BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

NGUYỄN VĂN HƯNG

TÍNH LIÊN TỤC CỦA ÁNH XẠ NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN CÂN BẰNG

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

NGHỆ AN - 2018

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

NGUYỄN VĂN HƯNG

TÍNH LIÊN TỤC CỦA ÁNH XẠ NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN CÂN BẰNG

Chuyên ngành: Toán giải tích

Mã số: 9 46 01 02

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

1. PGS. TS. LÂM QUỐC ANH

2. PGS. TS. ĐINH HUY HOÀNG

NGHỆ AN - 2018

LỜI CAM ĐOAN

Luận án được hoàn thành tại trường Đại học Vinh, dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Lâm Quốc Anh và PGS. TS. Đinh Huy Hoàng. Tôi xin cam đoan đây là công trình của riêng tôi. Các kết quả được viết chung với các tác giả khác đã được sự nhất trí của đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả được trình bày trong luận án là mới và chưa từng được ai công bố trước đó.

Tác giả

Nguyễn Văn Hưng

LỜI CẢM ƠN

Luận án được hoàn thành tại trường Đại học Vinh, dưới sự hướng dẫn khoa học của PGS. TS. Lâm Quốc Anh và PGS. TS. Đinh Huy Hoàng. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với hai Thầy đã hướng dẫn tận tình và chu đáo cho tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến GS.TSKH. Phan Quốc Khánh, các quý thầy cô trong nhóm seminar tại Thành Phố Hồ Chí Minh và Cần Thơ luôn tận tình giúp đỡ, đóng góp nhiều ý kiến và tạo mọi điều kiện thuận lợi nhất để tác giả hoàn thành các kết quả nghiên cứu trình bày trong luận án.

Tác giả cũng xin chân thành cảm ơn Viện Sư phạm Tự nhiên, Tổ bộ môn Giải tích, Phòng đào tạo Sau đại học và các phòng chức năng khác của Trường Đại học Vinh đã tạo điều kiện thuận lợi để tác giả hoàn thành nhiệm vụ của nghiên cứu sinh.

Tác giả xin được bày tỏ sự cảm ơn đến các đồng nghiệp và lãnh đạo Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông Thành phố Hồ Chí Minh đã quan tâm và tạo điều kiện cho tác giả tập trung học tập và nghiên cứu.

Cuối cùng, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới gia đình và những người bạn thân thiết đã luôn sẻ chia, giúp đỡ và động viên tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Nguyễn Văn Hưng

MỤC LỤC

Mở đầu **5**

Chương 1. Tính liên tục của ánh xạ nghiệm cho bài toán tựa cân bằng **15**

1.1. Kiến thức chuẩn bị 15

1.2. Bài toán tựa cân bằng 19

1.3. Hàm đánh giá cho bài toán tựa cân bằng 21

1.4. Tính liên tục của ánh xạ nghiệm cho bài toán tựa cân bằng . 26

1.5. Áp dụng cho bất đẳng thức tựa biến phân 33

1.6. Kết luận Chương 1 35

Chương 2. Tính hội tụ của tập nghiệm cho bài toán tựa cân bằng **36**

2.1. Dãy các bài toán tựa cân bằng 36

2.2. Tính hội tụ của tập nghiệm cho bài toán tựa cân bằng 44

2.3. Áp dụng cho bất đẳng thức tựa biến phân 53

2.4. Kết luận Chương 2 55

Chương 3. Tính ổn định và đặt chỉnh cho bài toán cân bằng hai mức **56**

3.1. Tính ổn định của ánh xạ nghiệm cho bài toán cân bằng hai mức 57

3.2. Tính đặt chỉnh của bài toán cân bằng hai mức 71

3.3. Kết luận Chương 3 84

Kết luận chung và kiến nghị **85**

Danh mục công trình của tác giả liên quan đến luận án **87**

Tài liệu tham khảo **88**

MỘT SỐ KÝ HIỆU

$\mathbb{R}$	tập số thực
$\mathbb{R}_+$	tập số thực không âm
$\overline{\mathbb{R}}$	tập số thực mở rộng $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
$\mathbb{N}$	tập số nguyên không âm
$\emptyset$	tập rỗng
$\exists x$	tồn tại x
$\forall x$	với mọi x
$f : X \to Y$	ánh xạ đơn trị từ X vào Y
$F : X \rightrightarrows Y$	ánh xạ đa trị từ X vào Y
$F^{-1} : Y \rightrightarrows X$	ánh xạ ngược của ánh xạ F
graph$F$	đồ thị của ánh xạ $F : X \rightrightarrows Y$
dom$F$	miền hữu hiệu của ánh xạ $F : X \rightrightarrows Y$
$L(X;Y)$	là không gian tất cả các toán tử tuyến tính từ X vào Y
$\langle z, x\rangle$	giá trị của toán tử tuyến tính $z \in L(X;Y)$ tại $x \in X$
int$C$	phần trong của tập C
$x \in \mathbb{R}^n$	x là phần tử của $\mathbb{R}^n$ được viết dưới dạng $x = (x_1, ..., x_n)$ hoặc $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
$\{x_i\}$	dãy véctơ
$\square$	kết thúc chứng minh

$A := B$	A được định nghĩa bằng B
(QEP$_1$)	bài toán tựa cân bằng loại Minty
(QEP$_2$)	bài toán tựa cân bằng loại Stampacchia
(WQEP)	bài toán tựa cân bằng yếu
(SQEP)	bài toán tựa cân bằng mạnh
(MSQEP)	bài toán tựa cân bằng mạnh với nón di động
(MQVI)	bất đẳng thức tựa biến phân loại Minty
(SQVI)	bất đẳng thức tựa biến phân loại Stampacchia
(BEP)	bài toán cân bằng hai mức
(MBEP)	bài toán cân bằng hai mức với nón di động
(VIEC)	bất đẳng thức biến phân với ràng buộc cân bằng
(OPEC)	bài toán tối ưu với ràng buộc cân bằng
(TNEC)	bài toán mạng giao thông với ràng buộc cân bằng

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

1.1. Tính chất ổn định nghiệm của bài toán liên quan đến tối ưu bao gồm tính nửa liên tục, liên tục, liên tục Hölder và liên tục Lipschitz là một trong những chủ đề quan trọng trong lý thuyết tối ưu và ứng dụng. Trong những thập kỷ gần đây, đã có nhiều công trình nghiên cứu về điều kiện ổn định nghiệm cho những bài toán liên quan đến tối ưu như bài toán tối ưu ([47], [74]), bất đẳng thức biến phân ([44]), bài toán cân bằng ([6], [8], [9]), bài toán quan hệ biến phân ([45]). Chúng ta biết rằng tính ổn định nghiệm theo nghĩa nào thì dữ liệu bài toán cũng thường phải giả thiết theo nghĩa đó. Trong thực tế, có nhiều nhiều bài toán mà các giả thiết chặt quá về dữ liệu không được thỏa mãn. Vì vậy, tính ổn định nghiệm theo nghĩa nửa liên tục của tập nghiệm được quan tâm nghiên cứu.

1.2. Tính chất hội tụ của tập nghiệm của bài toán liên quan đến tối ưu theo nghĩa Painlevé-Kuratowski đóng một vai trò quan trọng trong lý thuyết ổn định nghiệm khi bài toán bị nhiễu bởi dãy các tập ràng buộc và dãy các hàm mục tiêu. Chủ đề về tính hội tụ của tập nghiệm theo nghĩa Painlevé-Kuratowski liên quan chặt chẽ đến thuật toán nghiệm và lý thuyết xấp xỉ. Vì vậy đã có nhiều công trình nghiên cứu về hội tụ Painlevé-Kuratowski của các tập nghiệm cho các bài toán liên quan đến tối ưu ([34], [50]). Vì tính quan trọng của chủ đề về hội tụ theo nghĩa Painlevé-Kuratowski của tập nghiệm cho bài toán cân bằng nói riêng

và các bài toán liên quan đến tối ưu nói chung, nên chủ đề này đang được nhiều nhà toán học trong nước cũng như trên thế giới quan tâm nghiên cứu.

1.3. Tính đặt chỉnh của một bài toán liên quan đến tối ưu là một chủ đề quan trọng trong giải tích ổn định của lý thuyết tối ưu. Trong những năm gần đây, đã có nhiều công trình nghiên cứu về tính đặt chỉnh cho các lớp bài toán khác nhau như bài toán tối ưu ([55]), bất đẳng thức biến phân ([31]), bài toán cân bằng ([10], [12], [32], [56]). Gần đây, Anh, Khanh và Van ([12]) đã thiết lập các điều kiện đủ cho tính đặt chỉnh của bài toán cân bằng hai mức và bài toán tối ưu với ràng buộc cân bằng với một số giả thiết của sự tồn tại nghiệm bởi sử dụng tính mức đóng và giả thiết giả đơn điệu. Tuy nhiên, tính đặt chỉnh và đặt chỉnh tổng quát theo nghĩa Levitin-Polyak cho bài toán cân bằng mạnh hai mức véctơ và bài toán mạng giao thông với ràng buộc cân bằng vẫn là chủ đề mở và đang được nhiều người quan tâm nghiên cứu. Với các lý do như trên, chúng tôi chọn chủ đề cho luận án là: ***"Tính liên tục của ánh xạ nghiệm của bài toán cân bằng***".

2. Mục đích nghiên cứu

Mục đích của luận án này là thiết lập tính liên tục của ánh xạ nghiệm cho bài toán tựa cân bằng, khảo sát tính hội tụ theo nghĩa Painlevé-Kuratowski của tập nghiệm bài toán tựa cân bằng, nghiên cứu tính chất ổn định nghiệm và tính đặt chỉnh cho bài toán cân bằng hai mức. Ngoài ra, chúng tôi cũng thiết lập một số mô hình đặc biệt liên quan đến tối ưu như bất đẳng thức biến phân loại Minty và Stampacchia, bất đẳng thức biến phân với ràng buộc cân bằng, bài toán tối ưu với ràng buộc cân bằng và bài toán mạng giao thông với ràng buộc cân bằng.

3. Đối tượng nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của luận án là một số mô hình liên quan đến tối ưu như bài toán tựa cân bằng, bất đẳng thức biến phân loại Minty và Stampacchia, bài toán cân bằng hai mức, bất đẳng thức biến phân với ràng buộc cân bằng, bài toán tối ưu với ràng buộc cân bằng và bài toán mạng giao thông với ràng buộc cân bằng.

4. Phạm vi nghiên cứu

Luận án tập trung nghiên cứu tính ổn định nghiệm, tính hội tụ theo nghĩa Painlevé-Kuratowski và tính đặt chỉnh Levitin-Polyak cho một số bài cân bằng.

5. Phương pháp nghiên cứu

Trong luận án này, chúng tôi sử dụng phương pháp tiếp cận giải tích hàm, giải tích biến phân và lý thuyết tối ưu trong quá trình nghiên cứu.

6. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn

Kết quả của luận án góp phần làm phong phú hơn về tính chất ổn định nghiệm, tính hội tụ Painlevé-Kuratowski và tính đặt chỉnh trong lý thuyết tối ưu.

Luận án là một tài liệu tham khảo hữu ích cho sinh viên, học viên cao học và nghiên cứu sinh trong lĩnh vực lý thuyết tối ưu và ứng dụng.

7. Tổng quan và cấu trúc của luận án

7.1. Tổng quan một số vấn đề liên quan đến luận án

Một trong những lớp bài toán quan trọng thu hút được nhiều nhà

toán học trong nước cũng như trên thế giới trong lý thuyết tối ưu đó là bài toán cân bằng. Lớp bài toán này chứa nhiều bài toán quan trọng liên quan đến tối ưu như bài toán bù, bài toán cân bằng Nash, bài toán điểm bất động và điểm trùng, bài toán mạng giao thông, bài toán tối ưu và bất đẳng thức biến phân. Trong suốt hai thập kỷ qua, đã có nhiều nhà toán học nghiên cứu bài toán cân bằng và bài toán liên quan với những chủ đề khác nhau như tồn tại nghiệm, ổn định nghiệm, hội tụ, đặt chỉnh.

Năm 2004, Mordukhovich ([59]) đã giới thiệu và thiết lập một lớp bài toán mới liên quan đến tối ưu được gọi là bài toán cân bằng với ràng buộc cân bằng. Chúng ta có thể coi chúng như là bài toán phân bậc hai cấp hoặc là bài toán cân bằng hai mức, bài toán này liên quan đến cân bằng ở cả mức dưới và mức trên. Bài toán này cũng chứa rất nhiều bài toán như là những trường hợp đặc biệt bao gồm bài toán tối ưu với ràng buộc bất đẳng thức biến phân ([73]), bài toán quy hoạch toán học với ràng buộc cân bằng [62], bài toán tối ưu với ràng buộc cân bằng ([17], [60]). Năm 2010, Maudafi ([61]) đã giới thiệu một lớp bài toán cân bằng vô hướng hai mức trong không gian Hilbert và nghiên cứu các thuật toán và sự hội tụ cho bài toán này. Gần đây, Chen, Wan và Cho ([24]), Ding ([28]) đã mở rộng bài toán cân bằng vô hướng hai mức đến bài toán cân bằng vô hướng hai mức hỗn hợp trong không gian Banach. Họ cũng thiết lập điều kiện tồn tại của các nghiệm và hội tụ của dãy lặp với một số giả thiết phù hợp ([20], [25], [29]).

Chúng ta biết rằng, *hàm đánh giá* lần đầu tiên được giới thiệu bởi Auslender ([13]) cho bất đẳng thức biến phân vô hướng. Từ đó về sau, hàm đánh giá đã được nhiều tác giả phát triển và mở rộng cho các bài toán khác nhau như Fukushima ([35]), Mastroeni ([58]) và Yamashita và Fukushima ([72]). Một trong những ứng dụng hữu hiệu của hàm đánh giá là nghiên cứu tính ổn định nghiệm. Năm 1997, Zhao ([74]) đã giới thiệu

một giả thiết căn bản (H_1) cho bài toán tối ưu và chứng tỏ rằng (H_1) là một điều kiện cần và đủ cho tính nửa liên tục dưới Hausdorff của ánh xạ nghiệm cho bài toán này. Năm 2005, Kien ([47]) cũng nghiên cứu bài toán tối ưu tương tự như Zhao ([74]) và cũng chứng tỏ (H_1) là một điều kiện cần và đủ cho tính nửa liên tục dưới Hausdorff của ánh xạ nghiệm cho bài toán này nhưng với giả thiết yếu hơn. Xuất phát từ các ý tưởng trong công trình ([47], [74]), Li và Chen ([52]), Chen và Li ([22]), Chen, Li và Fang ([23]) đã giới thiệu hàm đánh giá và giả thiết căn bản (H_g) cho bất đẳng thức biến phân véctơ và nhận được điều kiện đủ cho tính nửa liên tục dưới Hausdorff của ánh xạ nghiệm cho bài toán này. Năm 2011, Zhong và Huang ([76]) đã chứng tỏ rằng giả thiết căn bản (H_g) là một điều kiện cần và đủ cho tính nửa liên tục dưới Hausdorff của ánh xạ nghiệm cho bất đẳng thức biến phân yếu trong không gian Banach. Gần đây, phương pháp hàm đánh giá và giả thiết căn bản (H_g) đã được nghiên cứu bởi Zhong và Huang ([77]) cho bài toán tựa cân bằng yếu. Hiện tại, chủ đề nghiên cứu tính ổn định nghiệm bằng phương pháp hàm đánh giá đang thu hút nhiều người nghiên cứu. Vì vậy, trong Chương 1 của luận án, chúng tôi nghiên cứu về tính liên tục của bài toán tựa cân bằng bằng việc sử dụng hàm đánh giá và giả thiết căn bản. Đầu tiên, chúng tôi giới thiệu hàm đánh giá phụ thuộc tham số cho bài toán tựa cân bằng mạnh và thiết lập tính liên tục của các hàm đánh giá này. Sau đó, trình bày hai giả thiết căn bản liên quan đến hàm đánh giá và chứng tỏ rằng các giả thiết này không chỉ là điều kiện cần mà còn là điều kiện đủ cho tính nửa liên tục dưới Hausdorff và liên tục Hausdorff của ánh xạ nghiệm cho các bài toán này (Định lý 1.4.6 và Định lý 1.4.7). Cuối cùng, chúng tôi ứng dụng các kết quả trên cho bất đẳng thức tựa biến phân véctơ loại Minty và Stampacchia (Hệ quả 1.5.1 và Hệ quả 1.5.3).

Năm 2007, Durea ([30]) đã giới thiệu khái niệm xấp xỉ cực tiểu tập

trong không gian định chuẩn và thiết lập khái niệm của nghiệm xấp xỉ cho bài toán cân bằng và nghiên cứu điều kiện ổn định theo nghĩa Painlevé-Kuratowski đến tập nghiệm xấp xỉ. Năm 2012, Fang và Li ([33]) đã xét bài toán cân bằng tổng quát được nhiễu bởi một dãy các ánh xạ trong không gian véctơ tôpô Hausdorff lồi địa phương. Sử dụng giả thiết đơn điệu chặt, các tác giả đã nghiên cứu tính hội tụ theo nghĩa Painlevé-Kuratowski cho tập nghiệm hữu hiệu cho bài toán này. Sau đó, Peng và Yang ([64]), Zhao, Peng và Yang ([75]) đã cải thiện một số điều kiện về tính đơn điệu chặt đã được áp đặt trong [33] và sử dụng chúng để nghiên cứu tính hội tụ Painlevé-Kuratowski của tập nghiệm hữu hiệu và hữu hiệu yếu cho bài toán cân bằng. Gần đây, Li, Lin và Wang ([53]) đã sử dụng hội tụ liên tục của dãy hàm hai biến và dãy tập thiết lập tính hội tụ Painlevé-Kuratowski của tập nghiệm xấp xỉ khi chúng được nhiễu bởi dãy tập và dãy hàm hai biến. Chủ đề về tính hội tụ Painlevé-Kuratowski cho tập nghiệm của bài toán cân bằng véctơ bằng phương pháp hàm đánh giá đang rất được quan tâm nghiên cứu. Do đó, trong Chương 2, chúng tôi sẽ nghiên cứu về sự hội tụ Painlevé-Kuratowski của tập nghiệm bằng phương pháp hàm đánh giá cho bài toán tựa cân bằng véctơ. Đầu tiên, chúng tôi giới thiệu dãy hàm đánh giá cho bài toán này và thiết lập tính liên tục của chúng. Sau đó, chúng tôi khảo sát về tính tụ trên, hội tụ dưới và hội tụ theo nghĩa Painlevé-Kuratowski của tập nghiệm bài toán cân bằng bởi sử dụng phương pháp hàm đánh giá (Định lý 2.2.1, Định lý 2.2.12 và Định lý 2.2.13). Trong phần một áp dụng, chúng tôi nghiên cứu một trường hợp đặc biệt cho bất đẳng thức tựa biến phân và nhận được một số kết quả (Hệ quả 2.3.1, Hệ quả 2.3.2 và Hệ quả 2.3.4).

Năm 1966, khái niệm đặt chỉnh lần đầu tiên được giới thiệu bởi Tikhonov ([69]) cho bài toán tối ưu vô hướng không ràng buộc và được biết đến như là đặt chỉnh Tikhonov. Khái niệm này trên cơ sở sự tồn

tại và duy nhất của nghiệm và hội tụ của mỗi dãy xấp xỉ cực tiểu đến nghiệm duy nhất. Tuy nhiên, trong nhiều tình huống thực tế các dãy xấp xỉ được thiết lập có thể bị hạn chế. Vì vậy, Levitin và Polyak ([51]) đã mở rộng khái niệm đặt chỉnh Tikhonov cho bài toán tối ưu ràng buộc và được biết đến như là khái niệm đặt chỉnh Levitin-Polyak. Từ đó về sau, đã có nhiều người quan tâm nghiên cứu tính đặt chỉnh Levitin-Polyak cho các mô hình bài toán khác nhau liên quan đến tối ưu như bài toán tối ưu ([41]), bất đẳng thức biến phân ([42]), bài toán cân bằng ([63]). Gần đây, Khanh, Plubtieng và Sombut ([46]) đã giới thiệu đặt chỉnh Levitin-Polyak cho bài toán cân bằng hai mức yếu và bài toán tối ưu với ràng buộc cân bằng. Sử dụng các tính mức đóng tổng quát, các tác giả đã nghiên cứu tính đặt chỉnh cho các bài toán này. Tuy nhiên, theo sự hiểu biết của chúng tôi, tính chất ổn định nghiệm và tính đặt chỉnh cho bài toán cân bằng hai mức mạnh, bài toán mạng giao thông với ràng buộc cân bằng, bất đẳng thức biến phân với ràng buộc cân bằng và bài toán tối ưu với ràng buộc cân bằng đang là vấn đề mở và đang thu hút nhiều người quan tâm nghiên cứu. Vì vậy, trong Chương 3, chúng tôi sẽ nghiên cứu tính ổn định nghiệm và tính đặt chỉnh Levitin-Polyak cho các bài toán cân bằng hai mức mạnh, bài toán mạng giao thông với ràng buộc cân bằng, bất đẳng thức biến phân với ràng buộc cân bằng và bài toán tối ưu với ràng buộc cân bằng. Đầu tiên, chúng tôi giới thiệu bài toán cân bằng hai mức véctơ mạnh và thiết lập các tính chất nửa liên tục và liên tục cho bài toán này (Định lý 3.1.1, Định lý 3.1.5, Định lý 3.1.8, Định lý 3.1.12 và Định lý 3.1.14). Sau đó, chúng tôi ứng dụng các kết quả này cho bất đẳng thức biến phân với ràng buộc cân bằng và bài toán tối ưu với ràng buộc cân bằng và nhận được các kết quả (Hệ quả 3.1.15 và Hệ quả 3.1.17). Tiếp theo, chúng tôi giới thiệu bài toán cân bằng hai mức véctơ mạnh với nón di động. Sau đó, chúng tôi giới thiệu và nghiên cứu các khái niệm

đặt chỉnh Levitin-Polyak và đặt chỉnh Levitin-Polyak tổng quát cho bài toán này. Chúng tôi nghiên cứu mối quan hệ của tính đặt chỉnh với tính nửa liên tục trên của nghiệm xấp xỉ và sự tồn tại nghiệm (Định lý 3.2.8, Định lý 3.2.9 và Định lý 3.2.10) và mô tả đặc trưng mêtric các đặt chỉnh Levitin-Polyak và đặt chỉnh Levitin-Polyak tổng quát cho bài toán này (Định lý 3.2.11). Từ các kết quả chính này, chúng tôi áp dụng cho bài toán mạng giao thông với ràng buộc cân bằng. Các kết quả thu được là Hệ quả 3.2.17 và Hệ quả 3.2.18.

7.2. Cấu trúc luận án

Ngoài những ký hiệu thường dùng trong luận án, Mở đầu, Kết luận chung và kiến nghị, Danh sách các bài báo của tác giả liên quan đến luận án và Tài liệu tham khảo, nội dung của luận án bao gồm ba chương. Chương 1 trình bày tính liên tục của ánh xạ nghiệm cho một số bài toán tựa cân bằng véctơ phụ thuộc tham số. Mục 1.1 trình bày lại một số khái niệm cơ bản trong giải tích đa trị được sử dụng trong luận án. Mục 1.2 giới thiệu hai bài toán tựa cân bằng véctơ phụ tham số dạng Minty và Stampacchia. Mục 1.3 dành cho việc thiết lập một số hàm đánh giá cho bài toán tựa cân bằng và nghiên cứu tính liên tục của chúng. Mục 1.4 nghiên cứu tính nửa liên tục trên, nửa liên tục dưới Hausdorff và liên tục Hausdorff cho ánh xạ nghiệm cho hai bài toán tựa cân bằng. Mục 1.5 thảo luận một số trường hợp đặc biệt như bất đẳng thức biến phân loại Minty và Stampacchia. Chương 2 trình bày tính hội tụ theo nghĩa Painlevé-Kuratowski của tập nghiệm cho bài toán cân bằng yếu. Mục 2.1 trình bày dãy các bài toán tựa cân bằng và thiết lập các dãy hàm đánh giá và tính liên tục của chúng cho bài toán tựa cân bằng. Mục 2.2 thiết lập các hội tụ trên, hội tụ dưới và hội tụ theo nghĩa Painlevé-Kuratowski của tập nghiệm bài toán tựa cân bằng bởi việc sử dụng phương pháp hàm đánh. Mục 2.3 trình bày các kết quả ứng dụng từ Mục 2.2 cho bất

đẳng thức biến phân. Chương 3 trình bày tính ổn định nghiệm và tính đặt chỉnh cho bài toán cân bằng hai mức véctơ. Mục 3.1 thiết lập tính ổn định nghiệm bao gồm tính nửa liên tục trên, tính nửa liên tục dưới, tính nửa liên tục dưới Hausdorff, liên tục và liên tục Hausdorff cho bài toán cân bằng hai mức và ứng dụng cho bất đẳng thức biến phân với ràng buộc cân bằng, bài toán tối ưu với ràng buộc cân bằng. Mục 3.2 nghiên cứu tính đặt chỉnh Levitin-Polyak và đặt chỉnh Levitin-Polyak tổng quát cho bài toán cân bằng hai mức với nón di động và ứng dụng cho bài toán mạng giao thông với ràng buộc cân bằng.

Các kết quả của luận án đã được trình bày tại Hội thảo Tối ưu và Tính toán khoa học (Ba vì, Hà Nội, 21-23/4/2016, 20-22/4/2017), Hội nghị Quốc tế lần thứ 9 về Điểm bất động và tối ưu (KMUTT, Bangkok, Thailand, 19-22/5/2016), Hội thảo Quốc tế về các xu hướng mới trong Giải tích biến phân, Tối ưu và Ứng dụng (Quy Nhơn, 7-10/12/2016), Đại hội Toán học lần thứ 9 (Nha Trang, 14-18/2018), Seminar tổ Giải tích, Khoa Sư phạm, Đại học Cần Thơ từ năm 2015 đến năm 2018, Seminar tổ Toán ứng dụng, Đại học Khoa học Tự nhiên TPHCM, Seminar tổ Giải tích, Viện Sư phạm Tự nhiên, Trường Đại học Vinh. Hầu hết các kết quả chính của luận án đã được đăng và nhận đăng ở các tạp chí *Journal of Industrial and Management Optimization*, *Computational and Applied Mathematics* và *Positivity.*

Nghệ An, ngày ... tháng ... năm 2018

Tác giả

Nguyễn Văn Hưng

CHƯƠNG 1

TÍNH LIÊN TỤC CỦA ÁNH XẠ NGHIỆM CHO BÀI TOÁN TỰA CÂN BẰNG

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu về tính liên tục của ánh xạ nghiệm cho bài toán tựa cân bằng. Đầu tiên, chúng tôi nhắc lại một số định nghĩa và tính chất cơ bản của giải tích đa trị có liên quan đến luận án. Tiếp theo, chúng tôi giới thiệu hàm đánh giá phụ thuộc tham số cho bài toán tựa cân bằng mạnh và thiết lập tính liên tục của các hàm đánh giá này. Sau đó, chúng tôi trình bày hai giả thiết căn bản liên quan đến hàm đánh giá và chứng tỏ rằng các giả thiết này là các điều kiện cần và đủ cho tính nửa liên tục dưới Hausdorff và liên tục Hausdorff của ánh xạ nghiệm cho các bài toán này. Cuối cùng, trong phần ứng dụng, chúng tôi nghiên cứu bất đẳng thức tựa biến phân loại Minty và Stampacchia.

1.1 Kiến thức chuẩn bị

1.1.1 Định nghĩa. ([15, p. 1]) Cho X và Y là hai tập, một quy luật cho tương ứng mỗi điểm $x \in X$ với một tập $F(x) \subset Y$ được gọi là *ánh xạ đa trị* F từ X vào Y, ký hiệu $F : X \rightrightarrows Y$.

Ánh xạ đa trị còn có tên gọi khác nữa là: *hàm đa trị* hay *ánh xạ điểm vào tập*. Nếu với mỗi $x \in X$ tập $F(x)$ chỉ gồm một phần tử của Y thì ta nói F là ánh xạ đơn trị từ X vào Y.

Trước khi nghiên cứu sâu hơn, chúng ta làm quen với các định nghĩa cơ bản liên quan đến ánh xạ đa trị.

1.1.2 Định nghĩa. ([16, Definition 1.3.1]) Cho ánh xạ đa trị $F : X \rightrightarrows Y$ từ tập X vào tập Y.

(i) Tập dom$F$ được gọi là *miền hiệu quả* của F xác định bởi

$$\mathrm{dom}F := \{x \in X \mid F(x) \neq \emptyset\}.$$

(ii) Tập graph$F$ được gọi là *đồ thị* của ánh xạ đa trị F xác định bởi

$$\mathrm{graph}F := \big\{(x, y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\big\}.$$

(iii) Ánh xạ $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ được gọi là *ánh xạ ngược* của F xác định bởi

$$x \in F^{-1}(y) \Leftrightarrow y \in F(x) \Leftrightarrow (x, y) \in \mathrm{graph}F.$$

Ánh xạ đa trị F được gọi là *tầm thường* nếu dom$F = \emptyset$ và được gọi là *chặt* nếu dom$F = X$.

Bây giờ, chúng ta sẽ nghiên cứu các khái niệm nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới theo nghĩa Berge.

1.1.3 Định nghĩa. ([15, Definitions 1-3]) Giả sử X, Y là hai không gian tôpô Hausdorff và $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị.

(i) F được gọi là *nửa liên tục trên* (viết tắt là usc) tại $x_0 \in \mathrm{dom}F$ nếu với mỗi lân cận mở V của $F(x_0)$, tồn tại lân cận U của x_0 sao cho $F(x) \subset V$ với mọi $x \in U$.

(ii) F được gọi là *nửa liên tục dưới* (viết tắt là lsc) tại $x_0 \in \mathrm{dom}F$ nếu với mỗi tập mở $V \subset Y$ thỏa mãn $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$, tồn tại lân cận U của x_0 sao cho $F(x) \cap V \neq \emptyset$ với mọi $x \in U$.

(iii) F được gọi là *liên tục* tại $x_0 \in \mathrm{dom}F$, nếu F là usc và lsc tại $x_0 \in \mathrm{dom}F$.

(iv) F được gọi là *đóng tại* $x_0 \in \mathrm{dom}F$ nếu với mỗi lưới $\{(x_\alpha, z_\alpha)\} \subset \mathrm{graph}F$ sao cho $(x_\alpha, z_\alpha) \to (x_0, z_0)$, thì $z_0 \in F(x_0)$.

Tiếp theo, chúng ta nghiên cứu các khái niệm nửa liên tục theo nghĩa Hausdorff.

1.1.4 Định nghĩa. ([74, Definition 1]) Giả sử X là không gian tôpô Hausdorff, Y là không gian véctơ tôpô Hausdorff và $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị.

(i) F được gọi là *nửa liên tục trên theo Hausdorff* (viết tắt là H-usc) tại $x_0 \in \mathrm{dom}F$ nếu với mỗi lân cận B của gốc trong Y, tồn tại một lân cận U của x_0 sao cho $F(x) \subset F(x_0) + B$ với mọi $x \in U$.

(ii) F được gọi là *nửa liên tục dưới theo Hausdorff* (viết tắt là H-lsc) tại $x_0 \in \mathrm{dom}F$ nếu với mỗi lân cận B của gốc trong Y, tồn tại một lân cận U của x_0 sao cho $F(x_0) \subset F(x) + B$ với mọi $x \in U$.

(iii) F được gọi là *liên tục Hausdorff* tại $x_0 \in \mathrm{dom}F$, nếu F là H-usc và H-lsc tại $x_0 \in \mathrm{dom}F$.

Nếu một ánh xạ thỏa mãn một tính chất nào đó tại mọi điểm của tập $A \subset X$, thì ta nói nó thỏa mãn tính chất này trong A. Nếu $A = X$, ta bỏ qua "trong X" trong phát biểu.

Sau đây là một số tính chất quan trọng.

1.1.5 Bổ đề. ([6, Proposition 3.1]) *Giả sử X, Y là hai không gian véctơ tôpô Hausdorff và $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị.*

(i) *Nếu F là usc tại x_0 và $F(x_0)$ là đóng thì F là đóng tại x_0;*

(ii) *Nếu F là usc tại x_0 thì F là H-usc tại x_0. Ngược lại, nếu F là H-usc tại x_0 và nếu $F(x_0)$ compắc, thì F là usc tại x_0;*

(iii) *Nếu F là H-lsc tại x_0 thì F là lsc. Ngược lại là đúng nếu $F(x_0)$ là compắc;*

(iv) *F là lsc tại x_0 khi và chỉ khi với mọi lưới $\{x_\alpha\} \subset X$ hội tụ đến x_0 và với mọi $y_0 \in F(x_0)$, tồn tại $y_\alpha \in F(x_\alpha)$ sao cho $y_\alpha \to y_0$.*

1.1.6 Bổ đề. ([44, Lemma 2.1]) *Giả sử X, Y là hai không gian tôpô Hausdorff và $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị. Nếu F có giá trị compắc, thì F nửa liên tục trên tại x_0 khi và chỉ khi với mọi lưới $\{x_\alpha\} \subset X$ hội tụ về x và với mọi lưới $\{y_\alpha\}$ với $y_\alpha \in F(x_\alpha)$, tồn tại $y \in F(x)$ và một lưới con $\{y_\beta\}$ của $\{y_\alpha\}$ sao cho $y_\beta \to y$.*

1.1.7 Định nghĩa. ([57, Definition 1.1]) Một tập con khác rỗng C của không gian véctơ tôpô X được gọi là một *nón lồi* nếu $C+C \subset C$ và $\lambda C \subset C$ với mọi $\lambda > 0$. Một nón C được gọi là *có đỉnh* nếu $C \cap (-C) = \{0\}$.

1.1.8 Bổ đề. ([21, Proposition 1.43]) *Với mọi $e \in \mathrm{intC}$ với intC là phần trong của C, $y \in Y$ và hàm vô hướng hóa phi tuyến $\xi_e : Y \to \mathbb{R}$ được xác định bởi $\xi_e(y) := \min\{r \in \mathbb{R} \mid y \in re - C\}$, ta có*

(i) *ξ_e là hàm lồi và liên tục trong Y;*

(ii) *$\xi_e(y) \leq r \Leftrightarrow y \in re - C$;*

(iii) *$\xi_e(y) > r \Leftrightarrow y \notin re - C$.*

1.1.9 Định nghĩa. ([65, p. 9-13]) Cho X là một không gian tôpô, một ánh xạ đơn trị $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ được gọi là *nửa liên tục dưới* (tương ứng, *nửa liên tục trên*) nếu với mỗi $r \in \mathbb{R}$ tập mức $\{x \in X \mid f(x) \leq r\}$ (tương ứng $\{x \in X \mid f(x) \geq r\}$) là đóng. f được gọi là *liên tục* nếu f là nửa liên tục dưới và nửa liên tục trên.

1.1.10 Bổ đề. ([15, Proposition 23]) *Cho X và Y là hai không gian tôpô, nếu $F : X \rightrightarrows Y$ là một ánh xạ đa trị có giá trị compắc và liên tục trong X và $W : X \times Y \to \mathbb{R}$ là một hàm giá trị thực và liên tục trong $X \times Y$ thì*

$$V(x) := \max_{y \in F(x)} W(x, y)$$

liên tục trong X.

1.2 Bài toán tựa cân bằng

Cho X, Y, Z, P là các không gian véctơ tôpô Hausdorff, $A \subset X$, $B \subset Y$ và $\Gamma \subset P$ là các tập con khác rỗng, C là một nón lồi đóng có đỉnh trong Z với $\text{int}C \neq \emptyset$. Lấy $K : A \times \Gamma \rightrightarrows A$, $T : A \times \Gamma \rightrightarrows B$ là các hàm đa trị và $f : A \times B \times A \times \Gamma \to Z$ là hàm cân bằng, nghĩa là $f(x, t, x, \gamma) = 0$ với mọi $x \in A, t \in B, \gamma \in \Gamma$. Xuất phát từ các mô hình bất đẳng thức biến phân loại Minty và Stampacchia, chúng ta xét hai *bài toán tựa cân bằng véctơ mạnh* sau.

(QEP$_1$) Tìm $x \in K(x, \gamma)$ sao cho

$$f(x, t, y, \gamma) \in C, \forall y \in K(x, \gamma), \forall t \in T(y, \gamma).$$

(QEP$_2$) Tìm $x \in K(x, \gamma)$ sao cho tồn tại $t \in T(x, \gamma)$ thỏa mãn

$$f(x, t, y, \gamma) \in C, \forall y \in K(x, \gamma).$$

Để định hướng cho việc nghiên cứu các bài toán này, chúng ta xét một số lớp bài toán đặc biệt đã được nghiên cứu bởi nhiều tác giả ([14], [26], [31], [37], [43], [48]).

(a) Nếu $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^m, C = \mathbb{R}_+$ và $f(x, z, y, \gamma) = \langle z, y - x \rangle$, thì bài toán (QEP$_1$) trở thành bất đẳng thức tựa biến phân vô hướng

phụ thuộc tham số loại Minty đã được nghiên cứu bởi Lalitha và Bhatia ([49]).

(b) Nếu $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^m, C = \mathbb{R}_+, K(x,\gamma) = A, T(x,\gamma) = T(x)$, $f(x,z,y,\gamma) = \langle z, y-x\rangle$, thì bài toán ($\mathrm{QEP}_2$) trở thành bất đẳng thức biến phân loại Stampacchia đã được nghiên cứu bởi Aussel và Dutta ([14]).

(c) Nếu X, Y là các không gian Banach, $K(x,\gamma) = A, f(x,z,y,\gamma) = h(\gamma, y, y-x)$ và $f(x,z,y,\gamma) = h(\gamma, x, y-x)$, thì các bài toán ($\mathrm{QEP}_1$) và ($\mathrm{QEP}_2$) trở về bất đẳng thức biến phân phụ thuộc tham số loại Minty và Stampacchia (MVI) và (SVI), tương ứng, đã được nghiên cứu bởi Chen và Wan ([26]), Fang và Hu ([31]).

(d) Nếu $C = \mathbb{R}_+, K(x,\gamma) = A, f(x,z,y,\gamma) = \langle z, y-x\rangle$, thì bài toán ($\mathrm{QEP}_1$) và ($\mathrm{QEP}_2$) trở thành bất đẳng thức biến phân loại Minty và Stampacchia đã được nghiên cứu bởi Giannessi ([37]), Kassay ([43]), Kolumbán, Páles và Komlósi ([48]).

Cho $S_1, S_2 : \Gamma \rightrightarrows A$ là các ánh xạ đa trị sao cho với mỗi $\gamma \in \Gamma$, $S_1(\gamma)$ và $S_2(\gamma)$ tương ứng là các tập nghiệm của (QEP_1) và (QEP_2), nghĩa là

$$S_1(\gamma) = \{x \in K(x,\gamma) \mid f(x,t,y,\gamma) \in C, \forall y \in K(x,\gamma), \forall t \in T(y,\gamma)\},$$

$$S_2(\gamma) = \{x \in K(x,\gamma) \mid \exists t \in T(x,\gamma) \mid f(x,t,y,\gamma) \in C, \forall y \in K(x,\gamma)\}.$$

Nói chung, $S_1(\gamma)$ và $S_2(\gamma)$ là khác nhau (được chứng tỏ trong trường hợp đặc biệt (c) và (d)). Nếu $T(z,\gamma) \equiv T(\gamma)$ thì $S_1(\gamma) \subset S_2(\gamma)$ với mọi $\gamma \in \Gamma, z \in B$. Ví dụ sau chứng tỏ chiều ngược lại không đúng.

1.2.1 Ví dụ. Lấy $X = Y = Z = P = \mathbb{R}$, $A = B = [0,2], \Gamma = [0,1]$, $C = \mathbb{R}_+$, $K(x,\gamma) = [\gamma, 2]$, $T(x,\gamma) = [0,1]$ và $f(x,t,y,\gamma) = t(x-y)2^\gamma$. Tính toán trực tiếp ta được $S_1(\gamma) = \{2\}$ và $S_2(\gamma) = [\gamma, 2]$ với mọi $\gamma \in \Gamma$.

Vì sự tồn tại nghiệm cho bài toán tựa cân bằng đã được nghiên cứu bởi nhiều tác giả ([18], [38], [39]), do đó trong chương này, chúng ta luôn giả sử $S_1(\gamma) \neq \emptyset$ và $S_2(\gamma) \neq \emptyset$ với mỗi γ trong một lân cận của $\gamma_0 \in \Gamma$.

1.3 Hàm đánh giá cho bài toán tựa cân bằng

Trong mục này, chúng ta giới thiệu các hàm đánh giá cho hai bài toán (QEP_1) và (QEP_2) và nghiên cứu một số tính liên tục của chúng. Trong phần còn lại của mục này, chúng ta vẫn sử dụng các ký hiệu trong Mục 1.2 và luôn giả thiết f là liên tục trong $A \times B \times A \times \Gamma$.

1.3.1 Định nghĩa. Hàm $g : A \times \Gamma \to \mathbb{R}$ được gọi là *hàm đánh giá phụ thuộc tham số* cho bài toán (QEP_1) ((QEP_2), tương ứng), nếu:

(a) $g(x, \gamma) \geq 0$ với mọi $x \in K(x, \gamma)$;

(b) $g(x, \gamma) = 0$ khi và chỉ khi $x \in S_1(\gamma)$ ($x \in S_2(\gamma)$, tương ứng).

Bây giờ, chúng ta giả thiết rằng K và T có giá trị compắc trong một lân cận của điểm đang xét. Chúng ta định nghĩa hai hàm $p : A \times \Gamma \to \mathbb{R}$ và $h : A \times \Gamma \to \mathbb{R}$ như sau

$$p(x, \gamma) = \max_{t \in T(y,\gamma)} \max_{y \in K(x,\gamma)} \xi_e(-f(x, t, y, \gamma)), \tag{1.1}$$

và

$$h(x, \gamma) = \min_{t \in T(x,\gamma)} \max_{y \in K(x,\gamma)} \xi_e(-f(x, t, y, \gamma)), \tag{1.2}$$

trong đó ξ_e được định nghĩa như trong Bổ đề 1.1.8.

Vì $K(x, \gamma)$ và $T(x, \gamma)$ là các tập compắc với mọi $(x, \gamma) \in A \times \Gamma$, ξ_e và f là liên tục, nên p và h xác định.

1.3.2 Định lý. (i) *Hàm* $p(x,\gamma)$ *được định nghĩa bởi* (1.1) *là một hàm đánh giá phụ thuộc tham số cho bài toán* (QEP_1).

(ii) *Hàm* $h(x,\gamma)$ *được định nghĩa bởi* (1.2) *là một hàm đánh giá phụ thuộc tham số cho bài toán* (QEP_2).

Chứng minh. (i) Chúng ta định nghĩa hàm $\varphi : E(\Gamma) \times B \times \Gamma \to \mathbb{R}$, trong đó $E(\Gamma) = \cup_{\gamma\in\Gamma} E(\gamma) = \cup_{\gamma\in\Gamma}\{x \in A \mid x \in K(x,\gamma)\}$, như sau

$$\varphi(x,t,\gamma) = \max_{y\in K(x,\gamma)} \xi_e(-f(x,t,y,\gamma)), x \in E(\gamma), t \in B, \gamma \in \Gamma.$$

(a) Ta dễ dàng để thấy rằng $\varphi(x,t,\gamma) \geq 0$. Thật vậy, giả sử ngược lại rằng tồn tại $(x_0,t_0,\gamma_0) \in E(\gamma_0) \times B \times \Gamma$ sao cho $\varphi(x_0,t_0,\gamma_0) < 0$, khi đó

$$\begin{aligned} 0 > \varphi(x_0,t_0,\gamma_0) &= \max_{y\in K(x_0,\gamma_0)} \xi_e(-f(x_0,t_0,y,\gamma_0)) \\ &\geq \xi_e(-f(x_0,t_0,y,\gamma_0)), \forall y \in K(x_0,\gamma_0). \end{aligned}$$

Khi $y = x_0$, ta có

$$\xi_e(-f(x_0,t_0,x_0,\gamma_0)) = \xi_e(0) = 0,$$

điều này vô lý. Do đó,

$$p(x,\gamma) = \max_{t\in T(y,\gamma)} \max_{y\in K(x,\gamma)} \xi_e(-f(x,t,y,\gamma)) \geq 0.$$

(b) Từ định nghĩa, $p(x_0,\gamma_0) = 0$ khi và chỉ khi với mọi $y \in K(x_0,\gamma_0)$ và $t \in T(y,\gamma_0)$,

$$\xi_e(-f(x_0,t,y,\gamma_0)) \leq 0.$$

Từ Bổ đề 1.1.8(ii), bất đẳng thức này xác định khi và chỉ khi với mọi $y \in K(x_0,\gamma_0), t \in T(y,\gamma_0)$,

$$-f(x_0,t,y,\gamma_0) \in -C,$$

hay

$$f(x_0, t, y, \gamma_0) \in C,$$

nghĩa là, $x_0 \in S_1(\gamma_0)$. Do đó, p là một hàm đánh giá phụ thuộc tham số cho bài toán (QEP$_1$).

(ii) Chúng ta định nghĩa hàm $\psi : E(\Gamma) \times B \times \Gamma \to \mathbb{R}$ như sau

$$\psi(x, t, \gamma) = \max_{y \in K(x,\gamma)} \xi_e(-f(x, t, y, \gamma)), x \in E(\gamma), t \in B, \gamma \in \Gamma.$$

Lý luận tương tự như trên, ta cũng có $\psi(x, t, \gamma) \geq 0$, (nghĩa là, $h(x, \gamma) \geq 0$), và $h(x_0, \gamma_0) = 0$ khi và chỉ khi $x_0 \in S_2(\gamma_0)$. □

Để minh họa cho hàm đánh giá, ta có ví dụ sau đây:

1.3.3 Ví dụ. Lấy $X = Y = Z = \mathbb{R}$, $A = B = [-1, 1]$, $\Gamma = [0, 1], C = \mathbb{R}_+$, $K(x, \gamma) = [-1, 1]$, $T(x, \gamma) = [0, 1]$ và $f(x, t, y, \gamma) = \gamma y - \gamma x + yx^2 - x^3$. Tính toán trực tiếp ta có

$$S_1(\gamma) = \begin{cases} \{-1, 0\}, & \text{nếu} \quad \gamma = 0, \\ \{-1\}, & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} p(x, \gamma) &= \max_{t \in T(y,\gamma)} \max_{y \in K(x,\gamma)} \xi_e(-f(x, t, y, \gamma)) \\ &= \max_{y \in K(x,\gamma)} (x^3 - yx^2 + \gamma x - \gamma y) \\ &= x^3 + x^2 + \gamma x + \gamma. \end{aligned}$$

Ta thấy rằng, $p(x, \gamma)$ thỏa mãn Định nghĩa 1.3.1. Do đó, $p(x, \gamma)$ là một hàm đánh giá của (QEP$_1$).

Định lý sau đây đưa ra điều kiện đủ cho hàm đánh giá phụ thuộc tham số p là liên tục.

1.3.4 Định lý. *Với bài toán* (QEP$_1$) *và* (QEP$_2$)*, ta giả sử rằng K và T là liên tục trong $A \times \Gamma$ và có giá trị compắc. Khi đó, p và h là liên tục trong $A \times \Gamma$.*

Chứng minh. Vì các kỹ thuật chứng minh là tương tự, nên chúng ta chỉ chứng minh tính liên tục của h. Đầu tiên, chúng ta chứng minh h là nửa liên tục dưới trong $A \times \Gamma$. Lấy $r \in \mathbb{R}$, $\{(x_\alpha, \gamma_\alpha)\} \subset A \times \Gamma$, $(x_\alpha, \gamma_\alpha) \to (x_0, \gamma_0)$ và $h(x_\alpha, \gamma_\alpha) \leq a$ với mọi α, ta cần chứng tỏ rằng $h(x_0, \gamma_0) \leq r$. Ta có,

$$h(x_\alpha, \gamma_\alpha) = \min_{t \in T(x_\alpha, \gamma_\alpha)} \max_{y \in K(x_\alpha, \gamma_\alpha)} \xi_e(-f(x_\alpha, t, y, \gamma_\alpha)) \leq r,$$

và do đó,

$$h(x_\alpha, \gamma_\alpha) = \min_{t \in T(x_\alpha, \gamma_\alpha)} \psi(x_\alpha, t, \gamma_\alpha),$$

trong đó ψ được định nghĩa trong Định lý 1.3.2. Vì ξ_e là liên tục và K liên tục với giá trị compắc, nên từ Bổ đề 1.1.10, suy ra rằng ψ liên tục. Từ tính compắc của $T(x_\alpha, \gamma_\alpha)$, nên tồn tại $t_\alpha \in T(x_\alpha, \gamma_\alpha)$ sao cho

$$\begin{aligned} h(x_\alpha, \gamma_\alpha) &= \min_{t \in T(x_\alpha, \gamma_\alpha)} \max_{y \in K(x_\alpha, \gamma_\alpha)} \{\xi_e(-f(x_\alpha, t, y, \gamma_\alpha))\} \\ &= \psi(x_\alpha, t_\alpha, \gamma_\alpha) \\ &= \max_{y \in K(x_\alpha, \gamma_\alpha)} \{\xi_e(-f(x_\alpha, t_\alpha, y, \gamma_\alpha)\} \leq r. \end{aligned}$$

Lấy $y_0 \in K(x_0, \gamma_0)$ tùy ý. Vì K là nửa liên tục dưới trong $A \times \Gamma$, nên tồn tại $y_\alpha \in K(x_\alpha, \gamma_\alpha)$ sao cho $y_\alpha \to y_0$. Từ $y_\alpha \in K(x_\alpha, \gamma_\alpha)$, ta có

$$\xi_e(-f(x_\alpha, t_\alpha, y_\alpha, \gamma_\alpha)) \leq r. \tag{1.3}$$

Vì T là nửa liên tục trên với giá trị compắc, ta có thể giả sử rằng, tồn tại $t_0 \in T(x_0, \gamma_0)$ sao cho $t_\alpha \to t_0$. Từ tính liên tục của f và ξ_e, lấy giới hạn trong (1.3), ta có

$$\xi_e(-f(x_0, t_0, y_0, \gamma_0)) \leq r. \tag{1.4}$$

Vì y_0 là tùy ý nên từ (1.4) ta suy ra rằng

$$\psi(x_0, t_0, \gamma_0) = \max_{y \in K(x_0,\gamma_0)} \xi_e(-f(x_0, t_0, y, \gamma_0)) \leq r,$$

với $t_0 \in T(x_0, \gamma_0)$. Do đó,

$$h(x_0, \gamma_0) = \min_{t \in T(x_0,\gamma_0)} \max_{y \in K(x_0,\gamma_0)} \xi_e(-f(x_0, t, y, \gamma_0)) \leq r.$$

Điều này chứng tỏ rằng, với $r \in \mathbb{R}$, tập mức dưới $\{(x, \gamma) \mid h(x, \gamma) \leq r\}$ là đóng. Vì vậy, h là nửa liên tục dưới trong $A \times \Gamma$.

Tiếp theo chúng ta sẽ chứng minh rằng h là nửa liên tục trên trong $A \times \Gamma$. Thật vậy, lấy $r \in \mathbb{R}$, $\{(x_\alpha, \gamma_\alpha)\} \subset A \times \Gamma$, $(x_\alpha, \gamma_\alpha) \to (x_0, \gamma_0)$ và $h(x_\alpha, \gamma_\alpha) \geq r$ với mọi α. Ta cần chứng tỏ rằng $h(x_0, \gamma_0) \geq r$. Ta có,

$$h(x_\alpha, \gamma_\alpha) = \min_{t \in T(x_\alpha,\gamma_\alpha)} \max_{y \in K(x_\alpha,\gamma_\alpha)} \xi_e(-f(x_\alpha, t, y, \gamma_\alpha)) \geq r,$$

và vì vậy,

$$\max_{y \in K(x_\alpha,\gamma_\alpha)} \xi_e(-f(x_\alpha, t, y, \gamma_\alpha)) \geq r, \forall t \in T(x_\alpha, \gamma_\alpha). \tag{1.5}$$

Lấy $t_0 \in T(x_0, \gamma_0)$ tùy ý. Vì T là nửa liên tục dưới trong $A \times \Gamma$, nên tồn tại $t_\alpha \in T(x_\alpha, \gamma_\alpha)$ sao cho $t_\alpha \to t_0$. Vì $t_\alpha \in T(x_\alpha, \gamma_\alpha)$, ta suy ra từ (1.5) rằng

$$\max_{y \in K(x_\alpha,\gamma_\alpha)} \xi_e(-f(x_\alpha, t_\alpha, y, \gamma_\alpha)) \geq a.$$

Kết hợp tính compắc của K và tính liên tục của f và ξ_e, thì tồn tại $y_\alpha \in K(x_\alpha, \gamma_\alpha)$ sao cho

$$\xi_e(-f(x_\alpha, t_\alpha, y_\alpha, \gamma_\alpha)) = \max_{y \in K(x_\alpha,\gamma_\alpha)} \xi_e(-f(x_\alpha, t_\alpha, y, \gamma_\alpha)) \geq r. \tag{1.6}$$

Vì K là nửa liên tục trên với giá trị compắc, ta có thể giả sử rằng $y_\alpha \to y_0$ với một số $y_0 \in K(x_0, \gamma_0)$ (lấy một lưới con của $\{y_\alpha\}$ nếu cần thiết). Lấy giới hạn (1.6), ta có

$$\xi_e(-f(x_0, t_0, y_0, \gamma_0)) \geq r,$$

và do đó,

$$\max_{y\in K(x_0,\gamma_0)} \xi_e(-f(x_0,t_0,y,\gamma_0)) \geq r. \tag{1.7}$$

Vì $t_0 \in T(x_0,\gamma_0)$ là tùy ý, ta suy ra từ (1.7) rằng

$$h(x_0,\gamma_0)) = \min_{t\in T(x_0,\gamma_0)} \max_{y\in K(x_0,\gamma_0)} \xi_e(-f(x_0,t,y,\gamma_0)) \geq r,$$

nghĩa là, với mỗi $r \in \mathbb{R}$, tập mức trên $\{(x,\gamma) \mid h(x,\gamma) \geq r\}$ là đóng. Do đó, h là nửa liên tục trên trong $A \times \Gamma$. □

1.4 Tính liên tục của ánh xạ nghiệm cho bài toán tựa cân bằng

Trong mục này, chúng ta nghiên cứu tính nửa liên tục trên, tính nửa liên tục dưới Hausdorff và tính liên tục Hausdorff của ánh xạ nghiệm cho bài toán (QEP_1) và (QEP_2).

1.4.1 Định lý. *Với bài toán* (QEP_1) *và* (QEP_2)*, ta giả sử rằng A là tập compắc, K là liên tục trong A và có giá trị compắc và tập mức* $\mathrm{L}_{\geq_C 0}f$ *là đóng. Khi đó,*

(i) *S_1 là nửa liên tục trên và đóng trong Γ và có giá trị compắc nếu T là nửa liên tục dưới trong A.*

(ii) *S_2 là nửa liên tục trên và đóng trong Γ và có giá trị compắc nếu T là nửa liên tục trên trong A và có giá trị compắc.*

trong đó, $\mathrm{L}_{\geq_C 0}f := \{(x,t,y,\gamma) \in A \times B \times A \times \Gamma \mid f(x,t,y,\gamma) \in C\}$.

Chứng minh. Chúng ta chỉ chứng minh cho trường hợp (ii). Giả sử ngược lại rằng S_2 là không nửa liên tục trên tại γ_0 với $\gamma_0 \in \Gamma$. Khi đó tồn tại

một tập mở U, $S_2(\gamma_0) \subset U$ và một lưới $\{\gamma_\alpha\} \subset \Gamma$, $\gamma_\alpha \to \gamma_0$ sao cho tồn tại $x_\alpha \in S_2(\gamma_\alpha) \setminus U$ với mọi α. Từ tính compắc của A, ta có thể giả sử rằng x_α hội tụ về x_0 với $x_0 \in A$. Vì K là liên tục với giá trị compắc, ta có thể kết luận rằng K là đóng tại (x_0, γ_0), do đó $x_0 \in K(x_0, \gamma_0)$. Bây giờ chúng ta chứng tỏ rằng x_0 thuộc vào $S_2(\gamma_0)$. Giả sử ngược lại rằng $x_0 \notin S_2(\gamma_0)$. Vì $x_\alpha \in S_2(\gamma_\alpha)$, tồn tại $t_\alpha \in T(x_\alpha, \gamma_\alpha)$ sao cho

$$f(x_\alpha, t_\alpha, y, \gamma_0) \in C, \forall y \in K(x_\alpha, \gamma_\alpha).$$

Vì T là nửa liên tục trên tại (x_0, γ_0) và có giá trị compắc, ta có thể giả sử rằng $t_\alpha \to t_0$ với $t_0 \in T(x_0, \gamma_0)$. Do $x_0 \notin S_1(\gamma_0)$, nên tồn tại $y_0 \in K(x_0, \gamma_0)$ sao cho

$$f(x_0, t_0, y_0, \gamma_0) \notin C. \tag{1.8}$$

Sử dụng tính nửa liên tục dưới của K tại (x_0, γ_0), tồn tại $y_\alpha \in K(x_\alpha, \gamma_\alpha)$ sao cho $y_\alpha \to y_0$. Vì $y_\alpha \in K(x_\alpha, \gamma_\alpha)$, nên

$$f(x_\alpha, t_\alpha, y_\alpha, \gamma_\alpha) \in C. \tag{1.9}$$

Kết hợp (1.9) và tính đóng của $\mathrm{L}_{\geq_C 0} f$, ta suy ra rằng

$$f(x_0, t_0, y_0, \gamma_0) \in C.$$

Điều này mâu thuẫn với (1.8). Do đó, $x_0 \in S_2(\gamma_0) \subset U$, điều này không thể vì $x_\alpha \notin U$ với mọi α. Vì vậy, S_2 là nửa liên tục trên trong Γ.

Tiếp theo, chúng ta chứng tỏ S_2 là đóng trong Γ. Lấy $\gamma_0 \in \Gamma$ là tùy ý, và giả sử rằng $\{\gamma_\alpha\} \subset \Gamma$, $x_\alpha \in S_2(\gamma_\alpha)$, $(x_\alpha, \gamma_\alpha) \to (x_0, \gamma_0)$. Bởi lý luận tương tự như ở trên ta cũng có $x_0 \in S_2(\gamma_0)$, và do đó S_2 là đóng trong Γ. Từ S_2 là đóng trong Γ, $S_2(\gamma)$ là một tập con đóng của A với mọi $\gamma \in \Gamma$. Do đó, S_2 có giá trị compắc vì A là compắc. □

Ví dụ sau đây chứng tỏ rằng tính nửa liên tục trên của K trong Định lý 1.4.1(i) là cần thiết.

1.4.2 Ví dụ. Giả sử rằng $X = Y = Z = P = \mathbb{R}$, $A = B = [-1, 1]$, $\Gamma = [0, 1], C = \mathbb{R}_+$, $K(x, \gamma) = (-\gamma, 1], T(x, \gamma) = [0, 1]$ và $f(x, t, y, \gamma) = x^2 - yx$. Ta dễ dàng thấy rằng K là nửa liên tục dưới, T và f là liên tục, nhưng S_1 là không nửa liên tục trên tại 0 (thật vậy, $S_1(0) = \{1\}$ và $S_1(\gamma) = \{0, 1\}$ với mọi $\gamma \neq 0$), do K là không nửa liên tục trên tại $(x, 0)$.

Ví dụ sau đây chứng tỏ rằng tính nửa liên tục dưới của T trong Định lý 1.4.1(i) là cần thiết.

1.4.3 Ví dụ. Giả sử $X = Y = Z = P = \mathbb{R}, A = B = [-1, 1], \Gamma = [0, 1], C = \mathbb{R}_+$, $K(x, \gamma) \equiv [0, 1]$, $f(x, t, y, \gamma) = t(y - x)2^\gamma$ và

$$T(x, \gamma) = \begin{cases} [-1, 0], & \text{nếu} \quad \gamma = 0, \\ [0, 1], & \text{ngược lại .} \end{cases}$$

Khi đó, tất cả các giả thiết của Định lý 1.4.1(i) là được thỏa mãn ngoại trừ tính nửa liên tục dưới của T. Tính toán trực tiếp ta có

$$S_1(\gamma) = \begin{cases} \{1\}, & \text{nếu} \quad \gamma = 0, \\ \{0\}, & \text{ngược lại} \end{cases}$$

và ánh xạ nghiệm này không nửa liên tục trên tại $\gamma = 0$.

Ví dụ sau đây chứng tỏ rằng tính đóng của tập mức $\mathrm{L}_{\geq_C 0} f$ trong Định lý 1.4.1(i) là cần thiết.

1.4.4 Ví dụ. Giả sử $X = Y = Z = P = \mathbb{R}, A = B = \Gamma = [0, 1], C = \mathbb{R}_+$, $K(x, \gamma) \equiv [0, 1], T(x, \gamma) \equiv [0, 1]$ và

$$f(x, t, y, \gamma) = \begin{cases} (x - y)2^\gamma, & \text{nếu} \quad \gamma = 0, \\ (y - x)2^\gamma, & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

Chúng ta thấy rằng tất cả các giả thiết trong Định lý 1.4.1(i) thỏa mãn ngoại trừ tính đóng của tập mức $\mathrm{L}_{\geq_C 0} f$ (thực tế, lấy $x_n = 0$, $y_n = 1 + \frac{1}{n}$, $\gamma_n = \frac{1}{n}$, khi đó $(x_n, y_n, \gamma_n) \to (0, 1, 0)$ và $f(x_n, y_n, \gamma_n) = (1 + \frac{1}{n})2^{1/n} > 0$ nhưng $f(0, 1, 0) = -1 < 0$). Tính toán trực tiếp ta có $S_1(0) = \{1\}$ và $S_1(\gamma) = \{0\}$ với mọi $\gamma \neq 0$ và do đó S_1 là không nửa liên tục trên tại 0.

Xuất phát từ ý tưởng của giả thiết (H_1) trong [47], [74], (H_g) trong [23], [52] và (H'_g) trong [77], chúng ta giới thiệu các giả thiết căn bản sau:

$(H_p(\gamma_0))$: Với $\gamma_0 \in \Gamma$ và bất kỳ lân cận mở U của gốc trong X, tồn tại $\rho > 0$ và một lân cận $V(\gamma_0)$ của γ_0 sao cho với mọi $\gamma \in V(\gamma_0)$ và $x \in E(\gamma) \setminus (S_1(\gamma) + U)$, ta có $p(x, \gamma) \geq \rho$.

$(H_h(\gamma_0))$: Với $\gamma_0 \in \Gamma$ và bất kỳ lân cận mở U của gốc trong X, tồn tại $\rho > 0$ và một lân cận $V(\gamma_0)$ của γ_0 sao cho với mọi $\gamma \in V(\gamma_0)$ và $x \in E(\gamma) \setminus (S_2(\gamma) + U)$, ta có $h(x, \gamma) \geq \rho$.

Mệnh đề sau đây là mô tả đặc trưng của các giả thiết căn bản $(H_p(\gamma_0))$ và $(H_h(\gamma_0))$.

1.4.5 Mệnh đề. *Giả sử rằng tất cả các điều kiện trong Định lý 1.3.4 được thỏa mãn. Với bất kỳ lân cận mở U của gốc trong X, đặt*

$$\Xi_U(\gamma) := \inf_{x \in E(\gamma) \setminus (S_1(\gamma)+U)} p(x, \gamma),$$

$$\Theta_U(\gamma) := \inf_{x \in E(\gamma) \setminus (S_2(\gamma)+U)} h(x, \gamma).$$

Khi đó,

(i) $(H_p(\gamma_0))$ *thỏa mãn khi và chỉ khi*

$$\liminf_{\gamma \to \gamma_0} \Xi_U(\gamma) > 0.$$

(ii) $(H_h(\gamma_0))$ *thỏa mãn khi và chỉ khi*

$$\liminf_{\gamma \to \gamma_0} \Theta_U(\gamma) > 0.$$

Chứng minh. Vì kỹ thuật chứng minh cho hai trường hợp trên là tương tự, do đó ta chỉ chứng minh cho trường hợp (i). Nếu $(H_p(\gamma_0))$ thỏa mãn, khi đó với bất kỳ lân cận mở U của gốc trong X, tồn tại $\rho > 0$ và một lân cận $V(\gamma_0)$ của γ_0 sao cho với mọi $\gamma \in V(\gamma_0)$ và $x \in E(\gamma) \setminus (S_1(\gamma) + U)$,

ta có $p(x,\gamma) \geq \rho$. Điều này kết luận rằng $\Xi_U(\gamma) \geq \rho$, với mọi $\gamma \in V(\gamma_0)$, và do đó

$$\liminf_{\gamma \to \gamma_0} \Xi_U(\gamma) \geq \rho > 0.$$

Ngược lại, với bất kỳ lân cận mở U của gốc trong X, thì

$$\omega = \liminf_{\gamma \to \gamma_0} \Xi_U(\gamma) > 0,$$

khi đó tồn tại một lân cận $V(\gamma_0)$ của γ_0 sao cho

$$\Xi_U(\gamma) \geq \rho := \frac{1}{2}\omega > 0,$$

với mọi $\gamma \in V(\gamma_0)$. Do đó, với bất kỳ $x \in E(\gamma) \setminus (S_1(\gamma) + U)$, ta có

$$p(x,\gamma) \geq \rho > 0,$$

nghĩa là, $(H_p(\gamma_0))$ được thỏa mãn. □

Bây giờ, chúng ta chứng tỏ giả thiết $(H_p(\gamma_0))$ và $(H_h(\gamma_0))$ tương ứng là điều kiện cần và đủ cho tính nửa liên tục dưới Hausdorff của ánh xạ nghiệm cho bài toán (QEP_1) và (QEP_2).

1.4.6 Định lý. *Với bài toán* (QEP_1) *và* (QEP_2)*, ta giả sử rằng* A *là compắc,* K *và* T *là liên tục trong* $A \times \Gamma$ *và có giá trị compắc và* f *là liên tục trong* $A \times B \times A \times \Lambda$*. Khi đó,*

(i) S_1 *là nửa liên tục dưới Hausdorff trong* Γ *khi và chỉ khi* $(H_p(\gamma_0))$ *thỏa mãn với mọi* $\gamma_0 \in \Gamma$.

(ii) S_2 *là nửa liên tục dưới Hausdorff trong* Γ *khi và chỉ khi* $(H_h(\gamma_0))$ *thỏa mãn với mọi* $\gamma_0 \in \Gamma$.

Chứng minh. Vì chứng minh các trường hợp trên là tương tự, do đó chúng ta chỉ chứng minh cho trường hợp (i). Giả sử ngược lại rằng $(H_p(\gamma_0))$ thỏa

mãn, nhưng S_1 là không nửa liên tục dưới Hausdorff tại γ_0 với $\gamma_0 \in \Gamma$. Khi đó, tồn tại một lân cận U của gốc trong X, một lưới $\{\gamma_\alpha\} \subset \Gamma$ với $\gamma_\alpha \to \gamma_0$ và lưới $\{x_\alpha\}$ sao cho

$$x_\alpha \in S_1(\gamma_0) \setminus (S_1(\gamma_\alpha) + U). \tag{1.10}$$

Bằng việc lý luận tương tự như trong chứng minh của Định lý 1.4.1, ta suy ra rằng $S_1(\gamma_0)$ là compắc, do đó ta có thể giả sử rằng $x_\alpha \to x_0$ với $x_0 \in S_1(\gamma_0)$. Vì U là một lân cận của gốc trong X, tồn tại một lân cận cân mở B_0 của gốc trong X, nghĩa là, $\lambda B \subset B, \forall \lambda \in [-1; 1]$ sao cho $B_0 + B_0 + B_0 \subset U$. Từ $x_0 \in S_1(\gamma_0)$, ta có $(x_0 + B_0) \cap K(x_0, \gamma_0) \neq \emptyset$. Vì K là nửa liên tục dưới tại (x_0, γ_0), tồn tại một lưới con $\{(x_\beta, \gamma_\beta)\}$ của $\{(x_\alpha, \gamma_\alpha)\}$ sao cho $(x_0 + B_0) \cap K(x_\beta, \gamma_\beta) \neq \emptyset$ với mọi β. Lấy $\tau_\beta \in (x_0 + B_0) \cap K(x_\beta, \gamma_\beta)$. Chúng ta chứng tỏ rằng $\tau_\beta \notin S_1(\gamma_\beta) + B_0$. Thật vậy, giả sử ngược lại rằng tồn tại $\delta_\beta \in S_1(\gamma_\beta)$ sao cho $\tau_\beta - \delta_\beta \in B_0$. Vì $x_\beta \to x_0$, ta có thể giả sử rằng $x_\beta - x_0 \in B_0$ (có thể lấy một lưới con nếu cần thiết), vì vậy ta có

$$x_\beta - \delta_\beta = (x_\beta - x_0) + (x_0 - \tau_\beta) + (\tau_\beta - \delta_\beta) \in B_0 + B_0 + B_0 \subset U.$$

Điều này suy ra rằng $x_\beta \in S_1(\gamma_\beta) + U$, mâu thuẫn với (1.10). Vì vậy,

$$\tau_\beta \notin S_1(\gamma_\beta) + B_0.$$

Sử dụng giả thiết $(H_p(\gamma_0))$, tồn tại $\rho > 0$ sao cho $p(\tau_\beta, \gamma_\beta) \geq \rho$. Từ Định lý 1.3.4, p là liên tục trong $A \times \Gamma$, do đó

$$p(x_0, \gamma_0) \geq \rho > 0,$$

nghĩa là,

$$p(x_0, \gamma_0) = \max_{t \in T(y, \gamma_0)} \max_{y \in K(x_0, \gamma_0)} \xi_e(-f(x_0, t, y, \gamma_0)) > 0.$$

Vì vậy, tồn tại $y_0 \in K(x_0, \gamma_0)$ và $t_0 \in T(y_0, \gamma_0)$ sao cho

$$\xi_e(-f(x_0, t_0, y_0, \gamma_0)) > 0.$$

Từ Bổ đề 1.1.8(iii), ta có

$$-f(x_0, t_0, y_0, \gamma_0) \notin -C,$$

hay

$$f(x_0, t_0, y_0, \gamma_0) \notin C,$$

điều này mâu thuẫn với $x_0 \in S_1(\gamma_0)$. Vì vậy, S_1 là nửa liên tục dưới Hausdorff trong Γ.

Ngược lại, giả sử rằng S_1 là nửa liên tục dưới Hausdorff tại γ_0, nhưng $(H_p(\gamma_0))$ là không thỏa mãn với $\gamma_0 \in \Gamma$. Từ Mệnh đề 1.4.5, tồn tại một lân cận mở U của gốc trong X sao cho

$$\liminf_{\gamma \to \gamma_0} \Xi_U(\gamma) = 0.$$

Khi đó tồn tại một lưới $\{\gamma_\alpha\} \subset \Gamma$ với $\gamma_\alpha \to \gamma_0$ sao cho

$$\lim_{\gamma_\alpha \to \gamma_0} \Xi_U(\gamma_\alpha) = \lim_{\gamma_\alpha \to \gamma_0} \inf_{x \in E(\gamma_\alpha) \setminus (S_1(\gamma_\alpha) + U)} p(x, \gamma_\alpha) = 0. \tag{1.11}$$

Do K là nửa liên tục trên với giá trị compắc và A là compắc, ta suy ra rằng K là đóng. Vì vậy, với mọi $\gamma \in \Gamma$, $E(\gamma)$ là một tập con đóng của A, nên $E(\gamma)$ là compắc. Do đó, với mọi α, $E(\gamma_\alpha) \setminus (S_1(\gamma_\alpha) + U)$ là compắc. Vì p là liên tục, tồn tại $x_\alpha \in E(\gamma_\alpha) \setminus (S_1(\gamma_\alpha) + U)$ thỏa mãn $\Xi_U(\gamma_\alpha) = p(x_\alpha, \gamma_\alpha)$. Rõ ràng rằng (1.11) suy ra $\lim\limits_{\gamma_\alpha \to \gamma_0} p(x_\alpha, \gamma_\alpha) = 0$. Kết hợp tính compắc của A và giả thiết (i), ta có thể giả sử $x_\alpha \to x_0$ với $x_0 \in K(x_0, \gamma_0)$. Bởi tính liên tục của p, ta có $p(x_0, \gamma_0) = 0$ và do đó $x_0 \in S_1(\gamma_0)$. Vì S_1 là nửa liên tục dưới Hausdorff trong Γ, ta có thể tìm một lưới $\{x'_\alpha\}$, $x'_\alpha \in S_1(\gamma_\alpha)$ sao cho $x'_\alpha \to x_0$. Vì $x_\alpha \in E(\gamma_\alpha) \setminus (S_1(\gamma_\alpha) + U)$, ta suy ra rằng $x_\alpha - x'_\alpha \notin U$. Vì x_α, x'_α hội tụ về x_0. Điều này là vô lý. Ta hoàn thành chứng minh. $\square$

Từ các kết quả của Định lý 1.4.1 và Định lý 1.4.6, ta có định lý sau đây.

1.4.7 Định lý. *Giả sử rằng tất cả các điều kiện trong Định lý 1.4.6 là thỏa mãn. Khi đó,*

(i) *S_1 là liên tục Hausdorff với giá trị compắc trong Γ khi và chỉ khi $(H_p(\gamma_0))$ thỏa mãn với mọi $\gamma_0 \in \Gamma$.*

(ii) *S_2 là liên tục Hausdorff với giá trị compắc trong Γ khi và chỉ khi $(H_h(\gamma_0))$ thỏa mãn với mọi $\gamma_0 \in \Gamma$.*

1.5 Áp dụng cho bất đẳng thức tựa biến phân

Vì bài toán cân bằng chứa bài toán tối ưu, bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán điểm bất động, bài toán bù, bài toán mạng giao thông,..., nên các kết quả ở các mục ở trên có thể suy ra trực tiếp các kết quả tương ứng như là các trường hợp đặc biệt. Trong mục này, chúng ta chỉ xét cho trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức tựa biến phân loại Minty và Stampacchia.

Giả sử X, Z, A, B, C, K, T và các ký hiệu như trong Mục 1.2, $L(X; Z)$ là không gian các toán tử tuyến tính liên tục từ X vào Z và $g : A \times \Gamma \to A$ là một hàm véctơ. $\langle t, x\rangle$ biểu thị giá trị của toán tử tuyến tính $t \in L(X; Z)$ tại $x \in X$. Chúng ta luôn giả sử rằng $\langle \cdot, \cdot\rangle : L(X; Z) \times X \to Z$ là liên tục.

Với mọi $\gamma \in \Gamma$, chúng ta xét hai *bất đẳng thức tựa biến phân véctơ loại Minty và Stampacchia* sau.

(MQVI) Tìm $x \in K(x, \gamma)$ sao cho

$$\langle t, y - g(x, \gamma)\rangle \in C, \forall y \in K(x, \gamma), \forall t \in T(y, \gamma).$$

(SQVI) Tìm $x \in K(x, \gamma)$ sao cho tồn tại $t \in T(x, \gamma)$ thỏa mãn

$$\langle t, y - g(x, \gamma)\rangle \in C, \forall y \in K(x, \gamma).$$

Đặt

$$f(x,t,y,\gamma) = \langle t, y - g(x,\gamma)\rangle, \tag{1.12}$$

bài toán (MQVI) và (SQVI) tương ứng trở thành các trường hợp đặc biệt của (QEP_1) và (QEP_2). Với mỗi $\gamma \in \Gamma$, chúng ta ký hiệu $\Phi(\gamma)$ và $\Psi(\gamma)$ tương ứng là các tập nghiệm của bài toán (MQVI) và (SQVI). Chúng ta giả sử rằng các tập nghiệm này là khác rỗng trong một lân cận của $\gamma_0 \in \Gamma$.

Các kết quả sau đây được suy ra từ các kết quả chính của Mục 1.4.

1.5.1 Hệ quả. *Với bài toán* (MQVI) *và* (SQVI)*, ta giả sử rằng A là compắc, K và T là liên tục trong $A \times \Gamma$ và có giá trị compắc và g là liên tục trong $A \times \Gamma$. Khi đó,*

(i) *Φ là nửa liên tục dưới Hausdorff trong Γ khi và chỉ khi $(H_p(\gamma_0))$ thỏa mãn với mọi $\gamma_0 \in \Gamma$.*

(ii) *Ψ là nửa liên tục dưới Hausdorff trong Γ khi và chỉ khi $(H_h(\gamma_0))$ thỏa mãn với mọi $\gamma_0 \in \Gamma$.*

Chứng minh. Kết hợp tính liên tục của g và (1.12), ta suy ra f liên tục. Ta thấy rằng tất cả các giả thiết của Định lý 1.4.6 là thỏa mãn và do đó áp dụng định lý này ta nhận được Hệ quả 1.5.1. □

1.5.2 Nhận xét. Trong trường hợp đặc biệt, $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^m, C = \mathbb{R}_+$, $g(x,\gamma) = x$, bài toán (MQVI) trở về bất đẳng thức tựa biến phân vô hướng phụ thuộc tham số loại Minty và đã được nghiên cứu trong [49]. Do đó Hệ quả 1.5.1(i) là mở rộng Định lý 4.4 trong [49]. Ngoài ra, giả thiết (H_p) của chúng tôi là điều kiện cần và đủ cho tính nửa liên tục dưới Hausdorff của ánh xạ nghiệm cho bài toán (MQVI), trong khi giả thiết (H_g) trong [49] chỉ là điều kiện đủ.

Cuối cùng, ta có xét tính liên tục Hausdorf của Φ và Ψ.

1.5.3 Hệ quả. *Giả sử rằng tất cả các điều kiện trong Hệ quả 1.5.1 là thỏa mãn. Khi đó,*

(i) Φ *là liên tục Hausdorff với giá trị compắc trong* Γ *khi và chỉ khi* $(H_p(\gamma_0))$ *thỏa mãn với mọi* $\gamma_0 \in \Gamma$.

(ii) Ψ *là liên tục Hausdorff với giá trị compắc trong* Γ *khi và chỉ khi* $(H_h(\gamma_0))$ *thỏa mãn với mọi* $\gamma_0 \in \Gamma$.

1.6 Kết luận Chương 1

Trong Chương 1, chúng tôi đã đạt được những kết quả sau đây:

- Thiết lập được các hàm đánh giá cho các bài toán tựa cân bằng (QEP_1) và (QEP_2) (Định nghĩa 1.3.1, Định lý 1.3.2). Sau đó khảo sát tính liên tục của chúng (Định lý 1.3.4).

- Khảo sát tính nửa liên tục trên cho ánh xạ nghiệm của bài toán tựa cân bằng (QEP_1) và (QEP_2) (Định lý 1.4.1). Trên cơ sở hàm đánh giá, chúng tôi nghiên cứu giả thiết căn bản $(H_p(\gamma_0))$ và $(H_h(\gamma_0))$. Sau đó, chúng tôi chứng tỏ rằng các giả thiết này là điều kiện cần và đủ cho tính nửa liên tục dưới Hausdorff và liên tục Hausdorff của ánh xạ nghiệm cho bài toán (QEP_1) và (QEP_2) (Định lý 1.4.6 và Định lý 1.4.7).

- Từ các kết quả chính trong Mục 1.4. Chúng tôi áp dụng cho bất đẳng thức tựa biến phân loại Minty và Stampacchia (MQVI) và (SQVI). Các kết quả thu được là Hệ quả 1.5.1 và Hệ quả 1.5.3.

Các kết quả trên được trích ra từ bài báo:

L. Q. Anh and N. V. Hung (2018), Gap functions and Hausdorff continuity of solution mappings to parametric strong vector quasiequilibrium problems, *Journal of Industrial and Management Optimization*, **14**, 65-79.

CHƯƠNG 2

TÍNH HỘI TỤ CỦA TẬP NGHIỆM CHO BÀI TOÁN TỰA CÂN BẰNG

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu về tính hội tụ Painlevé-Kuratowski của tập nghiệm bằng cách sử dụng phương pháp hàm đánh giá cho bài toán tựa cân bằng véctơ. Đầu tiên, chúng tôi giới thiệu dãy hàm đánh giá cho bài toán này và thiết lập tính liên tục của chúng. Sau đó, chúng tôi nghiên cứu tính hội tụ trên, hội tụ dưới và hội tụ theo nghĩa Painlevé-Kuratowski của tập nghiệm của bài toán này. Trong mục ứng dụng, chúng tôi nghiên cứu trường hợp đặc biệt cho bất đẳng thức tựa biến phân.

2.1 Dãy các bài toán tựa cân bằng

Cho X, Y, Z là các không gian mêtric tuyến tính, $A \subset X, B \subset Y$ là các tập con compắc. Ta nhắc lại rằng $\mathcal{E}$ được gọi là một không gian mêtric tuyến tính nếu và chỉ nếu nó là một không gian mêtric và không gian tuyến tính với mêtric d của $\mathcal{E}$ là bất biến qua phép chuyển dịch (nghĩa là, $d(x+z, y+z) = d(x, y)$ với mọi $x, y, z \in \mathcal{E}$ và bất kỳ dãy hội tụ $\{\lambda_m\}$ trong $\mathbb{R}$ và $\{x_m\}$ trong $\mathcal{E}$, ta có $\lim\limits_{m\to\infty}(\lambda_m x_m) = (\lim\limits_{m\to\infty}\lambda_m)(\lim\limits_{m\to\infty} x_m))$. Lấy $K : A \rightrightarrows A, T : A \rightrightarrows B$ là các ánh xạ đa trị và $f : A \times B \times A \to Z$ là ánh xạ đơn trị, $C : A \rightrightarrows Z$ là ánh xạ đa trị sao cho với mọi $x \in A$, $C(x)$

là một nón lồi đóng trong Z với $\mathrm{int}C(x) \neq \emptyset$. Chúng ta xét *bài toán tựa cân bằng tổng quát yếu* sau đây.

(WQEP) Tìm $\bar{x} \in K(\bar{x})$ sao cho tồn tại $z \in T(\bar{x})$ thỏa mãn

$$f(\bar{x}, z, y) \in Z \setminus -\mathrm{int}C(\bar{x}), \forall y \in K(\bar{x}).$$

Với các dãy của các ánh xạ đa trị $K_n : A \rightrightarrows A, T_n : A \rightrightarrows B$ và ánh xạ đơn trị $f_n : A \times B \times A \to Z$ với $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, ta xét *dãy các bài toán tựa cân bằng tổng quát yếu* sau đây.

$(\mathrm{WQEP})_n$ Tìm $\bar{x} \in K_n(\bar{x})$ sao cho tồn tại $z \in T_n(\bar{x})$ thỏa mãn

$$f_n(\bar{x}, z, y) \in Z \setminus -\mathrm{int}C(\bar{x}), \forall y \in K_n(\bar{x}).$$

Ký hiệu $S(f, T, K)$ và $S(f_n, T_n, K_n)$ tương ứng là các tập nghiệm của bài toán (WQEP) và $(\mathrm{WQEP})_n$, nghĩa là

$$\begin{aligned} S(f, T, K) :=& \{\bar{x} \in K(\bar{x}) \mid \exists z \in T(\bar{x}) \text{ sao cho} \\ & f(\bar{x}, z, y) \in Z \setminus -\mathrm{int}C(\bar{x}), \forall y \in K(\bar{x})\}, \\ S(f_n, T_n, K_n) :=& \{\bar{x} \in K_n(\bar{x}) \mid \exists z \in T_n(\bar{x}) \text{ sao cho} \\ & f_n(\bar{x}, z, y) \in Z \setminus -\mathrm{int}C(\bar{x}), \forall y \in K_n(\bar{x})\}. \end{aligned}$$

Vì sự tồn tại nghiệm cho bài toán (WQEP) đã được nhiều tác giả nghiên cứu ([18], [38], [39]), nên ta luôn giả sử tập nghiệm của (WQEP) là khác rỗng.

Để minh họa cho sự tổng quát hóa bài toán (WQEP) và $(\mathrm{WQEP})_n$, chúng ta giới thiệu một số trường hợp đặc biệt sau:

(a) Nếu X là một không gian Banach, $Z = \mathbb{R}$, $Y = X^*$ với X^* là không gian đối ngẫu của X, $K(x) \equiv A$, $K_n(x) \equiv A_n$, $C(x) \equiv \mathbb{R}_+$, $f(x, z, y) = f_n(x, z, y) = \langle z, y - x \rangle$, trong đó A và A_n là các tập

con lồi đóng khác rỗng của X. Khi đó, bài toán tựa cân bằng tổng quát trở thành bài toán bất đẳng thức biến phân tổng quát đã được nghiên cứu bởi Lignola và Morgan ([54]).

(b) Nếu $X \equiv Z$, Y là các không gian định chuẩn và $C(x) \equiv C$, $T(x) = \{x\}$, trong đó C là nón lồi đóng với phần trong khác rỗng, $K(x) = K_n(x) \equiv A$. Khi đó, bài toán tựa cân bằng tổng quát trở thành bài toán cân bằng đã được nghiên cứu bởi Fang và Li ([33]), Peng và Yang ([64]).

(c) Nếu lấy $X \equiv Z$ và Y là các không gian định chuẩn, $C(x) \equiv C$, $T(x) = \{x\}$, $K(x) \equiv A$, $K_n(x) = A_n$, $f(x, z, y) = \varphi(y) - \varphi(x)$, $f_n(x, z, y) = \varphi_n(y) - \varphi_n(x)$, trong đó φ, φ_n là ánh xạ từ A vào Y và A, A_n là các tập con lồi đóng khác rỗng của X. Khi đó, bài toán tựa cân bằng tổng quát trở thành bài toán tối ưu đã được nghiên cứu bởi Lalitha và Chatterjee ([50]).

Sau đây chúng ta nhắc lại một số khái niệm liên quan đến sự hội tụ của dãy tập và dãy hàm ([16], [30], [65], [71]).

2.1.1 Định nghĩa. ([30, Definition 3.1]) Một dãy các tập $\{D_n\}$, $D_n \subset X$ được gọi là *hội tụ trên* (*hội tụ dưới*) theo nghĩa Painlevé-Kuratowski đến D nếu $\limsup\limits_{n\to\infty} D_n \subset D$ ($D \subset \liminf\limits_{n\to\infty} D_n$, tương ứng). $\{D_n\}$ được gọi là *hội tụ* theo nghĩa Painlevé-Kuratowski đến D nếu $\limsup\limits_{n\to\infty} D_n \subset D \subset \liminf\limits_{n\to\infty} D_n$, trong đó

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} D_n :=& \{x \in X \mid x = \lim_{n\to\infty} x_n, x_n \in D_n \quad \text{với } n \text{ đủ lớn}\},\\
\limsup_{n\to\infty} D_n :=& \{x \in X \mid x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}, x_{n_k} \in D_{n_k},\\
& \qquad \{x_{n_k}\} \text{ là một dãy con của } \{x_n\}\}.
\end{aligned}$$

2.1.2 Định nghĩa. ([65, Definition 5.4]) Một ánh xạ đa trị $G : X \rightrightarrows Y$ là *nửa liên tục ngoài* (*nửa liên tục trong*) tại x_0 nếu $\limsup\limits_{x\to x_0} G(x) \subset G(x_0)$

($\liminf_{x\to x_0} G(x) \supset G(x_0)$, tương ứng), trong đó

$$\begin{aligned}\limsup_{x\to x_0} G(x) &:= \bigcup_{x_n\to x_0} \limsup_{n\to\infty} G(x_n)\\ &:=\{y \in Y \mid \exists x_n \to x_0, \exists y_n \in G(x_n), y_n \to y\},\\ \liminf_{x\to x_0} G(x) &:= \bigcap_{x_n\to x_0} \liminf_{n\to\infty} G(x_n)\\ &:=\{y \in Y \mid \forall x_n \to x_0, \exists y_n \in G(x_n), y_n \to y\}.\end{aligned}$$

Ánh xạ đa trị G được gọi là *liên tục tại* x_0 nếu G là nửa liên tục ngoài và nửa liên tục trong tại x_0.

2.1.3 Định nghĩa. ([50, Definition 2.3]) Một dãy các ánh xạ đơn trị $\{f_n\}$, $f_n : X \to Y$ được gọi là *hội tụ liên tục* đến ánh xạ $f : X \to Y$ tại x_0 nếu $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x_0)$ với mọi $x_n \to x_0$.

2.1.4 Định nghĩa. ([34, Definition 2.3]) Cho $\{G_n\}$, $G_n : X \rightrightarrows Y$ là một dãy các ánh xạ đa trị và $G : X \rightrightarrows Y$ là một ánh xạ đa trị. $\{G_n\}$ được gọi là *hội tụ liên tục ngoài* (*hội tụ liên tục trong*) đến G tại x_0 nếu $\limsup_{n\to\infty} G_n(x_n) \subset G(x_0)$ ($G(x_0) \subset \liminf_{n\to\infty} G_n(x_n)$, tương ứng) với mọi $x_n \to x_0$. $\{G_n\}$ được gọi là *hội tụ liên tục* đến G tại x_0 nếu $\limsup_{n\to\infty} G_n(x_n) \subset G(x_0) \subset \liminf_{n\to\infty} G_n(x_n)$ với mọi $x_n \to x_0$.

2.1.5 Bổ đề. ([21, Proposition 1.54]) *Giả sử X và Z là hai không gian véctơ tôpô Hausdorff lồi địa phương, $C : X \rightrightarrows Z$ là ánh xạ đa trị sao cho với bất kỳ $x \in X, C(x)$ là một nón lồi, đóng trong Z với* $\mathrm{int}C(x) \neq \emptyset$. *Giả sử $e : X \to Z$ là lát cắt liên tục của ánh xạ đa trị* $\mathrm{int}C(\cdot)$ *(nghĩa là $e(x) \in \mathrm{int}C(x)$). Xét ánh xạ đa trị $V : X \rightrightarrows Z$ bởi $V(x) = Z \setminus \mathrm{int}C(x)$ với mọi $x \in X$. Khi đó, hàm vô hướng hóa phi tuyến $\xi_e : X \times Z \to \mathbb{R}$ được định nghĩa bởi $\xi_e(x, y) := \inf\{r \in \mathbb{R} \mid y \in re(x) - C(x)\}$ với mọi $(x, y) \in X \times Z$ có các tính chất sau:*

(i) $\xi_e(x, y) < r \Leftrightarrow y \in re(x) - \mathrm{int}C(x)$;

(ii) $\xi_e(x,y) \geq r \Leftrightarrow y \notin re(x) - \mathrm{int}C(x)$;

(iii) *Nếu V và C là nửa liên tục trên, thì ξ_e là liên tục.*

Bây giờ, chúng ta nghiên cứu về hàm đánh giá cho bài toán (WQEP) và $(\mathrm{WQEP})_n$.

2.1.6 Định nghĩa. Hàm $q : A \to \mathbb{R}$ được gọi là *hàm đánh giá* cho bài toán (WQEP) ($(\mathrm{WQEP})_n$, tương ứng), nếu:

(a) $q(x) \geq 0$ với mọi $x \in K(x)$;

(b) $q(x) = 0$ khi và chỉ khi $x \in S(f,T,K)$ ($x \in S(f_n,T_n,K_n)$, tương ứng).

Giả sử rằng K, K_n, T, T_n có giá trị compắc và f, f_n là liên tục. Để thuận tiện trong việc trình bày chúng ta ký hiệu $K_0 := K$, $T_0 := T$, $f_0 := f$. Với $n \in \mathbb{N}$, hàm $h_n : A \to \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$h_n(x) = \min_{z \in T_n(x)} \max_{y \in K_n(x)} \{-\xi_e(x, f_n(x,z,y))\}. \tag{2.1}$$

Chúng ta giả sử rằng f_n là các ánh xạ cân bằng, nghĩa là, $f_n(x,z,x) = 0$ với mọi $x \in A$ và $n \in \mathbb{N}$.

2.1.7 Mệnh đề. *Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, hàm $h_n(x)$ được định nghĩa bởi* (2.1) *là một hàm đánh giá cho bài toán* $(\mathrm{WQEP})_n$

Chứng minh. (i) Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ta xác định hàm $\varphi_n : A \times B \to \mathbb{R}$ bởi

$$\varphi_n(x,z) = \max_{y \in K_n(x)} \{-\xi_e(x, f_n(x,z,y))\}, \forall (x,z) \in A \times B.$$

Đầu tiên, chúng ta chứng tỏ rằng $\varphi_n(x,z) \geq 0$ với mọi $x \in K_n(x)$ và $z \in T_n(x)$. Thật vậy, nếu tồn tại $x \in K_n(x)$ và $z \in T_n(x)$ sao cho $\varphi_n(x,z) < 0$, thì

$$\begin{aligned} 0 > \varphi_n(x,z) &= \max_{y \in K_n(x)} \{-\xi_e(x, f_n(x,z,y))\} \\ &\geq -\xi_e(x, f_n(x,z,y)), \forall y \in K_n(x). \end{aligned}$$

Khi $y = x \in K_n(x)$, ta có

$$\begin{aligned}\xi_e(x, f_n(x, z, x)) = \xi_e(x, 0) &= \inf\{r \in \mathbb{R} \mid 0 \in re(x) - C(x)\} \\ &= \inf\{r \in \mathbb{R} \mid -re(x) \in -C(x)\} \\ &= \inf\{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\} = 0,\end{aligned}$$

điều này là không thể, do đó $\varphi_n(x, z) \geq 0$ với mọi $x \in K_n(x)$ và $z \in T_n(x)$. Vì vậy, với mọi $x \in K(x)$, $h_n(x) = \min\limits_{z \in T_n(x)} \varphi_n(x, z) \geq 0$.

(ii) Lấy $x \in K_n(x)$. Rõ ràng rằng $h_n(x) = 0$ khi và chỉ khi tồn tại $z \in T_n(x)$ sao cho $\varphi_n(x, z) = 0$, nghĩa là, với mọi $y \in K_n(x)$, $\xi_e(x, f_n(x, z, y)) \geq 0$, điều này tương đương với

$$f_n(x, z_n, y) \in Y \setminus -\mathrm{int}C(x), \forall y \in K_n(x), \quad \text{(do Bổ đề 2.1.5 (ii))}.$$

Vì vậy, $x \in S(f_n, T_n, K_n)$. □

Tiếp theo, chúng ta xét một tính chất quan trọng của hàm đánh giá.

2.1.8 Mệnh đề. *Với $n \in \mathbb{N}$ và bài toán* (WQEP) *và* $(\mathrm{WQEP})_n$*, ta giả sử rằng*

(i) *K_n và T_n là liên tục với giá trị compắc;*

(ii) *V, C là nửa liên tục trên và e là liên tục, (trong đó, V, C và e được định nghĩa như trong Bổ đề 2.1.5).*

Khi đó, h_n được định nghĩa bởi (2.1) là liên tục.

Chứng minh. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, đầu tiên ta chứng minh h_n là nửa liên tục dưới. Lấy $r \in \mathbb{R}$ và một dãy $\{x_k\} \subset A$ thỏa mãn $h_n(x_k) \leq r$ với mọi k, và $x_k \to x_0$ khi $k \to \infty$. Ta chứng minh rằng $h_n(x_0) \leq r$. Ta có $h_n(x_k) = \min\limits_{z \in T_n(x_k)} \varphi_n(x_k, z) \leq r$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Vì ξ_e là liên tục và K_n là liên tục

với giá trị compắc, từ Bổ đề 1.1.10, suy ra rằng φ_n là liên tục. Từ tính compắc của $T_n(x_k)$, tồn tại $z_k \in T_n(x_k)$ sao cho

$$h_n(x_k) = \varphi_n(x_k, z_k) = \max_{y \in K_n(x_k)} \{-\xi_e(x_k, f_n(x_k, z_k, y))\} \leq r.$$

Với bất kỳ $y_0 \in K_n(x_0)$, vì K_n là nửa liên tục dưới, nên tồn tại $y_k \in K_n(x_k)$ sao cho $y_k \to y_0$. Từ tính liên tục của ξ_e, ta nhận được

$$\varphi_n(x_0, z) = \max_{y \in K_n(x_0)} \{-\xi_e(x_0, f_n(x_0, z, y))\} \leq r. \tag{2.2}$$

Từ T_n là nửa liên tục trên với giá trị compắc, ta có thể giả sử rằng $\{z_k\}$ hội tụ đến z_0 với $z_0 \in T_n(x_0)$. Vì vậy,

$$h_n(x_0) = \min_{z \in T_n(x_0)} \max_{y \in K_n(x_0)} \{-\xi_e(x_0, f_n(x_0, z, y))\} \leq r,$$

nghĩa là, tập mức $\{x \in A \mid h_n(x) \leq r\}$ là đóng. Do đó, h_n là nửa liên tục dưới.

Cuối cùng, chúng ta chứng tỏ rằng h_n là nửa liên tục trên. Lấy $r \in \mathbb{R}$ tùy ý và một dãy $\{x_k\} \subset A$ thỏa mãn $h_n(x_k) \geq r$ với mọi k và $x_k \to x_0$ khi $k \to \infty$. Khi đó, với mọi $z \in T_n(x_k)$, ta có

$$\varphi_n(x_k, z) = \max_{y \in K_n(x_k)} \{-\xi_e(x_k, f_n(x_k, z, y))\} \geq r.$$

Từ tính compắc của $K_n(x_k)$ và tính liên tục của ξ_e, tồn tại $y_k \in K_n(x_k)$ sao cho

$$\varphi_n(x_k, z) = -\xi_e(x_k, f_n(x_k, z, y_k)) \geq r, \forall z \in T_n(x_k). \tag{2.3}$$

Vì K_n là nửa liên tục trên với giá trị compắc, nên ta có thể giả sử rằng $\{y_k\}$ hội tụ về $y_0 \in K_n(x_0)$. Lấy $z_0 \in T_n(x_0)$ là tùy ý. Vì T_n là nửa liên tục dưới, tồn tại $z_k \in T_n(x_k)$ hội tụ về z_0 khi $k \to \infty$. Kết hợp tính liên tục của ξ_e và (2.3), ta có

$$-\xi_e(x_0, f_n(x_0, z_0, y_0)) \geq r,$$

và do đó

$$\begin{aligned} h_n(x_0) &= \min_{z\in T_n(x_0)} \varphi(x_0, z) \\ &= \min_{z\in T_n(x_0)} \max_{y\in K_n(x_0)} \{-\xi_e(x_0, f_n(x_0, z, y))\} \geq r. \end{aligned}$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh. □

Để kết thúc mục này, chúng ta nghiên cứu tính compắc của tập nghiệm cho các bài toán (WQEP) và $(\text{WQEP})_n$. Cho $W : A \rightrightarrows Z$ xác định bởi $W(x) := Z \setminus -\text{int}C(x)$ với mọi $x \in A$.

2.1.9 Mệnh đề. *Với mỗi $n \in \mathbb{N}$ và bài toán* (WQEP) *và* $(\text{WQEP})_n$*, ta giả sử rằng*

(i) *K_n là liên tục với giá trị compắc;*

(ii) *T_n là nửa liên tục trên với giá trị compắc;*

(iii) *W là đóng.*

Khi đó, $S(f_n, T_n, K_n)$ là compắc.

Chứng minh. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$. Vì A là compắc, ta chỉ cần chứng minh $S(f_n, T_n, K_n)$ là một tập đóng. Lấy $\{x_k\}$, $x_k \in S(f_n, T_n, K_n)$ với $x_k \to x_0$. Do K_n là nửa liên tục trên với giá trị compắc nên ta có $x_0 \in K_n(x_0)$. Từ $x_k \in S(f_n, T_n, K_n)$, tồn tại $z_k \in T_n(x_k)$ sao cho $f_n(x_k, z_k, y) \in W(x_k)$ với mọi $y \in K_n(x_k)$. Vì T_n là nửa liên tục trên với giá trị compắc, nên ta có thể giả sử rằng $\{z_k\}$ hội tụ đến $z_0 \in T_n(x_0)$. Với mọi $y_0 \in K_n(x_0)$, bởi tính nửa liên tục dưới của K_n, tồn tại $y_k \in K_n(x_k)$ sao cho $y_{n_k} \to y_0$. Từ điều kiện (iii), ta có $f_n(x_0, z_0, y_0) \in W(x_0)$, nghĩa là, $x_0 \in S(f_n, T_n, K_n)$. □

2.2 Tính hội tụ của tập nghiệm cho bài toán tựa cân bằng

Đầu tiên, chúng ta sẽ nghiên cứu tính hội tụ trên của các tập nghiệm cho bài toán (WQEP) và $(\text{WQEP})_n$.

2.2.1 Định lý. *Với bài toán* (WQEP) *và* $(\text{WQEP})_n$*, ta giả sử rằng*

(i) $\{K_n\}$ *hội tụ liên tục đến* K;

(ii) $\{T_n\}$ *hội tụ liên tục ngoài đến* T;

(iii) $\{f_n\}$ *hội tụ liên tục đến* f;

(iv) W *là đóng.*

Khi đó, $\limsup\limits_{n\to\infty} S(f_n, T_n, K_n) \subset S(f, T, K)$.

Chứng minh. Giả sử ngược lại rằng $\limsup\limits_{n\to\infty} S(f_n, T_n, K_n) \not\subset S(f, T, K)$, nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \limsup\limits_{n\to\infty} S(f_n, T_n, K_n)$, nhưng $x_0 \notin S(f, T, K)$. Vì $x_0 \in \limsup\limits_{n\to\infty} S(f_n, T_n, K_n)$, tồn tại một dãy con $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} \in S(f_{n_k}, T_{n_k}, K_{n_k})$, $x_{n_k} \to x_0$. Khi đó, có một dãy $z_{n_k} \in T_{n_k}(x_{n_k})$ sao cho

$$f_{n_k}(x_{n_k}, z_{n_k}, y) \in W(x_{n_k}), \forall y \in K_{n_k}(x_{n_k}). \tag{2.4}$$

Vì $\{T_n\}$ hội tụ liên tục ngoài đến T, ta có thể giả sử rằng $z_{n_k} \to z_0 \in T(x_0)$. Với mọi $y_0 \in K(x_0)$, vì $\{K_n\}$ hội tụ liên tục trong đến K, tồn tại một dãy $\{y_{n_k}\}$, $y_{n_k} \in K_{n_k}(x_{n_k})$ hội tụ đến y_0. Do $\{K_n\}$ hội tục liên tục ngoài đến K, nên ta có $x_0 \in K(x_0)$. Kết hợp (2.4) và tính đóng của W, ta suy ra rằng

$$f(x_0, z_0, y_0) \in W(x_0),$$

nghĩa là, $x_0 \in S(f, T, K)$. Điều này là không thể. Vì vậy ta có điều phải chứng minh. □

Ví dụ sau đây chứng tỏ rằng tính hội tụ liên tục của K_n trong Định lý 2.2.1 là cần thiết.

2.2.2 Ví dụ. Lấy $X = Y = Z = \mathbb{R}$, $A = [-1, 1], B = [-3, 3], C(x) = \mathbb{R}_+$, $e(x) \equiv 1$, $K(x) = [-1, 0]$, $T(x) = [\frac{1}{2}, 1 + x^2]$, $K_n(x) = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$, $T_n(x) = [\frac{1}{2}, 1 + x^2]$, $f(x, z, y) = z(y - x)$ và $f_n(x, z, y) = (z + \frac{1}{n})(y - x)$. Rõ ràng rằng $S(f, T, K) = \{-1\}$ và $S(f_n, T_n, K_n) = \{-\frac{1}{n}\}$. Ta thấy rằng các giả thiết (ii)-(iv) của Định lý 2.2.1 là thỏa mãn. Tuy nhiên, $\{0\} = \limsup\limits_{n\to\infty} S(f_n, T_n, K_n) \not\subset S(f, T, K) = \{-1\}$. Do $\{K_n\}$ chỉ hội tụ liên tục ngoài đến K, nhưng $\{K_n\}$ không hội tụ liên tục trong đến K.

Ví dụ sau đây chứng tỏ rằng tính hội tụ liên tục ngoài của T_n trong Định lý 2.2.1 là cần thiết.

2.2.3 Ví dụ. Lấy $X = Y = Z = \mathbb{R}$, $C(x) = \mathbb{R}_+$, $A = [0, 1]$, $B = [-2, 2]$, $e(x) \equiv 1$, $K(x) = [0, 1], T(x) = [1, 1+x^2]$, $K_n(x) = [0, 1], T_n(x) = [-1 - \frac{1}{n}, 1+x^2]$, $f(x, z, y) = z(y-x)$, và $f_n(x, z, y) = (z+\frac{1}{n})(y-x)$. Rõ ràng các điều kiện (i), (iii), (iv) của Định lý 2.2.1 thỏa mãn, và $S(f, T, K) = \{0\}$, $S(f_n, T_n, K_n) = [0, 1]$, do đó $\limsup\limits_{n\to\infty} S(f_n, T_n, K_n) \not\subset S(f, T, K)$. Vì $\{T_n\}$ không hội tụ liên tục ngoài đến T.

Ví dụ sau đây chứng tỏ rằng tính hội tụ liên tục của f_n trong Định lý 2.2.1 là cần thiết.

2.2.4 Ví dụ. Lấy $X = Z = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}^2$, $A = [0, 1]$, $B = [0, 3]$, $C(x) = \mathbb{R}^2_+$, $e(x) \equiv 1$, $K(x) = [0, 1], T(x) = [0, 2^{\sin x}]$, $K_n(x) = [0, 1]$, $T_n(x) = [0, 2^{\sin x}]$, $f(x, z, y) = (1-x, \frac{1}{2}-x)(y^2z^2+1)$, và $f_n(x, z, y) = (1-x, -\frac{1}{n}+\frac{x}{n})(y^2z^2+1)$. Ta thấy rằng các giả thiết (i),(ii),(iv) của Định lý 2.2.1 thỏa mãn. Tính toán trực tiếp ta có $S(f, T, K) = [0, \frac{1}{2}]$ và $S(f_n, T_n, K_n) = \{1\}$. Do đó $\limsup\limits_{n\to\infty} S(f_n, T_n, K_n) \not\subset S(f, T, K)$. Do giả thiết (iii) không thỏa mãn.

Ví dụ sau đây minh họa cho tất cả các giả thiết trong Định lý 2.2.1 thỏa mãn.

2.2.5 Ví dụ. Lấy $X = Y = Z = \mathbb{R}$, $A = [-3, 3]$, $B = [0, 4]$, $C(x) = \mathbb{R}_+, K(x) = [-1, 3]$, $e(x) \equiv 1$, $T(x) = \{2^{\sin(x^2)+1}\}$, $K_n(x) = [-1 - \frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}], T_n(x) = \{2^{\sin(x^2)+1}\}$, $f(x, z, y) = z(y^2+1)(3-2x-x^2)$ và $f_n(x, z, y) = z(y^2 + 1)(3 - 2(x - \frac{1}{n}) - (x - \frac{1}{n})^2)$. Ta thấy rằng tất cả các giả thiết trong Định lý 2.2.1 là thỏa mãn và $S(f, T, K) = [-1, 1]$, $S(f_n, T_n, K_n) = [-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}]$. Do đó, $\limsup\limits_{n\to\infty} S(f_n, T_n, K_n) = S(f, T, K)$.

2.2.6 Nhận xét. Nếu $X \equiv Y$, $A = B$, $C_n(x) \equiv C_n$, $T_n(x) \equiv \{x\}$, $e(x) = e$, thì bài toán (WQEP) trở về bài toán (GKF) đã được nghiên cứu trong [53]. Trong trường hợp này, Định lý 2.2.1 là một mở rộng của Định lý 3.1 và Định lý 3.2 trong [53].

Tiếp theo, chúng ta giới thiệu một giả thiết căn bản và nghiên cứu tính hội tụ Painlevé-Kuratowski của tập nghiệm cho bài toán (WQEP) và $(\text{WQEP})_n$.

(H_h): Với bất kỳ một lân cận U của gốc trong X, tồn tại $\alpha \in (0, +\infty)$ và $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $h_n(x) \geq \alpha$ với mọi $n \geq n_0$ và $x \in K_n(x)\backslash(S(f_n, T_n, K_n) + U)$.

Để minh họa cho giả thiết (H_h), ta đưa ra ví dụ sau.

2.2.7 Ví dụ. Lấy $X = Y = Z = \mathbb{R}$, $A = B = [0, 2]$, $C(x) = \mathbb{R}_+$, $K_n(x) = [0, 1], T(x) = \{1\}, T_n(x) = \{1 + \frac{1}{n}\}$, $e(x) \equiv 1$ và $f_n(x, z, y) = z(y - x)$. Tính toán ta được $S(f_n, T_n, K_n) = \{0\}$. Ta có

$$\begin{aligned} h_n(x) &= \min_{z\in T_n(x)} \max_{y\in K_n(x)} \{-\xi_e(x, f_n(x, z, y))\} \\ &= \max_{y\in K_n(x)} \{(1 + \frac{1}{n})(x - y)\} = (1 + \frac{1}{n})x. \end{aligned}$$

Bây giờ, chúng ta chứng tỏ rằng (H_h) là được thỏa mãn. Thật vậy, với

bất kỳ $U = (-\varepsilon, \varepsilon) \ni 0$ và $x \in K_n(x) \setminus (S(f_n, T_n, K_n) + U) = [\varepsilon, 1]$. Lấy $n_0 := 1$ và $\alpha := \varepsilon$, khi đó $h_n(x) = (1 + \frac{1}{n})x \geq \alpha$ với mọi $n \geq n_0$.

2.2.8 Bổ đề. *Giả sử tất cả các giả thiết của Mệnh đề 2.1.8 là thỏa mãn và giả thiết thêm rằng*

(i) *K_n có giá trị compắc và $\{K_n\}$ hội tụ liên tục đến K;*

(ii) *T_n có giá trị compắc và $\{T_n\}$ hội tụ liên tục đến T;*

(iii) *$\{f_n\}$ hội tụ liên tục đến f;*

(iv) *V, C là nửa liên tục trên.*

Khi đó, với bất kỳ $\delta > 0$, $x_0 \in K(x_0)$ và dãy $\{x_n\}$ với $x_n \in K_n(x_n)$ và $x_n \to x_0$, tồn tại một dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ và $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $h_{n_k}(x_{n_k}) + \delta \geq h(x_0) \geq h_{n_k}(x_{n_k}) - \delta$ với mọi $n_k \geq n_0$.

Chứng minh. Với $n \in \mathbb{N}$, đặt

$$\varphi_n(x, z) = \max_{y \in K_n(x)} \{-\xi_e(x, f_n(x, z, y))\}, x \in K_n(x), z \in T_n(x).$$

Lập luận tương tự như trong chứng minh của Mệnh đề 2.1.8, tồn tại $z_n \in T(x_n)$ sao cho

$$h_n(x_n) = \min_{z \in T_n(x_n)} \max_{y \in K_n(x_n)} \{-\xi_e(x_n, f_n(x_n, z, y))\} = \varphi_n(x_n, z_n).$$

Bởi tính compắc của A và giả thiết (ii), nên tồn tại một dãy con $\{z_{n_k}\}$ hội tụ đến $z_0 \in T(x_0)$. Bởi tính compắc của $K(x_0)$ và tính liên tục của f, nên tồn tại $y_0 \in K(x_0)$ sao cho

$$\max_{y \in K(x_0)} \{-\xi_e(x_0, f(x_0, z_0, y))\} = -\xi_e(x_0, f(x_0, z_0, y_0)).$$

Từ điều kiện (i), ta lấy dãy $y_{n_k} \in K_{n_k}(x_{n_k})$ sao cho $y_{n_k} \to y_0$ và do đó

$$\lim_{k \to \infty} \{-\xi_e(x_{n_k}, f_{n_k}(x_{n_k}, z_{n_k}, y_{n_k}))\} = -\xi_e(x_0, f(x_0, z_0, y_0)).$$

Với bất kỳ $\delta > 0$, vì $h_{n_k}(x_{n_k}) \geq -\xi_e(x_{n_k}, f_{n_k}(x_{n_k}, z_{n_k}, y_{n_k}))$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\begin{aligned} h_{n_k}(x_{n_k}) + \delta &\geq \lim -\xi_e(x_{n_k}, f_{n_k}(x_{n_k}, z_{n_k}, y_{n_k})) \\ &= -\xi_e(x_0, f(x_0, z_0, y_0)) \geq h(x_0), \forall n_k \geq n_0. \end{aligned}$$

Mặt khác, từ Mệnh đề 2.1.8 ta có

$$\varphi(x, z) = \max_{y \in K(x)} \{-\xi_e(x, f(x, z, y))\}, x \in K(x), z \in T(x).$$

Vì ξ_e là liên tục, K là liên tục với giá trị compắc và Bổ đề 1.1.10, ta có φ là liên tục đối với (x, z). Từ tính compắc của $T(x_0)$, tồn tại $z_0 \in T(x_0)$ sao cho

$$\begin{aligned} \varphi(x_0) &= \min_{z \in T(x_0)} \max_{y \in K(x_0)} \{-\xi_e(x_0, f(x_0, z, y))\} \\ &= \varphi(x_0, z_0) \\ &= \max_{y \in K(x_0)} \{-\xi_e(x_0, f(x_0, z_0, y))\}. \end{aligned}$$

Ta suy ra từ giả thiết (ii) rằng T_n có giá trị compắc, $\{T_n\}$ hội tụ liên tục trong đến T, tồn tại $z_{n_k} \in T_{n_k}(x_{n_k})$ sao cho $z_{n_k} \to z_0$. Từ tính compắc của K_n, tồn tại $y_{n_k} \in K_{n_k}(x_{n_k})$ sao cho

$$\begin{aligned} &\max_{y \in K_{n_k}(x_{n_k})} \{-\xi_e(x_{n_k}, f_{n_k}(x_{n_k}, z_{n_k}, y))\} \\ &\qquad = -\xi_e(x_{n_k}, f_{n_k}(x_{n_k}, z_{n_k}, y_{n_k})). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Từ tính compắc của $K_{n_k}(x_{n_k})$, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng $y_{n_k} \to y_0$. Do $\{K_{n_k}\}$ hội tụ liên tục ngoài đến K, ta có $y_0 \in K(x_0)$. Từ f_{n_k} hội tụ liên tục đến f với $(x_{n_k}, z_{n_k}, y_{n_k}) \to (x_0, z_0, y_0)$, $f_{n_k}(x_{n_k}, z_{n_k}, y_{n_k}) \to f(x_0, z_0, y_0)$. Vì ξ_e là liên tục, ta lấy giới hạn của $-\xi_e(x_{n_k}, f_{n_k}(x_{n_k}, z_{n_k}, y_{n_k}))$ trong (2.5) và nhận được

$$\begin{aligned} \lim\{-\xi_e(x_{n_k}, f_{n_k}(x_{n_k}, z_{n_k}, y_{n_k}))\} &= -\xi_e(x_0, f(x_0, z_0, y_0)) \\ &\leq \max_{y \in K(x_0)} \{-\xi_e(x_0, f(x_0, z_0, y))\} \\ &= \varphi(x_0, z_0) = h(x_0). \end{aligned}$$

Vì vậy, với mọi $\delta > 0$, tồn tại $n_0 > 0$ sao cho

$$-\xi_e(x_{n_k}, f_{n_k}(x_{n_k}, z_{n_k}, y_{n_k})) - \delta \leq h(x_0), \forall n_k \geq n_0.$$

Từ (2.5), ta có

$$\begin{aligned} h_{n_k}(x_{n_k}) - \delta &= \min_{z_{n_k} \in T_{n_k}(x_{n_k})} \max_{y \in K_{n_k}(x_{n_k})} \{-\xi_e(x_{n_k}, f_{n_k}(x_{n_k}, z_{n_k}, y))\} - \delta \\ &\leq \max_{y \in K_{n_k}(x_{n_k})} \{-\xi_e(x_{n_k}, f_{n_k}(x_{n_k}, z_{n_k}, y))\} - \delta \\ &= -\xi_e(x_{n_k}, f_{n_k}(x_{n_k}, z_{n_k}, y_{n_k})) - \delta \\ &\leq h(x_0). \end{aligned}$$

Do đó, ta có điều phải chứng minh. □

2.2.9 Ví dụ. Lấy $X = Y = Z = \mathbb{R}, C(x) = \mathbb{R}_+$, $e(x) \equiv 1$, $A = B = [0, 2]$, $K(x) = K_n(x) = [0, 1]$, $T(x) = \{1\}, T_n(x) = \{1 + \frac{1}{n}\}$, $f(x, z, y) = f_n(x, y, z) = z(y - x)$. Khi đó tất cả các giả thiết của Bổ đề 2.2.8 là được thỏa mãn. Ta thấy rằng $h(x) = x$ và $h_n(x) = (1 + \frac{1}{n})x$. Vì vậy, Bổ đề 2.2.8 thỏa mãn.

2.2.10 Bổ đề. *Giả sử rằng tất cả các giả thiết trong Mệnh đề 2.1.9 được thỏa mãn. Khi đó,* $S(f, T, K) \subset \liminf_{n\to\infty} S(f_n, T_n, K_n)$ *khi và chỉ khi với bất kỳ lân cận mở* U *của gốc trong* X*, tồn tại* $n_0 \in \mathbb{N}$ *sao cho*

$$S(f, T, K) \subset S(f_n, T_n, K_n) + U \text{ với mọi } n \geq n_0.$$

Chứng minh. Giả sử $S(f, T, K) \subset \liminf_{n\to\infty} S(f_n, T_n, K_n)$, nhưng tồn tại một lân cận mở U của gốc trong X sao cho với mọi $n_0 \in \mathbb{N}$, tồn tại $n \geq n_0$ thỏa mãn $S(f, T, K) \not\subset (S(f_n, T_n, K_n) + U)$. Khi đó, tồn tại một dãy $\{x_n\}$, $x_n \in S(f, T, K)$, nhưng $x_n \notin (S(f_n, T_n, K_n) + U)$ với mọi n. Từ Mệnh đề 2.1.9, $S(f, T, K)$ là compắc, do đó ta có thể giả sử $\{x_n\}$ hội tụ đến $x \in S(f, T, K)$. Từ $S(f, T, K) \subset \liminf_{n\to\infty} S(f_n, T_n, K_n)$, tồn tại một dãy $\{z_n\}$, $z_n \in S(f_n, T_n, K_n)$ với $z_n \to x$. Khi đó, $x_n - z_n \to 0 \in U$,

và đó đó ta lấy n sao cho $x_n - z_n \in U$, điều này là không thể vì $x_n \notin S(f_n, T_n, K_n) + U$ với mọi n.

Ngược lại, giả sử rằng với bất kỳ lân cận mở U của gốc trong X, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $S(f, T, K) \subset (S(f_n, T_n, K_n) + U)$ với mọi $n \geq n_0$. Do đó, với bất kỳ $x \in S(f, T, K)$, tồn tại $x_n \in S(f_n, T_n, K_n)$ sao cho $x_n - x \in U$ với mọi $n \geq n_0$, nghĩa là, $x_n \to x$. Vì vậy,

$$S(f, T, K) \subset \liminf_{n\to\infty} S(f_n, T_n, K_n).$$

□

2.2.11 Bổ đề. *Giả sử tất cả các giả thiết của Mệnh đề 2.1.8 thỏa mãn. Khi đó, (H_h) xác định khi và chỉ khi với bất kỳ lân cận mở U của gốc trong X,*

$$\liminf_{x\in K_n(x)\setminus(S(f_n,T_n,K_n)+U)} h_n(x) > 0.$$

Chứng minh. Nếu (H_h) thỏa mãn, khi đó với bất kỳ lân cận mở U của gốc trong X, tồn tại $\alpha > 0$ và $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $h_n(x) \geq \alpha$ với mọi $n \geq n_0$ và $x \in K_n(x) \setminus (S(f_n, T_n, K_n) + U)$. Điều này suy ra rằng

$$\liminf_{x\in K_n(x)\setminus(S(f_n,T_n,K_n)+U)} h_n(x) \geq \alpha > 0.$$

Ngược lại, với bất kỳ lân cận mở U của gốc trong X,

$$\tau := \liminf_{x\in K_n(x)\setminus(S(f_n,T_n,K_n)+U)} h_n(x) > \ 0,$$

và do đó

$$\liminf_{x\in K_n(x)\setminus(S(f_n,T_n,K_n)+N)} h_n(x) \geq \alpha > 0,$$

trong đó $\alpha := \frac{1}{2}\tau$. Vì vậy, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $h_n(x) \geq \alpha > 0$ với bất kỳ $x \in K_n(x) \setminus (S(f_n, T_n, K_n) + U)$, nghĩa là, (H_h) thỏa mãn. □

2.2.12 Định lý. *Giả sử tất cả các giả thiết của Mệnh đề 2.1.9 thỏa mãn và bổ sung thêm các điều kiện sau*

(i) $\{K_n\}$ *hội tụ liên tục đến* K;

(ii) $\{T_n\}$ *hội tụ liên tục đến* T;

(iii) $\{f_n\}$ *hội tụ liên tục đến* f;

(iv) V, C *là nửa liên tục trên.*

Khi đó, $S(f,T,K) \subset \liminf_{n\to\infty} S(f_n,T_n,K_n)$ *khi và chỉ khi* (H_h) *thỏa mãn.*

Chứng minh. Giả sử ngược lại rằng (H_h) thỏa mãn, nhưng $S(f,T,K) \not\subset \liminf_{n\to\infty} S(f_n,T_n,K_n)$. Khi đó, từ Bổ đề 2.2.10, tồn tại một lân cận U của gốc trong X và một dãy $\{x_n\}$ thỏa mãn $x_n \in S(f,T,K) \setminus (S(f_n,T_n,K_n)+U)$ với mọi n. Từ tính compắc của $S(f,T,K)$, ta giả sử rằng x_n hội tụ đến $x \in S(f,T,K)$. Vì U là một lân cận của gốc trong X, tồn tại một lân cận cân mở B của gốc trong X, nghĩa là, $\lambda B \subset B$ với mọi $\lambda \in [-1,1]$ sao cho $B+B+B \subset U$. Do đó, với bất kỳ $\varepsilon > 0, (x+\varepsilon B) \cap K(x) \neq \emptyset$. Từ giả thiết (i), tồn tại một dãy $\{z_n\}$, $z_n \in K_n(x_n)$ hội tụ đến x. Vì vậy, tồn tại n_0 sao cho $z_n \in (x+\varepsilon B) \cap K_n(x_n)$ với mọi $n \geq n_0$.

Chúng ta cần chứng tỏ rằng $z_n \notin (S(f_n,T_n,K_n)+B)$. Thật vậy, giả sử ngược lại rằng tồn tại $t_n \in S(f_n,T_n,K_n)$ sao cho $z_n - t_n \in B$. Không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng $x_n - x \in B$ với n đủ lớn. Do đó,

$$x_n - t_n = (x_n - x) + (x - z_n) + (z_n - t_n) \in B+B+B \subset U.$$

Điều này suy ra rằng $x_n \in (S(f_n,T_n,K_n) + U)$ với n đủ lớn. Điều này là không thể vì $x_n \notin S(f_n,T_n,K_n) + U$ với mọi n. Từ (H_h), tồn tại $\alpha > 0$ sao cho $h_n(z_n) \geq \alpha$. Từ Bổ đề 2.2.8, ta có thể giả sử với n đủ lớn và $0 < \delta < \alpha$, $h(x) \geq h_n(z_n) - \delta \geq \alpha - \delta > 0$. Điều này mâu thuẫn với $x \in S(f,T,K)$ (do Mệnh đề 2.1.7).

Ngược lại, giả sử rằng $S(f,T,K) \subset \liminf_{n\to\infty} S(f_n,T_n,K_n)$, nhưng (H_h) không thỏa mãn. Từ Bổ đề 2.2.11, tồn tại một lân cận U của gốc trong X thỏa mãn

$$\liminf_{x\in K_n(x)\setminus(S(f_n,T_n,K_n)+U)} h_n(x) = 0.$$

Kết hợp tính compắc của $K_n(x) \setminus (S(f_n,T_n,K_n)+U)$, tính liên tục của h_n và Bổ đề 2.1.8, tồn tại $x_{n_k} \in K_{n_k}(x_{n_k}) \setminus (S(f_{n_k},T_{n_k},K_{n_k})+U)$ thỏa mãn $\lim_{k\to\infty} h_{n_k}(x_{n_k}) = 0$. Từ tính compắc của A và giả thiết (i), giả sử rằng x_{n_k} hội tụ đến $x_0 \in K(x_0)$. Áp dụng Bổ đề 2.2.8, ta có $h(x_0) = 0$. Thật vậy, nếu $h(x_0) = \rho > 0$, ta lấy $\delta := \frac{\rho}{4}$. Vì $h_{n_k}(x_{n_k})$ hội tụ đến 0, nên ta có một $n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho $h_{n_k}(x_{n_k}) \le \frac{\rho}{4}$ với mọi $n_k \ge n_1$. Từ Bổ đề 2.2.8, nên tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $h_{n_k}(x_{n_k}) + \delta \ge h(x_0)$ với mọi $n_k \ge n_0$. Đặt $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$, khi đó $\frac{\rho}{4} + \frac{\rho}{4} = \frac{\rho}{2} \ge h_{n_k}(x_{n_k}) + \delta \ge h(x_0) = \rho > 0$ với mọi $n_k \ge n_2$, điều này không thể. Vì vậy, từ Mệnh đề 2.1.7, ta có $x_0 \in S(f,T,K)$. Vì $S(f,T,K) \subset \liminf_{n\to\infty} S(f_n,T_n,K_n)$, tồn tại $z_{n_k} \in S(f_{n_k},T_{n_k},K_{n_k})$ hội tụ đến x_0. Vì $x_{n_k} \in K_{n_k}(x_{n_k}) \setminus (S(f_{n_k},T_{n_k},K_{n_k})+U)$, $z_{n_k} - x_{n_k} \notin U$ với mọi n_k, điều này cũng không thể vì cả hai dãy $\{z_{n_k}\}$ và $\{x_{n_k}\}$ hội tụ đến x_0. □

Kết hợp Định lý 2.2.1 và Định lý 2.2.12, ta nhận được điều kiện cần và đủ cho tính hội tụ Painlevé-Kuratowski của tập nghiệm cho (WQEP) và $(\text{WQEP})_n$.

2.2.13 Định lý. *Giả sử tất cả các giả thiết của Định lý 2.2.12 thỏa mãn. Khi đó, $S(f_n,T_n,K_n)$ hội tụ đến $S(f,T,K)$ theo nghĩa Painlevé - Kuratowski khi và chỉ khi (H_h) thỏa mãn.*

2.3 Áp dụng cho bất đẳng thức tựa biến phân

Vì bài toán tựa cân bằng chứa nhiều bài toán liên quan đến tối ưu, do đó ta có thể suy ra trực tiếp từ kết quả chính cho các trường hợp đặc biệt. Trong mục này chúng ta chỉ xét trường hợp đặc biệt cho bài toán bất đẳng thức biến phân như là một ví dụ.

Cho X, Z là các không gian Banach, $Y = L(X; Z)$, A, B, C, K, T, K_n, T_n như ở trong Mục 2.2. Khi đó, ta xét *bất đẳng thức tựa biến phân* sau.

(QVI) Tìm $\bar{x} \in K(\bar{x})$ sao cho tồn tại $z \in T(\bar{x})$ thỏa mãn

$$\langle z, y - \bar{x} \rangle \in Z \setminus -\mathrm{int}C(\bar{x}), \forall y \in K(\bar{x}).$$

$(\mathrm{QVI})_n$ Tìm $\bar{x} \in K_n(\bar{x})$ sao cho tồn tại $z \in T_n(\bar{x})$ thỏa mãn

$$\langle z, y - \bar{x} \rangle \in Z \setminus -\mathrm{int}C(\bar{x}), \forall y \in K_n(\bar{x}).$$

Chúng ta ký hiệu $S(T, K)$ và $S(T_n, K_n)$ lần lượt là các tập nghiệm của (QVI) và $(\mathrm{QVI})_n$ và giả sử rằng các tập nghiệm này là khác rỗng. Đặt $f(x, z, y) = f_n(x, y, z) = \langle z, y - x \rangle$, khi đó bài toán (QVI) trở thành một trường hợp đặc biệt của (WQEP).

Hệ quả sau đây được suy ra từ Định lý 2.2.1.

2.3.1 Hệ quả. *Với bài toán* (QVI) *và* $(\mathrm{QVI})_n$*, ta giả sử các điều kiện sau đây thỏa mãn*

(i) $\{K_n\}$ *hội tụ liên tục đến* K;

(ii) $\{T_n\}$ *hội tụ liên tục ngoài đến* T;

(iii) W *là đóng.*

Khi đó, $\limsup\limits_{n\to\infty} S(T_n, K_n) \subset S(T, K)$.

Chứng minh. Đặt $f(x,z,y) = f_n(x,y,z) = \langle z, y-x\rangle$, khi đó bài toán (QVI) trở thành một trường hợp đặc biệt của (WQEP). Rõ ràng, tất cả các giả thiết của Định lý 2.2.1 là thỏa mãn. Do đó, ứng dụng định lý này ta kết luận cho Hệ quả 2.3.1. □

Ứng dụng Định lý 2.2.12 ta cũng nhận được kết quả sau.

2.3.2 Hệ quả. *Với $n \in \mathbb{N}$ và* (QVI) *và* $(\mathrm{QVI})_n$*, ta giả sử các điều kiện sau đây thỏa mãn*

(i) *K_n là hội tụ với giá trị compắc và $\{K_n\}$ hội tụ liên tục đến K;*

(ii) *T_n là nửa liên tục trên với giá trị compắc và $\{T_n\}$ hội tụ liên tục đến T;*

(iii) *V, C là nửa liên tục trên;*

(iv) *W là đóng.*

Khi đó, $S(T,K) \subset \liminf_{n\to\infty} S(T_n,K_n)$ khi và chỉ khi (H_h) thỏa mãn.

2.3.3 Nhận xét. Nếu $K_n(x) \equiv K_n$, $K(x) \equiv K$ và $C(x) \equiv C$, thì bài toán (QVI) trở thành bài toán (SWVVI) đã được nghiên cứu bởi Fang, Li và Teo ([34]). Trong trường hợp đặc biệt này, Hệ quả 2.3.1 là mở rộng Định lý 3.1 trong [34] và Hệ quả 2.3.2 là cải thiện Định lý 4.5 trong [34], vì Hệ quả 2.3.2 thiết lập các điều kiện cần và đủ cho sự hội tụ theo nghĩa Painlevé-Kuratowski, trong khi Định lý 4.5 trong [34] chỉ là điều kiện đủ.

2.3.4 Hệ quả. *Giả sử tất cả các giả thiết của Mệnh đề 2.3.2 thỏa mãn. Khi đó, $S(T_n,K_n)$ hội tụ đến $S(T,K)$ theo nghĩa Painlevé - Kuratowski khi và chỉ khi (H_h) thỏa mãn.*

2.4 Kết luận Chương 2

Trong chương này, chúng tôi thu được các kết quả sau:

- Thiết lập được các dãy hàm đánh giá cho các bài toán tựa cân bằng (WQEP) và $(\text{WQEP})_n$ (Mệnh đề 2.1.7). Sau đó nghiên cứu tính liên tục của chúng (Mệnh đề 2.1.8).

- Thiết lập tính hội tụ trên theo nghĩa Painlevé - Kuratowski của tập nghiệm của bài toán (WQEP) và $(\text{WQEP})_n$ (Định lý 2.2.1). Trên cơ sở dãy hàm đánh giá, giả thiết căn bản (H_h) là được nghiên cứu. Sau đó, chúng tôi chứng tỏ rằng các giả thiết này là điều kiện cần và đủ cho sự hội tụ dưới và sự hội tụ theo nghĩa Painlevé - Kuratowski của tập nghiệm của bài toán (WQEP) và $(\text{WQEP})_n$ (Định lý 2.2.12 và Định lý 2.2.13).

- Từ các kết quả chính trong Mục 2.1 và Mục 2.2, chúng tôi áp dụng cho dãy bài toán bất đẳng thức tựa biến phân loại (QVI) và $(\text{QVI})_n$. Các kết quả thu được là Hệ quả 2.3.1, Hệ quả 2.3.2 và Hệ quả 2.3.4.

Các kết quả trong chương này được trích ra từ bài báo:

L. Q. Anh, T. Bantaojai, N. V. Hung, V. M. Tam and R. Wangkeeree (2018), Painlevé-Kuratowski convergences of the solution sets for generalized vector quasiequilibrium problems, *Computational and Applied Mathematics*, **37**, 3832–3845.

CHƯƠNG 3

TÍNH ỔN ĐỊNH VÀ ĐẶT CHỈNH CHO BÀI TOÁN CÂN BẰNG HAI MỨC

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu tính ổn định nghiệm và tính đặt chỉnh Levitin-Polyak cho các bài toán cân bằng mạnh hai mức. Đầu tiên, chúng tôi giới thiệu bài toán cân bằng mạnh hai mức và thiết lập tính nửa liên tục và liên tục của ánh xạ nghiệm cho bài toán này. Sau đó, chúng tôi ứng dụng các kết quả này cho bất đẳng thức biến phân với ràng buộc cân bằng và bài toán tối ưu với ràng buộc cân bằng. Tiếp theo, chúng tôi giới thiệu bài toán cân bằng mạnh hai mức với nón di động và nghiên cứu các khái niệm đặt chỉnh Levitin-Polyak và đặt chỉnh Levitin-Polyak tổng quát cho bài toán này. Chúng tôi nghiên cứu mối quan hệ của tính đặt chỉnh với tính nửa liên tục trên của nghiệm xấp xỉ và sự tồn tại nghiệm và đặc trưng mêtric các đặt chỉnh Levitin-Polyak và đặt chỉnh Levitin-Polyak tổng quát cho bài toán này. Từ các kết quả chính này, chúng tôi áp dụng cho bài toán mạng giao thông với ràng buộc cân bằng.

3.1 Tính ổn định của ánh xạ nghiệm cho bài toán cân bằng hai mức

Cho X, Y, Z là các không gian véctơ tôpô Hausdorff. A và Λ lần lượt là các tập con lồi khác rỗng của X và Y, $C \subset Z$ là một nón lồi đóng có đỉnh với phần trong khác rỗng. Giả sử K_1 và $K_2 : A \times \Lambda \rightrightarrows A$ là hai hàm đa trị, $f : A \times A \times \Lambda \to Z$ là hàm véctơ. Với mỗi $\lambda \in \Lambda$, chúng ta xét *bài toán tựa cân bằng véctơ mạnh phụ thuộc tham số* sau đây:

(SQEP) Tìm $\bar{x} \in K_1(\bar{x}, \lambda)$ sao cho

$$f(\bar{x}, y, \lambda) \in C, \forall y \in K_2(\bar{x}, \lambda).$$

Cho $S : \Lambda \rightrightarrows A$ là các ánh xạ đa trị sao cho với mỗi $\lambda \in \Lambda$, $S(\lambda)$ là tập nghiệm của (SQEP), nghĩa là

$$S(\lambda) := \{\bar{x} \in K_1(\bar{x}, \lambda) \mid f(\bar{x}, y, \lambda) \in C, \forall y \in K_2(\bar{x}, \lambda)\}.$$

Giả sử $E : \Lambda \rightrightarrows A$ xác định bởi $E(\lambda) := \{x \in A \mid x \in K_1(x, \lambda)\} \neq \emptyset$ với mỗi $\lambda \in \Lambda$. Do việc đưa ra các điều kiện để cho bài toán cân bằng tồn tại nghiệm đã được nghiên cứu bởi nhiều tác giả ([14], [26], [31], [37], [43], [48]) nên ở đây chúng ta giả thiết rằng nghiệm của bài toán tồn tại trong lân cận của $\lambda_0 \in \Lambda$.

Cho W là không gian véctơ tôpô Hausdorff và Γ là một tập con khác rỗng của W. Lấy $B = A \times \Lambda$ và $h : B \times B \times \Gamma \to Z$ là hàm véctơ, $C' \subset Z$ là nón lồi đóng có đỉnh. Chúng ta xét bài toán *cân bằng véctơ hai mức* sau:

(BEP) Tìm $\bar{x}^* \in \text{graph}S^{-1}$ sao cho

$$h(\bar{x}^*, y^*, \gamma) \in C', \forall y^* \in \text{graph}S^{-1},$$

trong đó $\text{graph}S^{-1} = \{(x, \lambda) \mid x \in S(\lambda)\}$ là đồ thị của S^{-1}.

Cho $\Phi : \Gamma \rightrightarrows B$ là các ánh xạ đa trị sao cho với mỗi $\gamma \in \Gamma$, $\Phi(\gamma)$ là tập nghiệm của (BEP), nghĩa là

$$\Phi(\gamma) = \{\bar{x}^* \in \text{graph}S^{-1} \mid h(\bar{x}^*, y^*, \gamma) \in C',\ \forall y^* \in \text{graph}S^{-1}\},$$

và chúng ta giả sử rằng $\Phi(\gamma) \neq \emptyset$ với mỗi γ trong lân cận của $\gamma_0 \in \Gamma$.

Với một hàm đa trị $G : X \rightrightarrows Z$ giữa hai không gian véctơ tôpô Hausdorff, G được gọi là *lồi (lõm)* trên một tập con lồi $A \subset X$ nếu với mọi $x_1, x_2 \in A$ và $t \in [0, 1]$,

$$tG(x_1) + (1-t)G(x_2) \subset G(tx_1 + (1-t)x_2)$$

$$(G(tx_1 + (1-t)x_2) \subset tG(x_1) + (1-t)G(x_2), \text{tương ứng}).$$

Cho $\varphi : X \to Z$ là hàm véctơ và $C \subset Z$ là nón lồi đóng có đỉnh và phần trong khác rỗng. Với $\theta \in Z$, ta sử dụng các khái niệm tập mức của φ đối với C với các nón khác nhau (tùy theo các ngữ cảnh, để không có sự nhầm lẫn).

$$L_{\geq_C \theta}\varphi := \{x \in X \mid \varphi(x) \in \theta + C\},$$
$$L_{\not>_C \theta}\varphi := \{x \in X \mid \varphi(x) \notin \theta + \text{int}C\},$$

tương tự cho các tập mức $L_{\leq_C \theta}\varphi, L_{\not<_C \theta}\varphi, L_{\not\geq_C \theta}\varphi, L_{>_C \theta}\varphi$,...

Bây giờ, chúng ta nghiên cứu tính nửa liên tục trên, tính đóng của ánh xạ nghiệm cho bài toán (BEP).

3.1.1 Định lý. *Với bài toán* (BEP)*, ta giả sử rằng* Λ *compắc và các điều kiện sau đây thỏa mãn*

(i) *E là nửa liên tục trên với giá trị compắc và K_2 là nửa liên tục dưới;*

(ii) *$L_{\geq_C 0}f$ là đóng trong $A \times A \times \Lambda$;*

(iii) *$L_{\geq_{C'} 0}h$ là đóng trong $B \times B \times \{\gamma_0\}$.*

Khi đó, Φ là nửa liên tục trên và đóng tại γ_0.

Chứng minh. Giả sử ngược lại rằng Φ là không nửa liên tục trên tại γ_0. Khi đó, tồn tại một tập mở V chứa $\Phi(\gamma_0)$ và một lưới $\{\gamma_\alpha\} \subset \Gamma$ hội tụ đến γ_0 sao cho tồn tại $x_\alpha^* = (x_\alpha, \lambda_\alpha) \in \Phi(\gamma_\alpha) \setminus V$ với mọi α. Từ tính compắc của Λ, ta có thể giả sử rằng $\lambda_\alpha \to \lambda_0$ với $\lambda_0 \in \Lambda$. Vì $x_\alpha \in E(\lambda_\alpha)$ và E là nửa liên tục trên với giá trị compắc, ta giả sử rằng $x_\alpha \to x_0 \in E(\lambda_0)$. Bây giờ ta chứng tỏ $x_0^* = (x_0, \lambda_0) \in \text{graph}S^{-1}$, nghĩa là, $x_0 \in S(\lambda_0)$. Nếu $x_0 \notin S(\lambda_0)$ khi đó tồn tại $y_0 \in K_2(x_0, \lambda_0)$ sao cho

$$f(x_0, y_0, \lambda_0) \notin C.$$

Vì K_2 là nửa liên tục dưới tại (x_0, λ_0), tồn tại $y_\alpha \in K_2(x_\alpha, \lambda_\alpha)$ sao cho $y_\alpha \to y_0$. Vì $x_\alpha \in S(\lambda_\alpha)$ nên ta có

$$f(x_\alpha, y_\alpha, \lambda_\alpha) \in C.$$

Áp dụng điều kiện (ii), ta suy ra rằng $f(x_0, y_0, \lambda_0) \in C$, điều này không thể. Do đó $x_0^* \in \text{graph}S^{-1}$.

Tiếp theo, chúng ta chứng minh $x_0^* \in \Phi(\gamma_0)$. Nếu $x_0^* \notin \Phi(\gamma_0)$, thì tồn tại $y_0^* \in \text{graph}S^{-1}$ sao cho

$$h(x_0^*, y_0^*, \gamma_0) \notin C'.$$

Vì $x_\alpha^* \in \Phi(\lambda_\alpha)$, ta có

$$h(x_\alpha^*, y_0^*, \gamma_\alpha) \in C'.$$

Từ $(x_\alpha^*, y_0^*, \gamma_\alpha) \to (x_0^*, y_0^*, \gamma_0)$ và giả thiết (iii), ta suy ra rằng

$$h(x_0^*, y_0^*, \gamma_0) \in C',$$

điều này không thể. Vì vậy, $x_0^* \in \Phi(\gamma_0)$, điều này lại mâu thuẫn vì $x_\alpha^* \notin V$ với mọi α. Do đó, Φ là nửa liên tục trên tại γ_0.

Cuối cùng, ta cần chứng tỏ Φ là đóng tại γ_0. Giả sử Φ không đóng tại γ_0, khi đó tồn tại một lưới $\{x^*_\alpha\} \subset \Phi(\gamma_\alpha)$ sao cho $x^*_\alpha = (x_\alpha, \lambda_\alpha) \to x^*_0 = (x_0, \lambda_0)$, nhưng $x^*_0 \notin \Phi(\gamma_0)$. Lý luận tương tự như trên chúng ta cũng nhận được một sự mâu thuẫn. Do đó, Φ là đóng tại γ_0. $\square$

Ví dụ sau đây chứng tỏ rằng giả thiết (i) trong Định lý 3.1.1 là cần thiết.

3.1.2 Ví dụ. Lấy $X = Y = Z, W = \mathbb{R}, A = [-2, 2], \Lambda = \Gamma = [0, 1], C = C' = \mathbb{R}_+$, $K_1(x, \lambda) = K_2(x, \lambda) =]-2\lambda, 1]$, $f(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda^2$ và $h((x, \lambda_1), (y, \lambda_2), \gamma) = (y - x + \gamma)(y - 2x + \gamma)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 1)$. Khi đó, các giả thiết (ii) và (iii) được thỏa mãn. Từ $E(\lambda) = (-2\lambda, 1]$, E là không nửa liên tục trên với giá trị compắc, vì vậy giả thiết (i) là không thỏa mãn. Tính toán trực tiếp ta có $S(\lambda) = (-2\lambda, 1]$ và

$$\text{graph}S^{-1} = \{(x, \lambda) \mid x \in S(\lambda), \lambda \in [0, 1]\} = (-2\lambda, 1] \times [0, 1].$$

Do đó,

$$\Phi(0) = \{(x, \lambda_1) \in \text{graph}S^{-1} \mid (y - x)(y - 2x)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 1) \geq 0, \\ \forall (y, \lambda_2) \in \text{graph}S^{-1})\} = \{1\} \times [0, 1].$$

Lấy $V = (\frac{4}{5}, \frac{6}{5}) \times (-\frac{1}{5}, \frac{6}{5})$ là tập mở chứa $\Phi(0)$ và $\gamma_n = \frac{1}{n} \to 0$. Ta thấy rằng $x^*_n = (-1 + \frac{1}{n}, 1) \in \Phi(\gamma_n)$, nhưng $x^*_n \notin V$ với mọi n, do đó Φ là không nửa liên tục trên tại 0. Vì $x^*_n \to x^*_0 = (-1, 1) \notin \Phi(0)$, Φ là không đóng.

Ví dụ sau đây chứng tỏ rằng giả thiết (ii) trong Định lý 3.1.1 là cần thiết.

3.1.3 Ví dụ. Lấy $X, Y, Z, W, A, \Lambda, \Gamma, C, C'$ như trong Ví dụ 3.1.2 và

$$K_1(x, \lambda) = K_2(x, \lambda) = [-1, 1]$$

$$h((x, \lambda_1), (y, \lambda_2), \gamma) = (y - x + \gamma)(\lambda_2 - \lambda_1)$$

$$f(x, y, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{nếu } \lambda = 0, x \neq 0, \\ x - y, & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

Ta thấy rằng các giả thiết của Định lý 3.1.1 thỏa mãn ngoại trừ giả thiết (ii). Thật vậy, lấy $x_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{n}$, $y_n = -1 + \frac{1}{n}$ và $\lambda_n = \frac{1}{n}$, khi đó $(x_n, y_n, \lambda_n) \to (-\frac{1}{2}, -1, 0)$, $f(x_n, y_n, \lambda_n) = \frac{1}{2} \geq 0$, tuy nhiên $f(-\frac{1}{2}, -1, 0) = -2 < 0$. Tính toán trực tiếp ta nhận được $S(0) = (0, 1]$, $S(\lambda) = \{1\}$ với mọi $\lambda \in (0, 1]$, do đó

$$\text{graph}S^{-1} = \{(x, \lambda) \mid x \in S(\lambda), \lambda \in [0, 1]\} = (0, 1] \times \{0\} \cup \{1\} \times (0, 1].$$

Ta cũng thấy rằng

$$\Phi(0) = \{x^* = (x, \lambda_1) \in \text{graph}S^{-1} \mid h((x, \lambda_1), (y, \lambda_2), 0) \geq 0, \\ \forall (y, \lambda_2) \in \text{graph}S^{-1}\} = \{(1, 1)\}.$$

Lấy $V = (\frac{3}{4}, \frac{5}{4}) \times (\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$ là một tập mở chứa $\Phi(0)$ và $\gamma_n = \frac{1}{n} \to 0$. Ta có thể kiểm tra rằng $x_n^* = (\frac{1}{2n}, 0) \in \Phi(0) \setminus V$ với mọi n và $x_n^* \to (0, 0) \notin \Phi(0)$. Do đó, Φ là không nửa liên tục trên cũng không đóng tại 0.

Ví dụ sau đây chứng tỏ rằng giả thiết (iii) trong Định lý 3.1.1 là cần thiết.

3.1.4 Ví dụ. Lấy $X, Y, Z, W, A, \Gamma, \Lambda, C, C', f$ như trong Ví dụ 3.1.2, và

$$K_1(x, \lambda) = K_2(x, \lambda) = [0, 1],$$
$$h((x, \lambda_1), (y, \lambda_2), \gamma) = \begin{cases} (x - y)(\lambda_1 - \lambda_2), & \text{nếu} \quad \gamma = 0, \\ xy(x - y)(\lambda_1 - \lambda_2), & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

Ta thấy rằng các giả thiết (i) và (ii) là thỏa mãn. Tính toán trực tiếp ta được tập nghiệm của (SQEP) là $S(\lambda) = [0, 1]$. Vì vậy,

$$\text{graph}S^{-1} = \{(x, \lambda) \mid x \in S(\lambda), \lambda \in [0, 1]\} = [0, 1] \times [0, 1].$$

Ta cũng có

$$\Phi(0) = \{(1, 1), (0, 0)\}; \quad \Phi(\gamma) = \{(0, \lambda) \mid \lambda \in [0, 1]\} \cup \{(1, 1)\}, \forall \gamma \in]0, 1].$$

Ta thấy Φ là không nửa liên tục trên và không đóng tại $\gamma_0 = 0$, vì điều kiện (iii) không xác định. Thật vậy, lấy $x_n^* = (0, 1 - \frac{1}{n})$, $y_n^* = (1, \frac{1}{n})$ và $\gamma_n = \frac{1}{n}$. Khi đó, $x_n^* \to x_0^* = (0, 1)$, $y_n^* \to y_0^* = (1, 0)$, $\gamma_n \to \gamma_0 = 0$ và $h(x_n^*, y_n^*, \gamma_n) \geq 0$, tuy nhiên $h(x_0^*, y_0^*, \gamma_0) = -1 < 0$.

3.1.5 Định lý. *Giả sử các giả thiết (ii) và (iii) trong Định lý 3.1.1 thỏa mãn và thay thế giả thiết* (i) *bởi*

(i') *A là compắc, K_1 là đóng, và K_2 là nửa liên tục trên.*

Khi đó, Φ là nửa liên tục trên và đóng tại γ_0.

Chứng minh. Giả sử rằng Φ là không nửa liên tục trong γ_0, khi đó tồn tại một tập mở V chứa $\Phi(\gamma_0)$ và một lưới $\{\gamma_\alpha\} \subset \Gamma$ hội tụ đến γ_0 sao cho tồn tại $x_\alpha^* = (x_\alpha, \lambda_\alpha) \in \Phi(\gamma_\alpha) \setminus V$ với mọi α. Từ tính compắc của Λ, ta có thể giả sử rằng $\lambda_\alpha \to \lambda_0 \in \Lambda$. Vì A là compắc, ta cũng có $x_\alpha \to x_0 \in A$ (có thể lấy một lưới con nếu cần thiết). Vì $(x_\alpha, \lambda_\alpha) \to (x_0, \lambda_0)$ và K_1 là đóng, ta suy ra $x_0 \in K_1(x_0, \lambda_0)$. Kết hợp tính nửa liên tục dưới của K_2 và giả thiết (ii), ta nhận được $x_0^* = (x_0, \lambda_0) \in \text{graph} S^{-1}$. Áp dụng giả thiết (iii), ta suy ra $x_0^* \in \Phi(\gamma_0)$. Lý luận tương tự như chứng minh của Định lý 3.1.1. Ta có điều phải chứng minh. □

Ví dụ sau đây chứng tỏ giả thiết (i') là cần thiết.

3.1.6 Ví dụ. Lấy $X, Y, Z, W, A, \Lambda, \Gamma, C, C', f$ như trog Ví dụ 3.1.2 và

$$h((x, \lambda_1), (y, \lambda_2), \gamma) = (y - x + \gamma)(\lambda_2 - \lambda_1);$$
$$K_1(x, \lambda) = K_2(x, \lambda) = \begin{cases} (-1, 1], & \text{nếu } \gamma = 0, \\ (0, 1], & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

Khi đó, các giả thiết (ii) và (iii) là thỏa mãn, nhưng (i') là không xác định vì K_2 là không nửa liên tục dưới tại 0. Ta thấy rằng $S(\lambda) = K_1(x, \lambda)$ và

do đó

$$\begin{aligned}\text{graph}S^{-1} &= \{(x,\lambda) \mid x \in S(\lambda), \lambda \in [0,1]\}\\ &= (-1,1] \times \{0\} \cup (0,1] \times (0,1].\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}\Phi(0) &= \{(x,\lambda_1) \in \text{graph}S^{-1} \mid (y-x)(\lambda_2-\lambda_1) \geq 0, \forall (y,\lambda_2) \in \text{graph}S^{-1}\}\\ &= \{(1,1)\}.\end{aligned}$$

Lấy $V = (\frac{3}{4}, \frac{5}{4}) \times (\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$ là một tập mở chứa $\Phi(0)$ và $\gamma_n = \frac{1}{n} \to 0$. Ta thấy $x_n^* = (-1+\frac{1}{n}, 0) \in \Phi(\frac{1}{n}) \setminus V$ với mọi n và $x_n^* \to (-1,0) \notin \Phi(0)$. Do đó, Φ là không nửa liên tục trên và cũng không đóng tại 0.

Tiếp theo, chúng ta sẽ nghiên cứu tính nửa liên tục dưới, nửa liên tục dưới Hausdorff, liên tục và liên tục Hausdorff của ánh xạ nghiệm cho bài toán (SQEP).

Với W, Γ, $B = A \times \Lambda$, h và C' như trong bài tpans (BEP), chúng ta xét *bài toán bổ trợ* sau đây:

(BEP*) Tìm $\bar{x}^* \in \text{graph}S^{-1}$ sao cho

$$h(\bar{x}^*, y^*, \gamma) \in \text{int}C', \forall y^* \in \text{graph}S^{-1},$$

trong đó $\text{graph}S^{-1} = \{(x,\lambda) \mid x \in S(\lambda)\}$ là đồ thị của S^{-1}.

Giả sử $\Phi^* : \Gamma \rightrightarrows B$ là các ánh xạ đa trị sao cho với mỗi $\gamma \in \Gamma$, $\Phi^*(\gamma)$ là tập nghiệm của (BEP*), nghĩa là

$$\Phi^*(\gamma) = \{\bar{x}^* \in \text{graph}S^{-1} \mid h(\bar{x}^*, y^*, \gamma) \in \text{int}C',\ \forall y^* \in \text{graph}S^{-1}\},$$

và chúng ta giả sử $\Phi^*(\gamma) \neq \emptyset$ với mỗi γ trong lân cận của $\gamma_0 \in \Gamma$. Ta thấy rằng với mọi $\gamma \in \Gamma$, $\Phi^*(\gamma) \subset \Phi(\gamma)$.

3.1.7 Định nghĩa. ([11, Definition 2.1]) Cho X, Z là các không gian véctơ tôpô Hausdorff, $\varphi : X \to Z$ là hàm véctơ và $C \subset Z$ là nón lồi đóng có đỉnh. Hàm φ được gọi là *C-tựa lõm tổng quát* trong một tập con lồi khác rỗng $A \subset X$, nếu với mọi $x_1, x_2 \in A$ thỏa mãn $\varphi(x_1) \in C$, $\varphi(x_2) \in \mathrm{int}C$ và với mọi $t \in (0, 1)$, ta có

$$\varphi(tx_1 + (1-t)x_2) \in \mathrm{int}C.$$

3.1.8 Định lý. *Với bài toán* (BEP) *và* (BEP*)*, ta giả sử Λ là compắc và các điều kiện sau đây thỏa mãn*

(i) *E là lồi và liên tục với giá trị compắc, K_2 là lõm và liên tục với giá trị compắc;*

(ii) *$L_{\not>_C 0}f$, $L_{\geq_C 0}f$ là đóng trên $A \times A \times \Lambda$ và $L_{\not>_{C'} 0}h$ là đóng trên $B \times B \times \{\gamma_0\}$;*

(iii) *f là C-tựa lõm tổng quát;*

(iv) *$h(\cdot, y^*, \gamma_0)$ là C'-tựa lõm tổng quát, với mọi $y^* \in \mathrm{graph}S^{-1}, \gamma_0 \in \Gamma$.*

Khi đó, Φ là nửa liên tục dưới tại γ_0.

Chứng minh. Đầu tiên, chúng ta chứng minh rằng Φ^* là nửa liên tục dưới tại γ_0. Giả sử ngược lại Φ^* là không nửa liên tục dưới tại γ_0. Khi đó tồn tại $x_0^* = (x_0, \lambda_0) \in \Phi^*(\gamma_0)$ và một lưới $\{\gamma_\alpha\}$ hội tụ γ_0 sao cho với mọi $x_\alpha^* = (x_\alpha, \lambda_\alpha) \in \Phi^*(\gamma_\alpha)$, $\{x_\alpha^*\}$ không hội tụ về x_0^*. Lấy $\{\lambda_\alpha\}$ là một lưới, $\lambda_\alpha \to \lambda_0$. Vì E là nửa liên tục dưới tại λ_0, tồn tại $\bar{x}_\alpha \in E(\lambda_\alpha), \bar{x}_\alpha \to x_0$. Từ sự mâu thuẫn ở trên ta giả sử rằng với mọi α, $\bar{x}_\alpha^* = (\bar{x}_\alpha, \lambda_\alpha) \notin \Phi^*(\gamma_\alpha)$. Bây giờ ta chứng tỏ rằng tồn tại một lưới con của $\{\bar{x}_\alpha\}$ (vẫn ký hiệu bởi $\{\bar{x}_\alpha\}$) sao cho với mọi $y_\alpha \in K_2(x_\alpha, \lambda_\alpha)$, $f(\bar{x}_\alpha, y_\alpha, \lambda_\alpha) \in \mathrm{int}C$. Giả sử ngược lại rằng với mọi α, tồn tại $y_\alpha \in K_2(x_\alpha, \lambda_\alpha)$ sao cho

$$f(\bar{x}_\alpha, y_\alpha, \lambda_\alpha) \notin \mathrm{int}C.$$

Vì K_2 là nửa liên tục trên với giá trị compắc, ta có thể giả sử rằng $y_\alpha \to y_0$ với $y_0 \in K(x_0, \lambda_0)$. Từ $(\bar{x}_\alpha, y_\alpha, \lambda_\alpha) \to (x_0, y_0, \lambda_0)$ và giả thiết (ii), ta suy ra rằng

$$f(x_0, y_0, \lambda_0) \notin \mathrm{int}C,$$

điều này mâu thuẫn vì $x_0^* = (x_0, \lambda_0) \in \Phi^*(\gamma_0)$.

Tiếp theo, chúng ta chứng tỏ rằng tồn tại một lưới con $\{\bar{x}_\beta^*\}$ của $\{\bar{x}_\alpha^*\}$ sao cho với mọi $y_\beta^* \in \mathrm{graph}S^{-1}$, $h(\bar{x}_\beta^*, y_\beta^*, \gamma_\beta) \in \mathrm{int}C'$. Thật vậy, giả sử ngược lại với mọi α, tồn tại $\bar{y}_\alpha^* = (\bar{y}_\alpha, \bar{\lambda}_\alpha) \in \mathrm{graph}S^{-1}$ sao cho

$$h(\bar{x}_\alpha^*, \bar{y}_\alpha^*, \gamma_\alpha) \notin \mathrm{int}C'.$$

Vì Λ là compắc, ta có thể giả sử rằng $\bar{\lambda}_\alpha \to \bar{\lambda}_0$ với $\bar{\lambda}_0 \in \Lambda$. Vì E là nửa liên tục trên với giá trị compắc, ta cũng có thể giả sử rằng $\bar{y}_\alpha \to \bar{y}_0 \in E(\bar{\lambda}_0)$. Kết hợp giả thiết (ii) và tính liên tục dưới của K_2, ta suy ra $f(\bar{y}_0, y_0, \bar{\lambda}_0) \in C$ với mọi $y_0 \in K_2(\bar{y}_0, \bar{\lambda}_0)$, vì $f(\bar{y}_\alpha, y, \bar{\lambda}_\alpha) \in C$ với mọi $y \in K_2(\bar{y}_\alpha, \bar{\lambda}_\alpha)$. Do đó, $\bar{y}_\alpha^* \to \bar{y}_0^* = (\bar{y}_0, \bar{\lambda}_0) \in \mathrm{graph}S^{-1}$. Áp dụng giả thiết (ii), $h(x_0^*, \bar{y}_0^*, \gamma_0) \notin \mathrm{int}C'$, điều này là mâu thuẫn vì $x_0^* \in \Phi^*(\gamma_0)$ và do đó tồn tại một lưới con $\{\bar{x}_\beta^*\}$ của $\{\bar{x}_\alpha^*\}$ sao cho $\bar{x}_\beta^* \in \Phi^*(\gamma_\beta)$, điều này là không thể. Vì vậy, Φ^* là liên tục dưới tại γ_0.

Cuối cùng, ta chứng minh $\Phi(\gamma_0) \subset \mathrm{cl}\Phi^*(\gamma_0)$. Lấy $x_1^* = (x_1, \lambda_1) \in \Phi(\gamma_0)$, $x_2^* = (x_2, \lambda_2) \in \Phi^*(\gamma_0)$ và $x_t^* = tx_1^* + (1-t)x_2^* = (x_t, \lambda_t)$ với $t \in (0, 1)$. Chúng ta sẽ chứng tỏ $x_t^* \in \Phi^*(\gamma_0)$. Từ tính lồi của E, $x_t = tx_1 + (1-t)x_2 \in E(\lambda_t)$. Vì K_2 là lõm, với mọi $y_t \in K_2(x_t, \lambda_t)$, tồn tại $y_1 \in K_2(x_1, \lambda_1)$ và $y_2 \in K_2(x_2, \lambda_2)$ sao cho $y_t = ty_1 + (1-t)y_2$. Từ $x_1^* \in \Phi(\gamma_0)$, $x_2^* \in \Phi^*(\gamma_0)$ và giả thiết (iii), ta suy ra

$$f(x_t, y_t, \lambda_t) \in \mathrm{int}C.$$

Với mọi $y^* \in \mathrm{graph}S^{-1}$, $h(x_1^*, y^*, \gamma_0) \in C'$ và $h(x_2^*, y^*, \gamma_0) \in \mathrm{int}C'$, từ $x_1^* \in \Phi(\gamma_0)$ và $x_2^* \in \Phi^*(\gamma_0)$. Áp dụng giả thiết (iv), ta có

$$h(x_t^*, y^*, \gamma_0) \in \mathrm{int}C',$$

nghĩa là, $x_t^* \in \Phi^*(\gamma_0)$. Do đó $\Phi(\gamma_0) \subset \mathrm{cl}\Phi^*(\gamma_0)$.

Từ tính liên tục dưới của Φ^* tại γ_0, ta có

$$\Phi(\gamma_0) \subset \mathrm{cl}\Phi^*(\gamma_0) \subset \liminf_{\gamma\to\gamma_0} \Phi^*(\gamma) \subset \liminf_{\gamma\to\gamma_0} \Phi(\gamma).$$

Do đó, Φ là nửa liên tục dưới tại γ_0. □

Ví dụ sau đây chứng tỏ tính lồi của E trong Định lý 3.1.8 là cần thiết.

3.1.9 Ví dụ. Cho $X, Y, Z, W, A, \Lambda, \Gamma, C, C'$ như trong Ví dụ 3.1.2,

$$\begin{aligned} K_1(x,\lambda) = K_2(x,\lambda) &= [-2,-\lambda] \cup [1,2], \\ f(x,y,\lambda) &= x + y + \lambda + 5, \\ h((x,\lambda_1),(y,\lambda_2),\gamma) &= [-x^2 + (2\gamma+1)x - \gamma(\gamma+1)](y + \lambda_1 + \lambda_2 + 3). \end{aligned}$$

Ta thấy rằng E là nửa liên tục dưới, K_2 là nửa liên tục trên với giá trị compắc và các giả thiết (ii)-(iv) là được thỏa mãn. Ta có $S(\lambda) = E(\lambda) = [-2,-\lambda] \cup [1,2]$, và do đó

$$\begin{aligned} \mathrm{graph}S^{-1} &= \{(x,\lambda) \mid x \in S(\lambda), \lambda \in \Lambda\} \\ &= [-2,-\lambda] \times [0,1] \cup [1,2] \times [0,1]. \end{aligned}$$

Ta thấy $x_0^* = (0,0) \in \Phi(0)$. Lấy $\gamma_n = \frac{1}{n} \to 0$. Ta thấy rằng nếu $x^* = (x,\lambda) \in \Phi(\gamma_n)$ thì $x \in [1, \gamma_n + 1]$ và do đó với mọi $x_n^* = (x_n, \lambda_n) \in \Phi^*(\gamma_n)$, $\{x_n^*\}$ không hội tụ đến $x_0^* = (0,0)$, nghĩa là, Φ là không nửa liên tục dưới tại 0. Vì giả thiết (i) là không thỏa mãn. Thật vậy, lấy $x_1 = 0 \in E(0)$, $x_2 = 1 \in E(1)$, $t = \frac{1}{2}$, vì vậy $x_t = \frac{1}{2} \notin E(\lambda_t) = E(\frac{1}{2}) = [-2,-\frac{1}{2}] \cup [1,2]$, nghĩa là, E là không lồi.

Ví dụ sau đây chứng tỏ tính C-tựa lõm của f trong Định lý 3.1.8 là cần thiết.

3.1.10 Ví dụ. Cho $X, Y, Z, W, A, \Lambda, \Gamma, C, C', g$ như trong Ví dụ 3.1.9, $K_1(x, \lambda) = K_2(x, \lambda) = [-2, 2]$ và $f(x, y, \lambda) = (x^2-(1-\lambda)x-\lambda)(y+\lambda+3)$.

Ta thấy tất cả các giả thiết của Định lý 3.1.8 là thỏa mãn ngoại trừ giả thiết (iii). Tính toán trực tiếp ta được $S(\lambda) = [-2, -\lambda] \cup [1, 2]$. Sử dụng kỹ thuật như trong Ví dụ 3.1.9, ta kết luận Φ là không nửa liên tục dưới tại 0, do tính chất C-tựa lõm của f là không thỏa mãn. Thật vậy, $x_1 = 0, x_2 = 2$, $y_1 = y_2 = 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $t = \frac{3}{4}$, khi đó $x_t = \frac{1}{2}$, $y_t = 1$, $\lambda_t = 0$, $f(x_1, y_1, \lambda_1) = 0$ và $f(x_2, y_2, \lambda_2) = 8$, nhưng $f(x_t, y_t, \lambda_t) = -1 < 0$.

Ví dụ sau đây chứng tỏ tính C'-tựa lõm của h trong Định lý 3.1.8 là cần thiết.

3.1.11 Ví dụ. Cho $X, Y, Z, W, A, \Lambda, \Gamma, C, C', f$ như trong Ví dụ 3.1.9, $K_1(x, \lambda) = K_2(x, \lambda) = [\lambda, 2]$ và $h((x, \lambda_1), (y, \lambda_2), \gamma) = (x^2 - x - \gamma)(y + \lambda_1 + \lambda_2 + 3)$. Khi đó, các giả thiết (i)-(iii) là thỏa mãn. Tính toán trực tiếp ta được $S(\lambda) = [\lambda, 2]$ và do đó graph$S^{-1} = \{(x, \lambda) \mid x \in S(\lambda), \lambda \in \Lambda\} = [\lambda, 2] \times [0, 1]$. Ta tính toán trực tiếp ta được $x_0^* = (0, 0) \in \Phi(0)$. Lấy $\gamma_n = \frac{1}{n}$, $\gamma_n \to \gamma_0 = 0$. Nếu $x^* = (x, \alpha) \in \Phi(\gamma_n)$ khi đó $x \in [\frac{1+\sqrt{1+\frac{4}{n}}}{2}, 2]$, và do đó với mọi $x_n^* \in \Phi(\lambda_n)$, $\{x_n^*\}$ không thể hội tụ về x_0^*, nghĩa là, Φ là không nửa liên tục dưới 0. Để thấy điều này, ta lấy $x_1^* = (0, 0)$, $x_2^* = (2, 0)$, $y^* = (1, 0)$, $t = \frac{3}{4}$, khi đó $x_t^* = (\frac{1}{2}, 0)$, $h(x_1^*, y^*, 0) = 0$ và $h(x_2^*, y^*, 0) = 8$, nhưng $h(x_t^*, y^*, 0) = -1 < 0$.

3.1.12 Định lý. *Giả sử tất cả các giả thiết của Định lý 3.1.8 thỏa mãn và bổ sung điều kiện sau:*

(v) $L_{\geq_{C'}0}h(\cdot, y^*, \gamma_0)$ *là đóng trong* B *với mọi* $y^* \in$ graph$S^{-1}, \gamma_0 \in \Gamma$.

Khi đó, Φ *là nửa liên tục dưới Hausdorff tại* γ_0.

Chứng minh. Đầu tiên, ta chứng minh rằng $\Phi(\gamma_0)$ là compắc. Lấy $x^*_\alpha = (x_\alpha, \lambda_\alpha) \in \Phi(\gamma_0)$. Vì Λ là compắc, tồn tại một lưới con $\{\lambda_\beta\}$ của $\{\lambda_\alpha\}$ sao cho $\lambda_\beta \to \lambda_0 \in \Lambda$. Vì E là nửa liên tục trong với giá trị compắc, ta có thể giả sử rằng $x_\beta \to x_0$ với $x_0 \in E(\lambda_0)$ (có thể lấy một lưới con nếu cần thiết). Với mọi $y_0 \in K_2(x_0, \lambda_0)$, vì K_2 là nửa liên tục dưới tại (x_0, λ_0), tồn tại $y_\beta \in K_2(x_\beta, \lambda_\beta)$ sao cho $y_\beta \to y_0$. Từ $x^*_\beta \in \text{graph}S^{-1}$, ta có

$$f(x_\beta, y_\beta, \lambda_\beta) \in C.$$

Sử dụng giả thiết (ii), ta nhận được $f(x_0, y_0, \lambda_0) \in C$. Do đó, $x_0 \in S(\lambda_0)$, nghĩa là, $x^*_0 \in \text{graph}S^{-1}$. Với mọi $y^* \in \text{graph}S^{-1}$, ta có

$$h(x^*_\beta, y^*, \gamma_0) \in C',$$

do $x^*_\beta \in \Phi(\gamma_0)$. Ứng dụng giả thiết (v), ta kết luận $h(x^*_0, y^*, \gamma_0) \in C'$. Vì vậy, $x^*_0 \in \Phi(\gamma_0)$, nghĩa là, $\Phi(\gamma_0)$ là compắc. Kết hợp Bổ đề 1.1.6 và Định lý 3.1.8, ta suy ra Φ là nửa liên tục dưới Hausdorff tại γ_0. □

Ví dụ sau đây được đưa ra để minh họa cho Định lý 3.1.1 và Định lý 3.1.12 là có thể ứng dụng.

3.1.13 Ví dụ. Lấy $X, Y, Z, W, A, \Lambda, \Gamma, A, C, C'$ như trong Ví dụ 3.1.2,

$$K_1(x, \lambda) = K_2(x, \lambda) = [\lambda, 1],$$
$$f(x, y, \lambda) = x + y + \lambda + 1,$$
$$h((x, \lambda_1), (y, \lambda_2), \gamma) = (x + y + \gamma)(\lambda_1 + \lambda_2 + \gamma + 1).$$

Ta thấy rằng tất cả các điều kiện trong Định lý 3.1.1 và Định lý 3.1.12 là thỏa mãn, do đó bởi ứng dụng các định lý này ta có thể kết luận Φ là liên tục Hausdorff trong Γ. Thật vậy, tính toán trực tiếp ta được $S(\lambda) = [\lambda, 1]$và do đó

$$\text{graph}S^{-1} = \{(x, \lambda) \mid x \in S(\lambda), \lambda \in [0, 1]\} = [\lambda, 1] \times [0, 1].$$

Do đó ta nhận được $\Phi(\gamma) = [\lambda, 1] \times [0, 1]$ với mọi $\gamma \in \Gamma$. Vì vậy Φ là liên tục Hausdorff trong Γ.

Kết hợp các định lý 3.1.1, 3.1.5 và định lý 3.1.8, 3.1.12, ta thiết lập các điều kiện đủ cho tính liên tục và tính liên tục Hausdorff của ánh xạ nghiệm đến bài toán (BEP).

3.1.14 Định lý. (i) *Giả sử tất cả các giả thiết của Định lý 3.1.8 thỏa mãn. Khi đó, Φ là liên tục tại γ_0, nếu các điều kiện của Định lý 3.1.1 hoặc Định lý 3.1.5 thỏa mãn.*

(ii) *Giả sử tất cả các giả thiết của Định lý 3.1.12 thỏa mãn. Khi đó, Φ là liên tục Hausdorff tại γ_0, nếu các điều kiện của Định lý 3.1.1 hoặc Định lý 3.1.5 thỏa mãn.*

Tiếp theo, chúng ta sẽ nghiên cứu cho một số áp dụng của bài toán cân bằng hai mức. Vì bài toán (BEP) bao gồm nhiều mô hình liên quan đến tối ưu, chúng ta có thể suy ra trực tiếp tương ứng của các kết quả ở trên cho các trường hợp đặc biệt này. Sau đây ta chỉ xét cho một số hệ quả cho hai mô hình bất đẳng thức biến phân với ràng buộc cân bằng và bài toán tối ưu với ràng buộc cân bằng như là một ví dụ.

Đầu tiên, chúng ta xét bài toán bất đẳng thức biến phân với ràng buộc cân bằng. Lấy $X, Y, Z, W, C, C', A, B, \Gamma, \Lambda, K_1, K_2, f$ như trong bài toán (SQEP) và lấy $L(X \times Y; Z)$ là không gian của tất cả các toán tử tuyến tính liên tục từ $X \times Y$ vào Z và $T : B \times \Gamma \to L(X \times Y; Z)$ là hàm véctơ. $\langle z, x\rangle$ ký hiệu giá trị của một toán tử $z \in L(X \times Y; Z)$ tại $x \in B$. Với mọi $\gamma \in \Gamma$, chúng ta xét *bất đẳng thức biến phân véctơ với ràng buộc cân bằng* sau: (VIEC) Tìm $\bar{x}^* \in \text{graph}S^{-1}$ sao cho

$$\langle T(\bar{x}^*, \gamma), y^* - \bar{x}^*\rangle \in C', \forall y^* \in \text{graph}S^{-1},$$

trong đó $S(\lambda)$ là tập nghiệm của bài toán (SQEP).

Đặt $h(x^*, y^*, \gamma) = \langle T(x^*, \gamma), y^* - x^* \rangle$, chúng ta thấy (VIEC) trở thành một trường hợp đặc biệt của (BEP). Với $\gamma \in \Gamma$, chúng ta ký hiệu tập nghiệm của (VIEC) bởi $\Psi(\gamma)$ và luôn giả sử rằng $\Psi(\gamma) \neq \emptyset$ với mọi γ trong lân cận của $\gamma_0 \in \Gamma$.

Hệ quả sau đây được suy ra từ Định lý 3.1.1.

3.1.15 Hệ quả. *Với bài toán* (VIEC)*, ta giả sử rằng*

(i) *E là nửa liên tục trên với giá trị compắc và K_2 là nửa liên tục dưới;*

(ii) *$L_{\geq_C 0} f$ là đóng trong $A \times A \times \Lambda$;*

(iii) *tập $\{(x^*, y^*, \gamma) \mid \langle T(x^*, \gamma), y^* - x^* \rangle \in C'\}$ là đóng trong $B \times B \times \{\gamma_0\}$.*

Khi đó, Ψ là nửa liên tục trên và đóng tại γ_0.

3.1.16 Nhận xét. Hệ quả 3.1.15 vẫn thỏa mãn nếu giả thiết (i) được thay thế bởi

(i') A là compắc, K_1 là đóng và K_2 là nửa liên tục dưới.

Tiếp theo, chúng ta sẽ nghiên cứu bài toán tối ưu với ràng buộc cân bằng. Lấy $X, Y, Z, W, A, B, C, C', \Lambda, \Gamma, K_1, K_2, f$ như trong bài toán (SQEP) và $g : B \times \Lambda \to Z$ là một hàm véctơ. Với mọi $\gamma \in \Gamma$, chúng ta xét *bài toán tối ưu với ràng buộc cân bằng* sau:

(OPEC) Tìm $\bar{x}^* \in \text{graph} S^{-1}$ sao cho

$$g(y^*, \gamma) \in g(\bar{x}^*, \gamma) + C', \forall y^* \in \text{graph} S^{-1},$$

trong đó $S(\lambda)$ là tập nghiệm của bài toán (SQEP).

Đặt $h(x^*, y^*, \gamma) = g(y^*, \gamma) - g(x^*, \gamma)$, ta thấy rằng (OPEC) là một trường hợp đặc biệt của (BEP). Với $\gamma \in \Gamma$, chúng ta ký hiệu tập nghiệm

của bài toán (OPEC) bởi $\Xi(\gamma)$ và giả sử rằng $\Xi(\gamma) \neq \emptyset$ với mọi γ trong một lân cận của $\gamma_0 \in \Gamma$. Ứng dụng Định lý 3.1.1, chúng ta nhận được kết quả sau.

3.1.17 Hệ quả. *Với bài toán* (OPEC)*, ta giả sử rằng*

(i) *E là nửa liên tục trên với giá trị compắc và K_2 là nửa liên tục dưới;*

(ii) *$L_{\geq_{C^0}} f$ là đóng trong $A \times A \times \Lambda$;*

(iii) *tập $\{(x^*, y^*, \gamma) \mid g(y^*, \gamma) - g(x^*, \gamma) \in C'\}$ là đóng trong $B \times B \times \{\gamma_0\}$.*

Khi đó, Ξ là nửa liên tục trên và đóng tại γ_0.

3.1.18 Nhận xét. Hệ quả 3.1.17 vẫn thỏa mãn nếu giả thiết (i) được thay thế bởi

(i') A là compắc, K_1 là đóng và K_2 là nửa liên tục dưới.

3.2 Tính đặt chỉnh của bài toán cân bằng hai mức

Cho X, W, Z là các không gian Banach, A và Λ tương ứng là các tập con đóng khác rỗng của X và W, $C_1 : A \rightrightarrows Z$ là ánh xạ đa trị sao cho với mọi $x \in A$, $C_1(x)$ là một nón lồi đóng và có đỉnh với $\mathrm{int} C_1(x) \neq \emptyset$. Với $i = 1, 2$, lấy $K_i : A \times \Lambda \rightrightarrows A$ là các ánh xạ đa trị và $f : A \times A \times \Lambda \to Z$ là ánh xạ véctơ. Với $\lambda \in \Lambda$, chúng ta xét *bài toán tựa cân bằng mạnh với nón di động* sau:

(MSQEP) Tìm $\bar{x} \in K_1(\bar{x}, \lambda)$ sao cho

$$f(\bar{x}, y, \lambda) \in C_1(\bar{x}), \forall y \in K_2(\bar{x}, \lambda).$$

Với $\lambda \in \Lambda$, chúng ta ký hiệu tập nghiệm của bài toán (MSQEP) bởi $S(\lambda)$.

Cho Y là không gian Banach, $B = A \times \Lambda$, $C_2 : B \rightrightarrows Y$ là hàm đa trị sao cho với mọi $x^* \in B$, $C_2(x^*)$ là một nón lồi đóng có đỉnh với $\text{int}C_2(x^*) \neq \emptyset$ và $h : B \times B \to Y$ là hàm véctơ. Với mỗi $\gamma_0 \in \Gamma$, chúng ta xét *bài toán cân bằng véctơ hai mức với nón di động* sau:

(MBEP) Tìm $\bar{x}^* \in \text{graph}S^{-1}$ sao cho

$$h(\bar{x}^*, y^*) \in C_2(\bar{x}^*), \forall y^* \in \text{graph}S^{-1},$$

trong đó $S(\lambda)$ là tập nghiệm của (MSQEP) và

$$\text{graph}S^{-1} := \{(x, \lambda) \in A \times \Lambda \mid x \in S(\lambda)\}.$$

Chúng ta ký hiệu tập nghiệm của (MBEP) bởi Ψ, nghĩa là,

$$\Psi = \{\bar{x}^* \in \text{graph}S^{-1} \mid h(\bar{x}^*, y^*) \in C_2(\bar{x}^*),\ \forall y^* = (y, \lambda) \in \text{graph}S^{-1}\}.$$

Vì đã có nhiều kết quả nghiên cứu về điều kiện tồn tại của bài toán cân bằng hai mức ([20], [24], [28]) nên chúng ta giả sử các nghiệm của bài toán này là tồn tại.

Từ các khái niệm về nửa liên tục trong Anh và Hien ([1]) và Tanaka ([67]), chúng ta đưa ra một số khái niệm về nửa liên tục với nón di động sau.

3.2.1 Định nghĩa. Cho $C : X \rightrightarrows Z$ là một hàm đa trị sao cho với mọi $x \in X$, $C(x)$ là nón lồi, đóng có đỉnh với $\text{int}C(x) \neq \emptyset$. Lấy $f : X \times \Lambda \to Z$ là hàm véctơ. Hàm f được gọi là *nửa liên tục trên* theo nón C (viết tắt là C-nửa liên tục trên) tại (x_0, λ_0) nếu với bất kỳ lân cận V của gốc θ_Z trong Z, tồn tại một lân cận U của (x_0, λ_0) sao cho với mọi $(x, \lambda) \in U$,

$$f(x, \lambda) \in f(x_0, \lambda_0) + V - C(x_0).$$

Nếu f là C-nửa liên tục trên trong toàn bộ $X \times \Lambda$, thì ta nói f là C-nửa liên tục trên.

3.2.2 Mệnh đề. *Các điều kiện sau đây là tương đương.*

(a) *f là C-nửa liên tục trên.*

(b) *Với mọi $(x_0, \lambda_0) \in X \times \Lambda$ và $d \in \mathrm{int}C(x_0)$, tồn tại một lân cận U của (x_0, λ_0) sao cho $f(x, \lambda) \in f(x_0, \lambda_0) + d - \mathrm{int}C(x_0)$ với mọi $(x, \lambda) \in U$.*

(c) *Với mọi $(x_0, \lambda_0) \in X \times \Lambda$ và $a \in Z$, $f^{-1}(a - \mathrm{int}C(x_0))$ là mở.*

Chứng minh. Đầu tiên, chúng ta chứng tỏ rằng (a) là tương đương với (b). Lấy $(x_0, \lambda_0) \in X \times \Lambda$ và $d \in \mathrm{int}C(x_0)$. Khi đó, $V = d - \mathrm{int}C(x_0)$ là một lân cận gốc θ_Z trong Z. Nếu (a) xác định, khi đó tồn tại một lân cận U của (x_0, λ_0) thỏa mãn $f(x, \lambda) \in f(x_0, \lambda_0) + V - C(x_0)$ với mọi $(x, \lambda) \in U$. Vì $C(x_0)$ là một nón lồi, $-\mathrm{int}C(x_0) - C(x_0) = -\mathrm{int}C(x_0)$ ([68, Theorem 2.2]), $f(x, \lambda) \in f(x_0, \lambda_0) + d - \mathrm{int}C(x_0)$ với mọi $(x, \lambda) \in U$, và do đó (b) xác định. Lấy $(x_0, \lambda_0) \in X \times \Lambda$ và một lân cận V của gốc θ_Z trong Z. Vì $C(x_0)$ là nón lồi có đỉnh với $\mathrm{int}C(x) \neq \emptyset$, tồn tại $d \in \mathrm{int}C(x_0)$ sao cho $d \in V$. Nếu (b) là đúng, tồn tại một lân cận U của (x_0, λ_0) thỏa mãn $f(x, \lambda) \in f(x_0, \lambda_0) + d - \mathrm{int}C(x_0)$ với mọi $(x, \lambda) \in U$. Vì vậy (a) thỏa mãn. Bây giờ, chúng ta chứng tỏ (b) là tương đương với (c). Giả sử rằng với mọi $a \in Y$, $f^{-1}(a - \mathrm{int}C(\lambda_0))$ là mở với mọi $(x_0, \lambda_0) \in X \times \Lambda$. Với $d \in \mathrm{int}C(x_0)$, $(x_0, \lambda_0) \in f^{-1}(f(x_0, \lambda_0) + d - \mathrm{int}C(x_0))$ là mở. Vì vậy tồn tại một lân cận U của (x_0, λ_0) sao cho $U \subset f^{-1}(f(x_0, \lambda_0) + d - \mathrm{int}C(x_0))$, và do đó $f(x, \lambda) \in f(x_0, \lambda_0) + d - \mathrm{int}C(x_0)$ với mọi $(x, \lambda) \in U$. Vì vậy (b) xác định. Ngược lại, giả sử (b) là được thỏa mãn. Với $a \in Z$ và $(x_0, \lambda_0) \in f^{-1}(a - \mathrm{int}C(x_0))$, đặt $d = a - f(x_0, \lambda_0)$. Vì $d \in \mathrm{int}C(x_0)$, tồn tại một lân cận U của (x_0, λ_0) sao cho $f(x, \lambda) \in f(x_0, \lambda_0) + d - \mathrm{int}C(x_0)$ với mọi $(x, \lambda) \in U$, vì vậy $f(x, \lambda) \in a - \mathrm{int}C(x_0)$. Do đó, $f^{-1}(a - \mathrm{int}C(x_0))$ là mở, vậy (c) thỏa mãn. $\square$

Áp dụng Mệnh đề 3.2.2, ta nhận được kết quả quan trọng sau.

3.2.3 Mệnh đề. *Giả sử f và g là C-nửa liên tục trên và $k \in (0, +\infty)$. Khi đó,*

(i) *$f + g$ là C-nửa liên tục trên.*

(ii) *kf là C-nửa liên tục trên.*

Chứng minh. (i) Với mọi $(x_0, \lambda_0) \in X \times \Lambda$ và $d \in \text{int}C(x_0)$. Vì f và g là C-nửa liên tục trên, sử dụng Mệnh đề 3.2.2, ta có một lân cận U (x_0, λ_0) sao cho với mọi $(x, \lambda) \in U$, $f(x, \lambda) \in f(x_0, \lambda_0) + \frac{1}{2}d - \text{int}C(x_0)$, và $g(x, \lambda) \in g(x_0, \lambda_0) + \frac{1}{2}d - \text{int}C(x_0)$. Vì vậy, $(f + g)(x, \lambda) \in (f + g)(x_0, \lambda_0) + d - \text{int}C(x_0)$, với mọi $(x, \lambda) \in U$. Từ Mệnh đề 3.2.2, $f + g$ là C-nửa liên tục trên.

(ii) Tính C- nửa liên tục trên của kf là chứng minh tương tự. □

Nếu $X = \Lambda = Z = \mathbb{R}, C(x) \equiv \mathbb{R}_+$, và $f(x, \lambda) \equiv h(x)$. Ta suy ra từ Mệnh đề 3.2.2 rằng tính C-nửa liên tục trên của h suy ra khái niệm gốc của tính nửa liên tục trên.

Tiếp theo, chúng ta đưa ra một số khái niệm đặt chỉnh của Levitin-Polyak cho bài toán cân bằng véctơ hai mức và mô tả mêtric của các khái niệm này. Lấy $e_1 : A \to Z$ và $e_2 : B \to Y$ là các hàm liên tục thỏa mãn $e_1(x) \in \text{int}C_1(x)$ và $e_2(x^*) \in \text{int}C_2(x^*)$ với mọi $x \in A$ và $x^* \in B$, tương ứng.

3.2.4 Định nghĩa. Một dãy $\{x_n^*\} := \{(x_n, \lambda_n)\}$ được gọi là *dãy xấp xỉ Levitin-Polyak* (LP) của (MBEP) nếu

(i) $\{x_n^*\} := \{(x_n, \lambda_n)\} \subset A \times \Lambda, \forall n \in \mathbb{N}$;

(ii) Tồn tại một dãy $\{\varepsilon_n\} \subset \mathbb{R}_+$ hội tụ đến 0 sao cho

$$\begin{aligned}
&d(x_n, K_1(x_n, \lambda_n)) \leq \varepsilon_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\
&f(x_n, y, \lambda_n) + \varepsilon_n e_1(x_n) \in C_1(x_n), \forall y \in K_2(x_n, \lambda_n) \quad \text{và} \\
&h(x_n^*, y^*) + \varepsilon_n e_2(x_n^*) \in C_2(x_n^*), \forall y^* \in \text{graph} S^{-1},
\end{aligned}$$

trong đó $d(a, M) := \inf_{b \in M} d(a, b)$ là khoảng cách từ điểm đến tập.

3.2.5 Định nghĩa. Bài toán (MBEP) được gọi là *đặt chỉnh Levitin-Polyak* (LP) nếu

(i) Bài toán (MBEP) có nghiệm duy nhất;

(ii) Mỗi dãy xấp xỉ Levitin-Polyak $\{x_n^*\}$ của (MBEP) hội tụ đến nghiệm duy nhất.

3.2.6 Định nghĩa. Bài toán (MBEP) được gọi là *đặt chỉnh Levitin-Polyak (LP) tổng quát* nếu

(i) Ψ là khác rỗng;

(ii) với mọi dãy xấp xỉ Levitin-Polyak $\{x_n^*\}$ của (MBEP), tồn tại một dãy con hội tụ đến một số điểm của Ψ.

3.2.7 Nhận xét. Trong [46] các tác giả đã xét bài toán cân bằng hai mức véctơ yếu và nghiên cứu đặt chỉnh Levitin-Polyak cho bài toán này. Tuy nhiên, dãy xấp xỉ được giới thiệu trong Định nghĩa 3.2.4 là dãy xấp xỉ Levitin-Polyak cho cả bài toán mức trên và bài toán mức dưới. Do đó, khái niệm của đặt chỉnh Levitin-Polyak trong Định nghĩa 3.2.5 và Định nghĩa 3.2.6 là khác từ các khái niệm trong [46].

Với $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, tập nghiệm xấp xỉ của (MBEP) là

$$\widetilde{\Psi}(\varepsilon) := \{x^* = (x, \lambda) \in \text{graph}S^{-1} \mid d(x, K_1(x, \lambda)) \leq \varepsilon,$$
$$f(x, y, \lambda) + \varepsilon e_1(x) \in C_1(x), \forall y \in K_2(x, \lambda),$$
$$h(x^*, y^*) + \varepsilon e_2(x^*) \in C_2(x^*),\ \forall y^* \in \text{graph}S^{-1}\}.$$

Rõ ràng rằng với $0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$, $\widetilde{\Psi}(0) = \Psi$ và $\widetilde{\Psi}(\varepsilon_1) \subset \widetilde{\Psi}(\varepsilon_2)$.

3.2.8 Định lý. *Với bài toán* (MBEP)*, ta giả sử rằng A và Λ là các tập compắc và các điều kiện sau đây thỏa mãn*

(i) *K_1 là nửa liên tục trên với giá trị compắc và K_2 là nửa liên tục dưới;*

(ii) *f là C_1-nửa liên tục trên;*

(iii) *với mọi $y^* \in \text{graph}S^{-1}$, $h(\cdot, y^*)$ là C_2-nửa liên tục trên;*

(iv) *C_1 và C_2 là nửa liên tục trên Hausdorff.*

Khi đó, $\widetilde{\Psi}$ là nửa liên tục trên tại 0 và có giá trị compắc.

Chứng minh. Giả sử ngược lại rằng $\widetilde{\Psi}$ là không nửa liên tục trên tại 0. Khi đó, tồn tại một tập con mở U, $\widetilde{\Psi}(0) = \Psi \subset U$ và một dãy $\{\varepsilon_n\} \subset \mathbb{R}_+$ hội tụ đến 0 sao cho tồn tại $x_n^* = (x_n, \lambda_n) \in \widetilde{\Psi}(\varepsilon_n) \setminus U$ với mọi n. Vì A và Λ là compắc, ta có thể giả sử rằng $\{x_n^*\}$ hội tụ đến $x_0^* = (x_0, \lambda_0) \in A \times \Lambda$. Chúng ta chứng tỏ $x_0^* \in \widetilde{\Psi}(0)$. Từ K_1 có giá trị compắc, tồn tại $\bar{x}_n \in K_1(x_n, \lambda_n)$ thỏa mãn $d(x_n, \bar{x}_n) = d(x_n, K_1(x_n, \lambda_n))$. Từ Bổ đề 1.1.6, ta giả sử $\bar{x}_n$ hội tụ đến $\bar{x}_0 \in K_1(x_0, \lambda_0)$. Vì $(x_n, \bar{x}_n, \varepsilon_n) \to (x_0, \bar{x}_0, 0)$ và $d(x_n, \bar{x}_n) \leq \varepsilon_n$, ta suy ra $d(x_0, \bar{x}_0) = 0$. Thật vậy, nếu $d(x_0, \bar{x}_0) =: r > 0$, khi đó tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $d(x_0, x_n), d(\bar{x}_n, \bar{x}_0)$ và ε_n là nhỏ hơn $\frac{r}{4}$ với mọi $n \geq n_0$, và do đó

$$r = d(x_0, \bar{x}_0) \leq d(x_0, x_n) + d(x_n, \bar{x}_n) + d(\bar{x}_n, \bar{x}_0) \leq \frac{r}{4} + \frac{r}{4} + \frac{r}{4} = \frac{3r}{4},$$

điều này không thể. Vì vậy, $x_0 \in K(x_0, \lambda_0)$. Tiếp theo ta chứng tỏ $f(x_0, y, \lambda_0) \in C_1(x_0)$ với mọi $y \in K_2(x_0, \lambda_0)$. Lấy $y_0 \in K_2(x_0, \lambda_0)$ là tùy ý. Vì K_2 là nửa liên tục dưới, tồn tại $y_n \in K_2(x_n, \lambda_n)$ hội tụ đến y_0. Do $x_n^* \in \widetilde{\Psi}(\varepsilon_n)$, ta có

$$f(x_n, y_n, \lambda_n) + \varepsilon_n e_1(x_n) \in C_1(x_n), \forall n.$$

Đặt $g : X \times X \times \Lambda \times \mathbb{R}_+ \to Z$ được đưa ra bởi $g(x, y, \lambda, \varepsilon) = f(x, y, \lambda) + \varepsilon e_1(x)$. Vì f là C_1-nửa liên tục trên, Mệnh đề 3.2.3 suy ra g là C_1-nửa liên tục trên.

Với mọi lân cận B của gốc θ_Z, tồn tại một lân cận cân B_1 của θ_Z, nghĩa là, $-B_1 = B_1$ sao cho $B_1 + B_1 \subset B$. Vì C_1 là nửa liên tục trên Hausdorff và g là C_1-nửa liên tục trên, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $C_1(x_n) \subset C_1(x_0) + B_1$ và $g(x_n, y_n, \lambda_n, \varepsilon_n) \in g(\bar{x}, y, \lambda, 0) + B_1 - C_1(x_0)$ với mọi $n \geq n_1$. Từ tập cân B_1, ta có

$$\begin{aligned} g(x_0, y_0, \lambda_0, 0) &\in g(x_n, y_n, \lambda_n, \varepsilon_n) - B_1 + C_1(x_0) \\ &= g(x_n, y_n, \lambda_n, \varepsilon_n) + B_1 + C_1(x_0), \end{aligned}$$

và do đó $g(x_0, y_0, \lambda_0, 0) \in C_1(x_n) + B_1 + C_1(x_0)$. Vì $C_1(x_0)$ là nón lồi, ta nhận được

$$g(x_0, y_0, \lambda_0, 0) \in C_1(x_0) + B_1 + B_1 + C_1(x_0) \subset C_1(x_0) + B.$$

Do B là tùy ý và $C_1(x_0)$ là đóng, ta suy ra rằng

$$f(x_0, y_0, \lambda_0) = g(x_0, y_0, \lambda_0, 0) \in C_1(x_0).$$

Sử dụng phương pháp chứng minh tương tự như trên ta có $h(x_0^*, y^*) \in C_2(x_0^*)$ với mọi $y^* \in \text{graph}S^{-1}$. Do đó, $x_0^* \in \Psi = \widetilde{\Psi}(0) \subset U$, điều này không thể vì $x_n^* \notin U$ với mọi n. Vì vậy, $\widetilde{\Psi}$ là nửa liên tục trên.

Lý luận tương tự như trên ta cũng chứng minh được $\widetilde{\Psi}(0)$ là đóng. Từ tính compắc của A và Λ, ta kết luận rằng $\widetilde{\Psi}(0)$ là compắc. $\square$

Bây giờ, chúng ta nghiên cứu mối quan hệ giữa đặt chỉnh Levitin-Polyak tổng quát và tính nửa liên tục trên của ánh xạ nghiệm xấp xỉ.

3.2.9 Định lý. *Bài toán* (MBEP) *là đặt chỉnh Levitin-Polyak tổng quát khi và chỉ khi* $\widetilde{\Psi}$ *là nửa liên tục trên và có giá trị compắc khác rỗng tại* 0.

Chứng minh. Giả sử rằng $\widetilde{\Psi}$ là nửa liên tục trên và có giá trị compắc khác rỗng tại 0. Lấy $\{x_n^*\}$ là một dãy xấp xỉ Levitin-Polyak của (MBEP). Khi đó, tồn tại một dãy $\{\varepsilon_n\} \subset \mathbb{R}_+$ hội tụ đến 0 sao cho

$$\begin{aligned}
&d(x_n, K_1(x_n, \lambda_n)) \leq \varepsilon_n, \forall n \in \mathbb{N},\\
&f(x_n, y, \lambda_n) + \varepsilon_n e_1(x_n) \in C_1(x_n), \forall y \in K_2(x_n, \lambda_n) \text{ và}\\
&h(x_n^*, y^*) + \varepsilon_n e_2(x_n^*) \in C_2(x_n^*), \forall y^* = (y, \lambda) \in \text{graph}S^{-1}.
\end{aligned}$$

Do đó, $x_n^* \in \widetilde{\Psi}(\varepsilon_n)$. Vì $\widetilde{\Psi}$ là nửa liên tục trên và có giá trị compắc khác rỗng tại 0, ta suy ra từ Bổ đề 1.1.6 rằng tồn tại một dãy con $\{x_{n_k}^*\}$ của $\{x_n^*\}$ hội tụ đến một số điểm $x_0^* \in \widetilde{\Psi}(0) = \Psi$. Vì vậy, bài toán (MBEP) là đặt chỉnh Levitin-Polyak tổng quát.

Ngược lại, giả sử rằng bài toán (MBEP) là đặt chỉnh Levitin-Polyak tổng quát. Rõ ràng $\Psi = \widetilde{\Psi}(0)$ là khác rỗng và compắc. Với $\{\varepsilon_n\} \subset \mathbb{R}_+$ hội tụ đến 0 và $x_n^* = (x_n, \lambda_n) \in \widetilde{\Psi}(\varepsilon_n)$, ta có

$$\begin{aligned}
&d(x_n, K_1(x_n, \lambda_n)) \leq \varepsilon_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},\\
&f(x_n, y, \lambda_n) + \varepsilon_n e_1(x_n) \in C_1(x_n), \forall y \in K_2(x_n, \lambda_n) \text{ và}\\
&h(x_n^*, y^*) + \varepsilon_n e_2(x_n^*) \in C_2(x_n^*), \forall y^* = (y, \lambda) \in \text{graph}S^{-1}.
\end{aligned}$$

Vì vậy, $\{x_n^*\}$ là dãy xấp xỉ Levitin-Polyak của (MBEP). Từ tính đặt chỉnh Levitin-Polyak tổng quát của (MBEP), tồn tại một dãy con $\{x_{n_k}^*\}$ của $\{x_n^*\}$ hội tụ đến một số điểm của $x_0^* \in \Psi = \widetilde{\Psi}(0)$. Vì vậy, $\widetilde{\Psi}$ nửa liên tục trên tại 0. $\square$

Kết hợp Định lý 3.2.8 và Định lý 3.2.9, ta nhận được mối quan hệ giữa đặt chỉnh Levitin-Polyak và sự tồn tại nghiệm của (MBEP).

3.2.10 Định lý. *Giả sử rằng tất cả các giả thiết của Định lý 3.2.8 thỏa mãn. Khi đó,*

(i) *Bài toán* (MBEP) *là đặt chỉnh Levitin-Polyak tổng quát khi và chỉ khi* Ψ *là khác rỗng.*

(ii) *Bài toán* (MBEP) *là đặt chỉnh Levitin-Polyak khi và chỉ khi* Ψ *là đơn phần tử.*

Bây giờ, chúng ta trình bày đặc trưng mêtric cho tính đặt chỉnh Levitin-Polyak về dáng điệu của tập nghiệm xấp xỉ mà không cần tính compắc của A và Λ.

3.2.11 Định lý. *Giả sử rằng tất cả các giả thiết* (i)-(iv) *của Định lý 3.2.8 thỏa mãn. Khi đó, bài toán* (MBEP) *là đặt chỉnh Levitin-Polyak khi và chỉ khi*

$$\widetilde{\Psi}(\varepsilon) \neq \emptyset, \forall \varepsilon \geq 0 \quad \textit{và} \quad \mathrm{diam}\widetilde{\Psi}(\varepsilon) \to 0 \ \ \textit{khi} \ \ \varepsilon \to 0.$$

Chứng minh. Giả sử bài toán (MBEP) là đặt chỉnh Levitin-Polyak. Khi đó, $\Psi = \{x_0^*\}$, vì vậy $\widetilde{\Psi}(\varepsilon) \neq \emptyset$ với mọi $\varepsilon \geq 0$. Nếu $\mathrm{diam}\widetilde{\Psi}(\varepsilon) \not\to 0$ khi $\varepsilon \to 0$ khi đó tồn tại $\rho > 0$ và $\varepsilon_n \geq 0$ hội tụ đến 0 sao cho $\mathrm{diam}\widetilde{\Psi}(\varepsilon_n) > \rho$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Khi đó, tồn tại $x_n^{*1} = (x_n^1, \lambda_n^1), x_n^{*2} = (x_n^2, \lambda_n^2)$ thuộc $\widetilde{\Psi}(\varepsilon_n)$ sao cho $d((x_n^{*1}, x_n^{*2}) > \frac{\rho}{2}$. Từ định nghĩa của $\widetilde{\Psi}(\varepsilon_n)$, x_n^{*1} và x_n^{*2} cũng là dãy xấp xỉ Levitin-Polyak của (MBEP). Do đó, hai dãy $\{x_n^{*1}\}$ và $\{x_n^{*2}\}$ hội tụ đến nghiệm duy nhất x_0^* của (MBEP), điều này mâu thuẫn với thực tế rằng $d(x_n^{*1}, x_n^{*2}) > \frac{\rho}{2} > 0$ với mọi n.

Ngược lại, lấy $\{x_n^*\} = \{(x_n, \lambda_n)\}$ là một dãy xấp Levitin-Polyak của

(MBEP). Khi đó, tồn tại $\{\varepsilon_n\} \subset \mathbb{R}_+$ hội tụ đến 0 sao cho

$$\begin{aligned}
&d(x_n, K_1(x_n, \lambda_n)) \leq \varepsilon_n,\\
&f(x_n, y, \lambda_n) + \varepsilon_n e_1(x_n) \in C_1(x_n), \forall y \in K_2(x_n, \lambda_n) \text{ và}\\
&h(x_n^*, y^*) + \varepsilon_n e_2(x_n^*) \in C_2(x_n^*), \forall y^* \in \text{graph}S^{-1}.
\end{aligned}$$

Điều này suy ra rằng $x_n^* \in \widetilde{\Psi}(\varepsilon_n)$. Từ $\text{diam}\widetilde{\Psi}(\varepsilon_n) \to 0$ khi $\varepsilon_n \to 0$, $\{x_n^*\}$ là một dãy Cauchy. Do đó, $\{x_n^*\}$ hội tụ đến một số điểm $x_0^* \in A \times \Lambda$. Sử dụng lý luận như đã đưa ra trong chứng minh của Định lý 3.2.8, chúng ta cũng nhận được $x_0^* \in \Psi$.

Cuối cùng, ta chứng minh rằng Ψ là đơn phần tử. Nếu Ψ có hai nghiệm phân biệt x_1^* và x_2^*, khi đó $x_1^*, x_2^* \in \widetilde{\Psi}(\varepsilon)$ với mọi $\varepsilon \geq 0$. Ta có

$$0 < d(x_1^*, x_2^*) \leq \text{diam}\widetilde{\Psi}(\varepsilon) \to 0,$$

điều này là không thể. Vì vậy, bài toán (MBEP) là đặt chỉnh Levitin-Polyak. □

Bây giờ, chúng ta nghiên cứu bài toán mạng giao thông với ràng buộc cân bằng như là phần ứng dụng.

Đầu tiên, chúng ta nhắc lại mô hình bài toán mạng giao thông đã được nghiên cứu bởi nhiều tác giả như Wardrop ([70]), Smith ([66]) De Luca ([27]), Anh và Khanh ([9]). Cho một mạng giao thông $L = (N, A)$, trong đó N là các nút mạng (ngã tư, sân bay, nhà ga,...) và A là các đường liên kết. Đặt $Q = (Q_1, Q_2, ..., Q_n)$ là tập các cặp gốc-đích (viết tắt là cặp O/D). Giả sử rằng một cặp $Q_i, i = 1, 2, ..., n$ là được kết nối bởi một tập các đường S_i, trong đó S_i chứa $s_i \geq 1$ đường. Đặt $F = (F_1, F_2, ..., F_m)$ là biểu thị cho dòng véctơ, trong đó $m = \sum_{i=1}^n s_i$. Khả năng thông xe của đường và điều kiện ràng buộc là

$$F \in C = \{F \in \mathbb{R}^m : 0 \leq \omega_p \leq F_p \leq \Omega_p, p = 1, 2, ..., m\},$$

trong đó ω_p và Ω_p là các số thực, $C \subset \mathbb{R}^m$ là khác rỗng. Giả sử phí vận chuyển trên đường $F_p, p = 1, 2, ..., m$, phụ thuộc trên toàn bộ dòng véctơ F là $T_p(F, \lambda) \geq 0$ với $\lambda \in \Lambda$ là tham số nhiễu. Khi đó, chi phí trên đường là

$$T(F, \lambda) = (T_1(F, \lambda), T_2(F, \lambda), ..., T_m(F, \lambda)).$$

Một dòng véctơ H được gọi là dòng cân bằng nếu

$\forall Q_i, \forall \xi \in S_i, \forall \tau \in S_i$ sao cho

$$[T_\xi(H, \lambda) < T_\tau(H, \lambda)] \Rightarrow [H_\xi = \Omega_\xi \text{ hoặc } H_\tau = \omega_\tau].$$

Giả sử nhu cầu vận chuyển ψ_i của cặp O/D, $Q_i, i = 1, 2, ..., n$ phụ thuộc trên $\lambda \in \Lambda$ và cũng phụ thuộc trên dòng cân bằng H. Do đó, xét tất cả các cặp O/D, ta có ánh xạ $\psi : \mathbb{R}^m_+ \times \Lambda \to \mathbb{R}^n_+$. Chúng ta sử dụng khái niệm Kronecker

$$\phi_{i\tau} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } \tau \in S_i, \\ 0 & \text{nếu } \tau \notin S_i. \end{cases}$$

và

$$\phi = \{\phi_{i\tau}\}, \quad i = 1, 2, ..., n, \text{ và } \tau = 1, 2, ..., m.$$

Khi đó, các dòng đáp ứng nhu cầu được gọi là dòng chấp nhận được là tập

$$K(H, \lambda) = \{F \in C \mid \phi F = \psi(H, \lambda)\}.$$

3.2.12 Bổ đề. ([11, Lemma 5.2]) *Một dòng véctơ $H \in K(H, \lambda)$ là dòng cân bằng khi và chỉ khi nó là nghiệm của bài toán bất đẳng thức tựa biến phân sau đây*

(TN) *Tìm $H \in K(H, \lambda)$ sao cho*

$$\langle T(H, \lambda), F - H \rangle \geq 0, \forall F \in K(H, \lambda).$$

Cho $X = W = \mathbb{R}^m, Z = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}, C_2(H^*) = \mathbb{R}_+, K_1(H, \lambda) = K_2(H, \lambda) = K(H, \lambda)$ và $A, Y, \Lambda, C_1(H)$, e_1 như bài toán (MBEP). Lấy

$T : B \to L(X \times W; Y)$ là hàm véctơ. Chúng ta xét *bài toán mạng giao thông với ràng buộc cân bằng* sau.
(TNEC) Tìm $\bar{H}^* \in \text{graph}S^{-1}$ sao cho

$$\langle T(\bar{H}^*), F^* - \bar{H}^* \rangle \geq 0, \forall F^* = (F, \lambda) \in \text{graph}S^{-1},$$

trong đó $S(\lambda)$ là tập nghiệm của (MSQEP).
Ký hiệu tập nghiệm của (TNEC) bởi Φ, nghĩa là,

$$\Phi = \{\bar{H}^* \in \text{graph}S^{-1} \mid \langle T(\bar{H}^*), F^* - \bar{H}^* \rangle \geq 0,\ \forall F^* \in \text{graph}S^{-1}\}.$$

3.2.13 Định nghĩa. Một dãy $\{H_n^*\} := \{(H_n, \lambda_n)\}$ được gọi là *dãy xấp xỉ Levitin-Polyak* cho (TNEC) nếu

(i) $\{H_n^*\} := \{(H_n, \lambda_n)\} \subset A \times \Lambda, \forall n \in \mathbb{N}$;

(ii) Tồn tại một dãy $\{\varepsilon_n\} \subset \mathbb{R}_+$ hội tụ về 0 sao cho

$$\begin{aligned}
&d(H_n, K(H_n, \lambda_n)) \leq \varepsilon_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},\\
&f(H_n, F, \lambda_n) + \varepsilon_n e_1(H_n) \in C_1(H_n), \forall F \in K(H_n, \lambda_n),\\
&\langle T(H_n^*), F^* - H_n^* \rangle + \varepsilon_n \geq 0, \forall F^* \in \text{graph}S^{-1}.
\end{aligned}$$

3.2.14 Định nghĩa. Bài toán (TNEC) được gọi là *đặt chỉnh Levitin-Polyak* nếu

(i) Bài toán (TNEC) có nghiệm duy nhất H_0^*;

(ii) Mỗi dãy xấp xỉ Levitin-Polyak $\{H_n^*\}$ cho (TNEC) hội tụ đến nghiệm duy nhất H_0^*.

3.2.15 Định nghĩa. Bài toán (TNEC) được gọi là *đặt chỉnh Levitin-Polyak tổng quát* nếu

(i) Tập nghiệm Φ của (TNEC) khác rỗng;

(ii) Với mọi dãy xấp xỉ Levitin-Polyak $\{H_n^*\}$ cho (TNEC), tồn tại một dãy con hội tụ đến một số điểm của Φ.

Với $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, chúng ta ký hiệu tập nghiệm xấp xỉ của (TNEC) bởi

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}(\varepsilon) := \{H^* \in \text{graph}S^{-1} \mid d(H, K(H,\lambda)) \leq \varepsilon,\\ f(H,F,\lambda) + \varepsilon e_1(H) \in C_1(H), \forall F \in K(H,\lambda),\\ \langle T(H^*), F^* - H^* \rangle + \varepsilon \geq 0,\ \forall F^* \in \text{graph}S^{-1}\}.\end{aligned}$$

Bây giờ, chúng ta nhắc lại một số kết quả quan trọng sau đây.

3.2.16 Bổ đề. ([9, Lemma 3.3]) *Giả sử rằng $K(H,\lambda)$ là giá trị compắc và ψ là liên tục. Khi đó, K là liên tục.*

Từ các kết quả trên ta nhận được các hệ quả sau:

3.2.17 Hệ quả. *Với bài toán* (TNEC)*, ta giả sử rằng*

(i) *ψ là liên tục*;

(ii) *f là C_1-nửa liên tục trên*;

(iii) *Hàm $(H^*, F^*) \longmapsto \langle T(H^*), F^* - H^* \rangle$ là nửa liên tục trên.*

Khi đó, bài toán (TNEC) *là đặt chỉnh Levitin-Polyak tổng quát khi và chỉ khi $\widetilde{\Phi}$ là nửa liên tục trên tại* 0 *và có giá trị compắc.*

Chứng minh. Đặt $X = W = \mathbb{R}^m, Z = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}, C_2(H^*) = \mathbb{R}_+$, $K_1(H,\lambda) = K_2(H,\lambda) = K(H,\lambda)$, $h(H^*, F^*) = \langle T(H^*), F^* - H^* \rangle$, bài toán (TNEC) trở thành một trường hợp đặc biệt của (MBEP). □

3.2.18 Hệ quả. *Giả sử rằng tất cả các điều kiện trong Hệ quả 3.2.17 được thỏa mãn. Khi đó,* (TNEC) *là đặt chỉnh Levitin-Polyak khi và chỉ khi*

$$\widetilde{\Phi}(\varepsilon) \neq \emptyset, \forall \varepsilon \geq 0 \ \text{ và } \ \text{diam}\widetilde{\Phi}(\varepsilon) \to 0 \ \text{ khi } \ \varepsilon \to 0.$$

3.3 Kết luận Chương 3

Trong Chương 3, chúng tôi đã đạt được những kết quả sau đây:

- Thiết lập bài toán cân bằng hai mức véctơ phụ thuộc tham số (MBEP). Sau đó, chúng tôi khảo sát các tính nửa liên tục và liên tục của chúng (Định lý 3.1.1, Định lý 3.1.5, Định lý 3.1.8, Định lý 3.1.12 và Định lý 3.1.14).

- Từ các kết quả trong Mục 3.1, chúng tôi áp dụng cho bất đẳng thức biến phân với ràng buộc cân bằng và bài toán tối ưu với ràng buộc cân bằng (Hệ quả 3.1.15 và Hệ quả 3.1.17).

- Thiết lập bài toán cân bằng hai mức véctơ với nón di động (MBEP). Sau đó, chúng tôi nghiên cứu mối quan hệ của tính đặt chỉnh với tính nửa liên tục trên của nghiệm xấp xỉ và sự tồn tại nghiệm (Định lý 3.2.8, Định lý 3.2.9 và Định lý 3.2.10) và thiết lập tính đặt chỉnh Levitin-Polyak và đặt chỉnh Levitin-Polyak tổng quát (Định lý 3.2.11).

- Từ các kết quả chính trong Mục 3.2, chúng tôi áp dụng cho bài toán mạng giao thông với ràng buộc cân bằng. Các kết quả thu được là Hệ quả 3.2.17 và Hệ quả 3.2.18.

Các kết quả trên đã được trích ra từ các bài báo:

1. L. Q. Anh and N. V. Hung (2018), Stability of solution mappings for parametric bilevel vector equilibrium problems, *Computational and Applied Mathematics*, **37**, 1537–1549.

2. L. Q. Anh and N. V. Hung (2018), Levitin-Polyak well-posedness for strong bilevel vector equilibrium problems and applications to traffic network problems with equilibrium constraints, *Positivity*, **22**, 1223–1239.

KẾT LUẬN CHUNG VÀ KIẾN NGHỊ

I. Kết luận chung

Luận án nghiên cứu về tính chất của tập nghiệm như tính liên tục, tính hội tụ, tính ổn định và đặt chỉnh cho một số bài toán liên quan đến tối ưu bao gồm bài toán cân bằng, bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán cân bằng hai mức, bài toán bất đẳng thức biến phân với ràng buộc cân bằng, bài toán tối ưu với ràng buộc cân bằng và bài toán mạng giao thông với ràng buộc cân bằng. Kết quả đạt được trong luận án này là.

1. Thiết lập được các hàm đánh giá cho các bài toán tựa cân bằng (QEP_1) và (QEP_2). Trên cơ sở hàm đánh giá, chúng tôi thiết lập giả thiết căn bản (H_p) và (H_h). Sau đó, chúng tôi nghiên cứu các tính chất liên tục của ánh xạ nghiệm cho các bài toán này. Trong mục áp dụng, chúng tôi nghiên cứu bài toán bất đẳng thức tựa biến phân loại Minty và Stampacchia (MQVI) và (SQVI).

2. Thiết lập được các dãy hàm đánh giá cho các bài toán tựa cân bằng (QEP) và (QEP_n) và khảo sát tính liên tục của chúng. Nghiên cứu tính hội tụ trên, hội tụ dưới và hội tụ theo nghĩa Painlev*é* - Kuratowski của tập nghiệm của bài toán (QEP) và (QEP_n) trên cơ sở giả thiết căn bản (H_h). Trong phần áp dụng, chúng tôi cũng thiết lập và nghiên cứu cho dãy bài toán bất đẳng thức tựa biến phân loại (QVI) và $(\mathrm{QVI})_n$.

3. Thu được các kết quả là các tính nửa liên tục và liên tục của bài

toán cân bằng hai mức véctơ, bài toán bất đẳng thức biến phân với ràng buộc cân bằng và bài toán tối ưu với ràng buộc cân bằng.

4. Nghiên cứu mối quan hệ của tính đặt chỉnh với tính nửa liên tục trên của nghiệm xấp xỉ của bài toán cân bằng hai mức véctơ với nón di động và mô tả mêtric các đặt chỉnh Levitin-Polyak và đặt chỉnh Levitin-Polyak tổng quát cho bài toán này. Bài toán mạng giao thông với ràng buộc cân bằng là cũng được chúng tôi nghiên cứu trong mục áp dụng.

II. Kiến nghị

Trong thời gian tới, chúng tôi mong muốn tiếp tục nghiên cứu các vấn đề sau:

1. Nghiên cứu về sự tồn tại nghiệm cho các bài toán liên quan đến tối ưu như bài toán mạng giao thông, bài toán tối ưu, bài toán cân bằng, bài toán bao hàm biến phân, bài toán quan hệ biến phân và các bài toán hai mức tương ứng.

2. Nghiên cứu tính chất ổn định nghiệm cho một số bài toán liên quan đến tối ưu với các giả thiết yếu hơn.

3. Nghiên cứu các dạng hội tụ khác nhau cho một số bài toán liên quan đến tối ưu bằng việc sử dụng các loại hội tụ của các dãy tập và dãy hàm khác nhau.

4. Nghiên cứu tính đặt chỉnh cho các bài toán lớn hơn như bài toán bao hàm biến phân và bài toán quan hệ biến phân với một số giả thiết phù hợp.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

1. L. Q. Anh and N. V. Hung (2018), Gap functions and Hausdorff continuity of solution mappings to parametric strong vector quasiequilibrium problems, *Journal of Industrial and Management Optimization*, **14**, 65-79. (SCI-E)

2. L. Q. Anh and N. V. Hung (2018), Stability of solution mappings for parametric bilevel vector equilibrium problems, *Computational and Applied Mathematics*, **37**, 1537–1549. (SCI-E)

3. L. Q. Anh, T. Bantaojai, N. V. Hung, V. M. Tam and R. Wangkeeree (2018), Painlevé-Kuratowski convergences of the solution sets for generalized vector quasiequilibrium problems, *Computational and Applied Mathematics*, **37**, 3832–3845. (SCI-E)

4. L. Q. Anh and N. V. Hung (2018), Levitin-Polyak well-posedness for strong bilevel vector equilibrium problems and applications to traffic network problems with equilibrium constraints, *Positivity*, **22**, 1223–1239. (SCI-E)

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] L. Q. Anh and D. V. Hien (2016), On well-posedness for parametric vector quasiequilibrium problems with moving cones, *Appl. Math.,* **61**, 651–668.

[2] L. Q. Anh and N. V. Hung (2018), Gap functions and Hausdorff continuity of solution mappings to parametric strong vector quasiequilibrium problems, *J. Ind. Manag. Optim.,* **14**, 65–79.

[3] L. Q. Anh and N. V. Hung (2018), Stability of solution mappings for parametric bilevel vector equilibrium problems, *Comp. Appl. Math.,* **37**, 1537–1549.

[4] L. Q. Anh and N. V. Hung (2018), Levitin-Polyak well-posedness for strong bilevel vector equilibrium problems and applications to traffic network problems with equilibrium constraints, *Positivity*, **22**, 1223–1239.

[5] L. Q. Anh, T. Bantaojai, N. V. Hung, V. M. Tam and R. Wangkeeree (2018), Painlevé-Kuratowski convergences of the solution sets for generalized vector quasiequilibrium problems, *Comp. Appl. Math.,* **37**, 3832–3845.

[6] L. Q. Anh and P. Q. Khanh (2004), Semicontinuity of the solution sets of parametric multivalued vector quasiequilibrium problems, *J. Math. Anal. Appl.,* **294**, 699–711.

[7] L. Q. Anh and P. Q. Khanh (2006), On the Hölder continuity of solutions to parametric multivalued vector equilibrium problems, *J. Math. Anal. Appl.,* **321**, 308–315.

[8] L. Q. Anh and P. Q. Khanh (2007), On the stability of the solution sets of general multivalued vector quasiequilibrium problems, *J. Optim. Theory Appl.,* **135**, 271–284.

[9] L. Q. Anh and P. Q. Khanh (2008), Semicontinuity of solution sets to parametric quasivariational inclusions with applications to traffic networks II: Lower semicontinuities, *Set-Valued Anal.,* **16**, 943–960.

[10] L. Q. Anh, P. Q. Khanh, D. T. M. Van and J. C. Yao (2009), Well-posedness for vector quasiequilibria, *Taiwanese J. Math.*, **13**, 713–737.

[11] L. Q. Anh and P. Q. Khanh (2010), Continuity of solution maps of parametric quasiequilibrium problems, *J. Global Optim.,* **46**, 247–259.

[12] L. Q. Anh, P. Q. Khanh and D. T. M. Van (2012), Well-posedness under relaxed semicontinuity for bilevel equilibrium and optimization problems with equilibrium constraints, *J. Optim. Theory Appl.,* **153**, 42–59.

[13] A. Auslender (1976), *Optimisation:* Méthodes Numériques, Masson, Paris.

[14] D. Aussel and J. Dutta (2011), On gap functions for multivalued stampacchia variational inequalities, *J. Optim. Theory Appl.,* **149**, 513–527.

[15] J. P. Aubin and I. Ekeland (1984), *Applied Nonlinear Analysis*, John Wiley and Sons, New York.

[16] J. P. Aubin and H. Frankowaska (1990), *Set-Valued Analysis.* Birkhäuser, Boston.

[17] T. Q. Bao and B. S. Mordukhovich (2007), Necessary conditions in multiobjective optimization with equilibrium constraints, *J. Optim. Theory Appl.,* **135**, 179–203.

[18] M. Bianchi and S. Schaible (1996), Generalized monotone bifunctions and equilibrium problems, *J. Optim. Theory Appl.,* **90**, 31–43.

[19] E. Blum and W. Oettli (1994), From optimization and variational inequalities to equilibrium problems, *Math. Student,* **63**, 123–145.

[20] O. Chadli, Q. H. Ansari and S. Al-Homidan (2017), Existence of solutions and algorithms for bilevel vector equilibrium problems: An auxiliary principle technique, *J. Optim. Theory Appl.,* **172**, 726–758.

[21] G. Y. Chen, X. X. Huang, X. Q. Yang (2005), Vector Optimization: *Set-Valued and Variational Analysis*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 541, Springer, Berlin.

[22] C. R. Chen and S. J. Li (2007), Semicontinuity of the solution set map to a set-valued weak vector variational inequality, *J. Ind. Manag. Optim.,* **3**, 519–528.

[23] C. R. Chen, S. J. Li and Z. M. Fang (2010), On the solution semicontinuity to a parametric generalized vector quasivariational inequality, *Comput. Math. Appl.,* **60**, 2417–2425.

[24] J. W. Chen, Z. P. Wan and Y. J. Cho (2013), The existence of solutions and well-posedness for bilevel mixed equilibrium problems in Banach spaces, *Taiwanese J. Math.,* **17**, 725–748.

[25] J. W. Chen, Z. P. Wan and Y. Z. Zou (2014), Bilevel invex equilibrium problems with applications, *Optim. Lett.,* **8**, 447–461.

[26] J. W. Chen and Z. P. Wan (2014), Semicontinuity for parametric Minty vector quasivariational inequalities in Hausdorff topological vector spaces, *Comput. Appl. Math.,* **33**, 111–129.

[27] M. De Luca (1995), *Generalized quasi-variational inequalities and traffic equilibrium problem.* In: F. Giannessi, A. Maugeri (Eds.), Variational Inequalities and Networks Equilibrium Problems. Plenum Press, New York.

[28] X. P. Ding (2012), Existence and iterative algorithm of solutions for a class of bilevel generalized mixed equilibrium problems in Banach spaces, *J. Global Optim.,* **53**, 525–537.

[29] P. M. Duc and L. D. Muu (2016), A splitting algorithm for a class of bilevel equilibrium problems involving nonexpansive mappings, *Optimization,* **65**, 1855–1866.

[30] M. Durea (2007), On the existence and stability of approximate solutions of perturbed vector equilibrium problems, *J. Math. Anal. Appl.,* **333**, 1165–1179.

[31] Y. P. Fang and R. Hu (2007), Parametric well-posedness for variational inequalities defined bifunctions, *Comput. Math. Appl.,* **53**, 1306–1316.

[32] Y. P. Fang, R. Hu and N. J. Huang (2008). Well-posedness for equilibrium problems and for optimization problems with equilibrium constraints, *Comput. Math. Appl.,* **55**, 89–100.

[33] Z. M. Fang and S. J. Li (2012), Painlevé-Kuratowski convergences of the solution sets for perturbed generalized systems, *Acta Math. Appl. Sin. Engl. Ser.,* **28**, 361–370.

[34] Z. M. Fang, S. J. Li and K. L. Teo (2008), Painlevé-Kuratowski convergences for the solution sets of set-valued weak vector variational inequalities. *J. Inequal. Appl.,* **ID43519**, 1–14.

[35] M. Fukushima (1992), Equivalent differentiable optimization problems and descent methods for asymmetric variational inequality problems, *Math. Program.,* **53**, 99–110.

[36] Chr. (Tammer) Gerstewitz (1983), *Nichtkonvexe dualitat in der vektaroptimierung*, Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule Leuna-Mersebung, **25**, 357–364.

[37] F. Giannessi (1998), *On Minty variational principle*, *New Trends in Mathematical Programming*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, **13**, 93–99.

[38] N. X. Hai and P. Q. Khanh (2007), Existence of solutions to general quasi-equilibrium problems and applications, *J. Optim. Theory Appl.,* **133**, 317–327.

[39] N. X. Hai, P. Q. Khanh and N. H. Quan (2009), On the existence of solutions to quasivariational inclusion problems, *J. Glob. Optim.,* **45**, 565–581.

[40] F. Hausdorff (1957), *Set Theory*, Chelsea, New York.

[41] X. X. Huang and X. Q. Yang (2006), Generalized Levitin-Polyak well-posedness in constrained optimization, *SIAM J. Optim.,* **17**, 243–258.

[42] R. Hu and Y. P. Fang (2010), Levitin-Polyak well-posedness of variational inequalities, *Nonlinear Anal.,* **72**, 373–381.

[43] G. Kassay, J. Kolumbán and Z. Páles (2002), Factorization of Minty and Stampacchia variational inequality systems, *European J. Oper. Res.,* **143**, 377–389.

[44] P. Q. Khanh and L. M. Luu (2007), Lower and upper semicontinuity of the solution sets and approximate solution sets to parametric multivalued quasivariational inequalities, *J. Optim. Theory Appl.,* **133**, 329–339.

[45] P. Q. Khanh and D. T. Luc (2008), Stability of solutions in parametric variational relation problems, *Set-Valued Anal.,* **16**, 101–1035.

[46] P. Q. Khanh, S. Plubtieng and K. Sombut (2014), Levitin-Polyak well-posedness for bilevel vector equilibrium and optimization problems with equilibrium constraints, *Abstr. Appl. Anal.,* **2014**, 1–7.

[47] B. T. Kien (2005), On the lower semicontinuity of optimal solution sets, *Optimization,* **54**, 123–130.

[48] S. Komlósi (1999), *On the Stampacchia and Minty Variational Inequalities*, in: G. Giorgi, F.A. Rossi (Eds.), Generalized Convexity and Optimization for Economic and Financial Decisions, Pitagora Editrice, Bologna.

[49] C. S. Lalitha and G. Bhatia (2011), Stability of parametric quasivariational inequality of the Minty type, *J. Optim. Theory. Appl.,* **148**, 281–300.

[50] C. S. Lalitha and P. Chatterjee (2015), Stability and scalarization in vector optimization using improvement sets, *J. Optim. Theory Appl.,* **166**, 825–843.

[51] E. S. Levitin and B. T. Polyak (1966), Convergence ofminimizing sequences in conditional extremum problem, *Soiviet Math. Doklady,* **7**, 764–767.

[52] S. J. Li and C. R. Chen (2009), Stability of weak vector variational inequality, *Nonlinear Anal.,* **70**, 1528–1535.

[53] X. B. Li, Z. Lin and Q. L. Wang (2016), Stability of approximate solution mappings for generalized Ky Fan inequality, *TOP*, **24**, 196–205.

[54] M. B. Lignola and J. Morgan (1999), Generalized variational inequalities with pseudomonotone operators under perturbations, *J. Optim. Theory Appl.,* **101**, 213–220.

[55] M. B. Lignola and J. Morgan (2000), Well-posedness for optimization problems with constraints defined by variational inequalities having a unique solution, *J. Glob. Optim.,* **16**, 57–67.

[56] M. B. Lignola and J. Morgan (2006), α-Well-posedness for Nash equilibria and for optimization problems with Nash equilibrium constraints, *J. Glob. Optim.,* **36**, 439–459.

[57] D. T. Luc (1989), *Theory of Vector Optimization*, Lecture Notes in Economic and Mathematical Systems 319, Springer-Verlag, Berlin.

[58] G. Mastroeni (2003), Gap functions for equilibrium problems, *J. Glob. Optim.,* **27**, 411–426.

[59] B. S. Mordukhovich (2004), Equilibrium problems with equilibrium constraints via multiobjective optimization, *Optim. Methods Softw.* **19**, 479–492.

[60] B. S. Mordukhovich (2009), Multiobjective optimization problems with equilibrium constraints, *Math. Program.,* **117**, 331–354.

[61] A. Moudafi (2010), Proximal methods for a class of bilevel monotone equilibrium problems, *J. Glob. Optim.,* **47**, 287–292.

[62] J. V. Outrata (2000), A generalized mathematical program with equilibrium constraints, *SIAM J. Control Optim.,* **38**, 1623–1638.

[63] J. W. Peng, S. Y. Wu and Y. Wang (2012), Levitin-Polyak well-posedness of generalized vector quasi-equilibrium problems with functional constraints, *J. Glob. Optim.,* **52**, 779–795.

[64] Z. Y. Peng and X. M. Yang (2014), Painlevé-Kuratowski convergences of the solution sets for perturbed vector equilibrium problems without monotonicity, *Acta Math. Appl. Sin Engl. Ser.,* **30**, 845–858.

[65] R. T. Rockafellar and R. J-B. Wets (1998), *Variational Analysis.* Springer, Berlin.

[66] M. J. Smith (1979), The existence, uniqueness and stability of traffic equilibrium, *Trans. Res.,* **138**, 295–304.

[67] T. Tanaka (1997), Generalized semicontinuity and existence theorems for cone saddle points, *Appl. Math. Optim.,* **36**, 313–322.

[68] T. Tanaka and D. Kuroiwa (1993), The convexity of A and B assures int A + B = int(A + B), *Appl. Math. Lett.*, **6**, 83–86

[69] A. N. Tikhonov (1966), On the stability of the functional optimization problem, *Soviet Comput. Math. Math. Phys.,* **6**, 28–33.

[70] J. G. Wardrop (1952), Some theoretical aspects of road traffic research. Proceedings of the Institute of Civil Engineers, **II**, 325–378.

[71] E. S. Wolk (1975), Continuous convergence in partially ordered sets, *General Topology Appl.,* **5**, 221–234

[72] N. Yamashita and M. Fukushima (1997), Equivalent unconstraint minimization and global error bounds for variational inequality problems, *SIAM J. Control Optim.,* **35**, 273–284.

[73] J. J. Ye and Q. J. Zhu (2003), Multiobjective optimization problems with variational inequality constraints, *Math. Program.,* **96**, 139–160.

[74] J. Zhao (1997), The lower semicontinuity of optimal solution sets, *J. Math. Anal. Appl.,* **207**, 240–254.

[75] Y. Zhao, Z. Y. Peng and X. M. Yang (2015), Painlevé-Kuratowski convergences of the solution sets for perturbed generalized systems, *J Nonlinear Convex Anal.,* **15**, 1249–1259.

[76] R. Y. Zhong and N. J. Huang (2011), Lower semicontinuity for parametric weak vetor variational inequalities in reflexive Banach spaces, *J. Optim. Theory Appl.,* **150**, 317–326.

[77] R. Y. Zhong and N. J. Huang (2012), On the stability of solution mapping for parametric generalized vector quasiequilibrium problems, *Comput. Math. Appl.,* **63**, 807–815.