Trong Chương 2, chúng tôi thu được các kết quả sau:
- Đưa ra các đánh giá ổn định nghiệm cho phương trình parabolic nửa tuyến tính ngược thời gian với hệ số phụ thuộc thời gian với các điều kiện khác nhau của hàm nguồn và các ràng buộc khác nhau của nghiệm. Đưa ra các ví dụ để minh họa cho các giả thiết của toán tử $A(t)$ và hàm nguồn Lipschitz địa phương f.
- Đưa ra các đánh giá ổn định nghiệm cho phương trình parabolic nửa tuyến tính ngược thời gian với hệ số không phụ thuộc thời gian.
- Chỉnh hóa phương trình parabolic nửa tuyến tính ngược thời gian với hệ số phụ thuộc thời gian bằng phương pháp Tikhonov có hiệu chỉnh.

CHƯƠNG 3

CÁC KẾT QUẢ ĐÁNH GIÁ ỔN ĐỊNH CHO PHƯƠNG TRÌNH BÜRGERS NGƯỢC THỜI GIAN

Trong chương này, chúng tôi đưa ra các đánh giá ổn định cho phương trình Bürgers với tốc độ dạng Hölder. Các kết quả này là tổng quát hóa và cải tiến các kết quả của Carasso và Ponomarev. Cụ thể, chúng tôi chứng minh các kết quả đánh giá ổn định cho phương trình tổng quát hơn dưới các điều kiện yếu hơn so với các điều kiện được đặt ra bởi các tác giả kể trên. Các kết quả này đã được công bố trong bài báo:
Hào D. N., Duc N. V. and Thang N. V.(2015), Stability estimates for Burgers-type equations backward in time, *J. Inverse and Ill-Posed Problems* 23, 41-49.

Cho $T > 0$. Đặt

$$D := \{(x,t) : \ 0 < x < 1, \ 0 < t < T\}$$

và $\overline{D}$ là bao đóng của D.
Trong chương này, để đơn giản kí hiệu, ta viết $\|\cdot\|$ thay cho $\|\cdot\|_{L^2(0,1)}$.

3.1 Các kết quả đánh giá ổn định cho phương trình Bürgers ngược thời gian với hệ số phụ thuộc thời gian

Trong mục này, chúng tôi đưa ra đánh giá ổn định cho phương trình Bürgers với hệ số phụ thuộc thời gian sau

$$u_t = (a(x,t)u_x)_x - d(x,t)uu_x + f(x,t), \quad (x,t) \in D, \tag{3.1}$$

$$u(0,t) = g_0(t), \quad u(1,t) = g_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3.2}$$

trong đó $a(x,t)$, $d(x,t)$, $g_0(t)$, $g_1(t)$, $f(x,t)$ là các hàm trơn, $a(x,t) \geqslant \overline{a} > 0, (x,t) \in \overline{D}$, $a_t(x,t)$, $d(x,t)$ và $d_x(x,t)$ bị chặn trên $\overline{D}$.

Định lý 3.1.1. *Giả sử $u_1(x,t)$ và $u_2(x,t)$ là hai nghiệm của bài toán* (3.1),(3.2) *thỏa mãn*

$$\max_{(x,t)\in\overline{D}} \{|u_i|, |u_{ix}|\} \leqslant E, \ i = 1, 2. \tag{3.3}$$

Đặt

$$m = \max_{(x,t)\in\overline{D}} \frac{a_t(x,t) + 2(dE)^2}{a(x,t)}$$

và

$$\mu(t) = \frac{t}{T} \text{ nếu } m = 0, \quad \mu(t) = \frac{e^{mt} - 1}{e^{mT} - 1} \text{ nếu } m \neq 0. \tag{3.4}$$

Nếu $\|u_1(\cdot,T) - u_2(\cdot,T)\| \leqslant \delta$, thì tồn tại hàm bị chặn $k_1(t)$ sao cho

$$\|u_1(\cdot,t) - u_2(\cdot,t)\| \leqslant k_1(t)\delta^{\mu(t)}E^{1-\mu(t)}, \ \forall t \in [0,T]. \tag{3.5}$$

3.2 Các kết quả đánh giá ổn định cho phương trình Bürgers ngược thời gian với hệ số không phụ thuộc thời gian

Trong mục này, chúng tôi đưa ra đánh giá ổn định cho phương trình Bürgers ngược thời gian với hệ số không phụ thuộc thời gian.

Định lý 3.2.1. *Giả sử $u_1(x,t)$ và $u_2(x,t)$ là các nghiệm cổ điển của bài toán*

$$u_t = \nu u_{xx} - \alpha u u_x + f(x,t), \quad (x,t) \in D, \tag{3.6}$$

$$u(0,t) = g_0(t), \quad u(1,t) = g_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3.7}$$

ở đây $\nu > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, và g_0, g_1, f là các hàm trơn. Nếu u_1, u_2 thỏa mãn

$$\max_{(x,t)\in\overline{D}} \{|u_i|, |u_{ix}|, |u_{it}|\} \leqslant E, \ i = 1, 2 \tag{3.8}$$

và $\|u_1(\cdot,T) - u_2(\cdot,T)\| \leqslant \delta$, thì tồn tại hàm bị chặn $k_2(t)$ sao cho

$$\|u_1(\cdot,t) - u_2(\cdot,t)\| \leqslant k_2(t)\delta^{\frac{t}{T}}E^{1-\frac{t}{T}}, \quad t \in [0,T]. \tag{3.9}$$

3.3 Kết luận Chương 3

Trong Chương 3, chúng tôi đã thu được các kết quả sau:
- Đưa ra đánh giá ổn định dạng Hölder cho phương trình Bürgers ngược thời gian với hệ số phụ thuộc thời gian.
- Đưa ra đánh giá ổn định dạng Hölder cho phương trình Bürgers ngược thời gian với hệ số không phụ thuộc thời gian.

CHƯƠNG 4

CHỈNH HÓA PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC BẬC PHÂN THỨ NGƯỢC THỜI GIAN

Xét bài toán sau trong không gian $\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma} = \Delta u, \ x \in \mathbb{R}^n, t \in (0,T) \\ u(x,T) = \varphi(x), \ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{4.1}$$

trong đó $0 < \gamma < 1$, φ là dữ kiện cuối chính xác của bài toán nhưng ta không được biết mà chỉ biết dữ kiện nhiễu (qua đo đạc) φ^ε với mức sai số

$$\|\varphi^\varepsilon(\cdot) - \varphi(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leqslant \varepsilon \tag{4.2}$$

đã biết.

Trong chương này, chúng tôi sẽ chỉnh hóa bài toán (4.1)-(4.2) bởi bài toán

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^\gamma v^\nu}{\partial t^\gamma} = \Delta v^\nu, \ x \in \mathbb{R}^n, t \in (0,T) \\ v^\nu(x,T) = S_\nu(\varphi^\varepsilon(x)), \ x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{4.3}$$

trong đó $\nu > 0$ và $S_\nu(\varphi^\varepsilon(x))$ là tích chập của $\varphi^\varepsilon(x)$ với nhân Dirichlet.

Các kết quả trong chương này đã được viết thành bài báo:
Duc N. V., Muoi P. Q., Thang N. V., A molification method backward time-fractional heat equation, *Acta Math. Vietnam.* (Đã được nhận đăng)

4.1 Tính đặt chỉnh của bài toán chỉnh hóa

Trong mục này, chúng tôi chứng minh bài toán (4.3) là đặt chỉnh.

Định lý 4.1.3. *Với $\varphi^\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^n)$, bài toán (4.3) có duy nhất nghiệm $v^\nu \in L^2(\mathbb{R}^n)$ và tồn tại hằng số C_3 sao cho*

$$\|v^\nu(\cdot,t)\| \le C_3(1+\nu^2)\|\varphi^\varepsilon\|, \ t \in [0,T].$$

4.2 Tốc độ hội tụ

Trong phần này, chúng tôi nêu quy tắc chọn tham số tiên nghiệm, hậu nghiệm và đưa ra tốc độ hội tụ dạng Hölder của nghiệm chỉnh hóa về nghiệm chính xác.

Định lý 4.2.3. *Nếu $u(x,t)$ là nghiệm của (4.1) thỏa mãn*

$$\|u(\cdot,0)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq E \tag{4.4}$$

thì với $\nu = \left(\dfrac{E}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{s+2}}$ *tồn tại hằng số* $\overline{C}_1 > 0$ *sao cho*

$$\|v^\nu(\cdot,t) - u(\cdot,t)\|_{H^l(\mathbb{R})} \leqslant \overline{C}_1 \varepsilon^{\frac{s-l}{s+2}} E^{\frac{l+2}{s+2}},\ 0 \leq l < s,\ t \in [0,T]. \tag{4.5}$$

Định lý 4.2.5. *Giả sử rằng* $0 < \varepsilon < \|\varphi^\varepsilon(\cdot)\|$. *Chọn* $\tau > 1$ *sao cho* $0 < \tau\varepsilon < \|\varphi^\varepsilon\|$. *Khi đó tồn tại một số* $\nu_\varepsilon > 0$ *sao cho*

$$\|v^{\nu_\varepsilon}(\cdot,T) - \varphi^\varepsilon(\cdot)\| = \tau\varepsilon. \tag{4.6}$$

Hơn nữa, nếu $u(x,t)$ là nghiệm của (4.1) thỏa mãn (4.4) *thì tồn tại hằng số* $\overline{C}_2 > 0$ *sao cho*

$$\|v^{\nu_\varepsilon}(\cdot,t) - u(\cdot,t)\|_{H^l(\mathbb{R})} \leqslant \overline{C}_2 \varepsilon^{\frac{s-l}{s+2}} E^{\frac{l+2}{s+2}},\ 0 \leq l < s,\ t \in [0,T]. \tag{4.7}$$

4.3 Ví dụ số

Trong phần này, chúng tôi minh họa số cho phương pháp chỉnh hóa vừa đề xuất ở trên. Các ví dụ số này được thực hiện trên máy tính LENOVO, Microsoft Windows 10 Home với phiên bản MATLAB 2015a.

4.4 Kết luận Chương 4

Trong chương 4, chúng tôi đã đạt được các kết quả sau:

- Chứng minh bài toán chỉnh hóa là đặt chỉnh.
- Chỉ ra tốc độ hội tụ dạng Hölder của nghiệm chỉnh hóa về nghiệm chính xác, theo cả quy tắc chọn tham số tiên nghiệm.
- Đưa ra ví dụ số minh họa cho phần lý thuyết.

KẾT LUẬN CHUNG VÀ KIẾN NGHỊ

Kết luận chung

Luận án nghiên cứu về các đánh giá ổn định và chỉnh hóa cho phương trình parabolic bậc nguyên và bậc phân thứ ngược thời gian. Các kết quả đạt được trong luận án này là:

1. Đưa ra đánh giá ổn định cho phương trình parabolic bậc nguyên nửa tuyến tính với hệ số hằng và nguồn Lipschitz toàn cục (với hằng số Lipschitz $k \geq 0$ tùy ý). Đây là kết quả đầu tiên chỉ cần đòi hỏi tính bị chặn của nghiệm tại $t = 0$.

2. Đưa ra đánh giá ổn định và chỉnh hóa Tikhonov có hiệu chỉnh cho phương trình parabolic bậc nguyên nửa tuyến tính với hệ số phụ thuộc thời gian và nguồn Lipschitz địa phương.

3. Tổng quát hóa và cải tiến các kết quả của Carasso và Ponomarev về đánh giá ổn định cho phương trình Bürgers.

4. Chỉnh hóa tiên nghiệm và hậu nghiệm cho phương trình parabolic bậc phân thứ bằng phương pháp làm nhuyễn. Sau đó, chúng tôi đưa ra ví dụ số để minh họa cho phần lý thuyết của mình.

Kiến nghị

Trong thời gian tới, chúng tôi mong muốn tiếp tục nghiên cứu các vấn đề sau:

1. Nghiên cứu về các đánh giá ổn định cũng như các phương pháp chỉnh hóa cho phương trình parabolic bậc nguyên phi tuyến trong không gian Banach.

2. Nghiên cứu về các đánh giá ổn định cũng như các phương pháp chỉnh hóa cho phương trình parabolic bậc phân thứ tuyến tính trong không gian Banach và bậc phân thứ phi tuyến trong không gian Hilbert.

3. Nghiên cứu bài toán xác định nguồn cho phương trình parabolic ngược.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH CỦA NGHIÊN CỨU SINH CÓ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

1. Hào D. N., Duc N. V. and Thang N. V.(2015) Stability estimates for Burgers-type equations backward in time, *J. Inverse and Ill-Posed Problems*, **23**, 41-49.

2. Duc N. V. and Thang N. V.(2017), Stability results for semi-linear parabolic equations backward in time, *Acta Math. Vietnam.*, **42**, 99–111.

3. Hào D. N., Duc N. V. and Thang N. V. (2018), Backward semi-linear parabolic equations with time-dependent coefficients and locally Lipschitz source, *Inverse Problems,* **34**, 055010, 33 pp.

4. Duc N. V. , Muoi P. Q. and Thang N. V., A Mollification Method for Backward Time-fractional Heat Equation, *Acta Math. Vietnam.* (Đã được nhận đăng)