BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

NGUYỄN VĂN HƯNG

TÍNH LIÊN TỤC CỦA ÁNH XẠ NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN CÂN BẰNG

Chuyên ngành: Toán Giải tích

Mã số: 9 46 01 02

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

NGHỆ AN - 2018

Luận án được hoàn thành tại Trường Đại học Vinh

Tập thể hướng dẫn khoa học:

1. **PGS. TS. Lâm Quốc Anh**
2. **PGS.TS. Đinh Huy Hoàng**

Phản biện 1:

Phản biện 2:

Phản biện 3:

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp Trường

họp tại Trường Đại học Vinh

vào hồi ..... ngày .... tháng ..... năm .....

Có thể tìm hiểu luận án tại:

1. Thư viện Nguyễn Thúc Hào, Trường Đại học Vinh
2. Thư Viện Quốc gia Việt Nam

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

1.1. Tính chất ổn định nghiệm của bài toán liên quan đến tối ưu bao gồm tính nửa liên tục, liên tục, liên tục Hölder và liên tục Lipschitz là một trong những chủ đề quan trọng trong lý thuyết tối ưu và ứng dụng. Trong những thập kỷ gần đây, đã có nhiều công trình nghiên cứu về điều kiện ổn định nghiệm cho những bài toán liên quan đến tối ưu như bài toán tối ưu, bất đẳng thức biến phân, bài toán cân bằng, bài toán quan hệ biến phân. Chúng ta biết rằng tính ổn định nghiệm theo nghĩa nào thì dữ liệu bài toán cũng thường phải giả thiết theo nghĩa đó. Trong thực tế, có nhiều nhiều bài toán mà các giả thiết chặt quá về dữ liệu không được thỏa mãn. Vì vậy, tính ổn định nghiệm theo nghĩa nửa liên tục của tập nghiệm được quan tâm nghiên cứu.

1.2. Tính chất hội tụ của tập nghiệm của bài toán liên quan đến tối ưu theo nghĩa Painlevé-Kuratowski đóng một vai trò quan trọng trong lý thuyết ổn định nghiệm khi bài toán bị nhiễu bởi dãy các tập ràng buộc và dãy các hàm mục tiêu. Chủ đề về tính hội tụ của tập nghiệm theo nghĩa Painlevé-Kuratowski liên quan chặt chẽ đến thuật toán nghiệm và lý thuyết xấp xỉ. Vì vậy đã có nhiều công trình nghiên cứu về hội tụ Painlevé-Kuratowski của các tập nghiệm cho các bài toán liên quan đến tối ưu. Vì tính quan trọng của chủ đề về hội tụ theo nghĩa Painlevé-Kuratowski của tập nghiệm cho bài toán cân bằng nói riêng và các bài toán liên quan đến tối ưu nói chung, do đó chủ đề này đang được nhiều nhà toán học trong nước cũng như trên thế giới quan tâm nghiên cứu.

1.3. Tính đặt chỉnh của một bài toán liên quan đến tối ưu là một chủ đề quan trọng trong giải tích ổn định của lý thuyết tối ưu. Trong những năm gần đây, đã có nhiều công trình nghiên cứu về tính đặt chỉnh cho các lớp bài toán khác nhau như bài toán tối ưu, bất đẳng thức biến phân, bài toán cân bằng. Gần đây, Anh, Khanh và Van (năm 2012) đã thiết lập các điều kiện đủ cho tính đặt chỉnh của bài toán cân bằng hai mức và bài toán tối ưu với ràng buộc cân bằng với một số giả thiết của sự tồn tại nghiệm bởi sử dụng tính mức đóng và giả thiết giả đơn điệu. Tuy nhiên, tính đặt chỉnh và đặt chỉnh tổng quát theo nghĩa Levitin-Polyak cho bài toán cân bằng mạnh hai mức véctơ và bài toán mạng giao thông với ràng buộc cân bằng vẫn là chủ đề mở và đang được nhiều người quan tâm nghiên cứu. Với các lý do như trên, chúng tôi chọn chủ đề cho luận án là: "***Tính liên tục của ánh xạ nghiệm của bài toán cân bằng***".

2. Mục đích nghiên cứu

Mục đích của luận án này là thiết lập tính liên tục của ánh xạ nghiệm cho bài toán tựa cân bằng, khảo sát tính hội tụ theo nghĩa Painlevé-Kuratowski của tập nghiệm bài toán tựa cân bằng, nghiên cứu tính chất ổn định nghiệm và tính đặt chỉnh cho bài toán cân bằng hai mức. Ngoài ra, chúng tôi cũng thiết lập một số mô hình đặc biệt liên quan đến tối ưu như bất đẳng thức biến phân loại Minty và Stampacchia, bất đẳng thức biến phân với ràng buộc cân bằng, bài toán tối ưu với ràng buộc cân bằng và bài toán mạng giao thông với ràng buộc cân bằng.

3. Đối tượng nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của luận án là một số mô hình liên quan đến tối ưu như bài toán tựa cân bằng, bất đẳng thức biến phân loại Minty và Stampacchia, bài toán cân bằng hai mức, bất đẳng thức biến phân với ràng buộc cân bằng, bài toán tối ưu với ràng buộc cân bằng và bài toán mạng giao thông với ràng buộc cân bằng.

4. Phạm vi nghiên cứu

Luận án tập trung nghiên cứu tính ổn định nghiệm, tính hội tụ theo nghĩa Painlevé-Kuratowski và tính đặt chỉnh Levitin-Polyak cho một số bài toán liên quan đến tối ưu.

5. Phương pháp nghiên cứu

Trong luận án này, chúng tôi sử dụng phương pháp tiếp cận giải tích hàm, giải tích biến phân và lý thuyết tối ưu trong quá trình nghiên cứu.

6. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn

Kết quả của luận án góp phần làm phong phú hơn về tính chất ổn định nghiệm, tính hội tụ Painlevé-Kuratowski và tính đặt chỉnh trong lý thuyết tối ưu.

Luận án là một tài liệu tham khảo hữu ích cho sinh viên, học viên cao học và nghiên cứu sinh trong lĩnh vực lý thuyết tối ưu và ứng dụng.

7. Tổng quan và cấu trúc của luận án

7.1. Tổng quan một số vấn đề liên quan đến luận án

Một trong những lớp bài toán quan trọng thu hút được nhiều nhà toán học trong nước cũng như trên thế giới trong lý thuyết tối ưu đó là bài toán cân bằng. Lớp bài toán này chứa nhiều bài toán quan trọng liên quan đến tối ưu như bài toán bù, bài toán cân bằng Nash, bài toán điểm bất động và điểm trùng, bài toán mạng giao thông, bài toán tối ưu và bất đẳng thức biến phân. Trong suốt hai thập kỷ qua, đã có nhiều nhà toán học nghiên cứu bài toán cân bằng và bài toán liên quan với những chủ đề khác nhau

như tồn tại nghiệm, ổn định nghiệm, hội tụ, đặt chỉnh.

Chúng ta biết rằng, *hàm đánh giá* lần đầu tiên được giới thiệu bởi Auslender (năm 1976) cho bất đẳng thức biến phân vô hướng. Từ đó về sau, hàm đánh giá đã được nhiều tác giả phát triển và mở rộng cho các bài toán khác nhau như Fukushima (năm 1992), Mastroeni (năm 2003) và Yamashita và Fukushima (năm 1997). Một trong những ứng dụng hữu hiệu của hàm đánh giá là nghiên cứu tính ổn định nghiệm. Năm 1997, Zhao đã giới thiệu một giả thiết căn bản (H_1) cho bài toán tối ưu và chứng tỏ rằng (H_1) là một điều kiện cần và đủ cho tính nửa liên tục dưới Hausdorff của ánh xạ nghiệm cho bài toán này. Năm 2005, Kien cũng nghiên cứu bài toán tối ưu tương tự như Zhao và cũng chứng tỏ (H_1) là một điều kiện cần và đủ cho tính nửa liên tục dưới Hausdorff của ánh xạ nghiệm cho bài toán này nhưng với giả thiết yếu hơn. Xuất phát từ các ý tưởng trong công trình Zhao và Kien, Li và Chen (năm 2009), Chen và Li (năm 2007), Chen, Li và Fang (năm 2010) đã giới thiệu hàm đánh giá và giả thiết căn bản (H_g) cho bất đẳng thức biến phân véctơ và nhận được điều kiện đủ cho tính nửa liên tục dưới Hausdorff của ánh xạ nghiệm cho bài toán này. Năm 2011, Zhong và Huang đã chứng tỏ rằng giả thiết căn bản (H_g) là một điều kiện cần và đủ cho tính nửa liên tục dưới Hausdorff của ánh xạ nghiệm cho bất đẳng thức biến phân yếu trong không gian Banach. Gần đây, phương pháp hàm đánh giá và giả thiết căn bản (H_g) đã được nghiên cứu bởi Zhong và Huang (năm 2012) cho bài toán tựa cân bằng yếu. Hiện tại, chủ đề nghiên cứu tính ổn định nghiệm bằng phương pháp hàm đánh giá đang thu hút nhiều người nghiên cứu. Vì vậy, trong Chương 1 của luận án, chúng tôi nghiên cứu về tính liên tục của bài toán tựa cân bằng bằng việc sử dụng hàm đánh giá và giả thiết căn bản. Đầu tiên, chúng tôi giới thiệu hàm đánh giá phụ thuộc tham số cho bài toán tựa cân bằng mạnh và thiết lập tính liên tục của các hàm đánh giá này. Sau đó, trình bày hai giả thiết căn bản liên quan đến hàm đánh giá và chứng tỏ rằng các giả thiết này không chỉ là điều kiện cần mà còn là điều kiện đủ cho tính nửa liên tục dưới Hausdorff và liên tục Hausdorff của ánh xạ nghiệm cho các bài toán này. Cuối cùng, chúng tôi ứng dụng các kết quả trên cho bất đẳng thức tựa biến phân véctơ loại Minty và Stampacchia.

Năm 2007, Durea đã giới thiệu khái niệm xấp xỉ cực tiểu tập trong không gian định chuẩn và thiết lập khái niệm của nghiệm xấp xỉ cho bài toán cân bằng và nghiên cứu điều kiện ổn định theo nghĩa Painlevé-Kuratowski đến tập nghiệm xấp xỉ. Năm 2012, Fang và Li đã xét bài toán cân bằng tổng quát được nhiễu bởi một dãy các ánh xạ trong không gian véctơ tôpô Hausdorff lồi địa phương. Sử dụng giả thiết đơn điệu chặt, các tác giả đã nghiên cứu tính hội tụ theo nghĩa Painlevé-Kuratowski cho tập nghiệm hữu hiệu cho bài toán này. Sau đó, Peng và Yang (năm 2014), Zhao, Peng và Yang (năm 2015) đã cải thiện một số điều kiện về tính đơn điệu chặt đã được áp đặt trong Fang và Li và sử dụng chúng để nghiên cứu tính hội tụ Painlevé-Kuratowski của tập nghiệm hữu hiệu và

hữu hiệu yếu cho bài toán cân bằng. Gần đây, Li, Lin và Wang (năm 2016) đã sử dụng hội tụ liên tục của dãy hàm hai biến và dãy tập thiết lập tính hội tụ Painlevé-Kuratowski của tập nghiệm xấp xỉ khi chúng được nhiễu bởi dãy tập và dãy hàm hai biến. Chủ đề về tính hội tụ Painlevé-Kuratowski cho tập nghiệm của bài toán cân bằng véctơ bằng phương pháp hàm đánh giá đang rất được quan tâm nghiên cứu. Do đó, trong Chương 2, chúng tôi sẽ nghiên cứu về sự hội tụ Painlevé-Kuratowski của tập nghiệm bằng phương pháp hàm đánh giá cho bài toán tựa cân bằng véctơ. Đầu tiên, chúng tôi giới thiệu dãy hàm đánh giá cho bài toán này và thiết lập tính liên tục của chúng. Sau đó, chúng tôi khảo sát về tính tụ trên, hội tụ dưới và hội tụ theo nghĩa Painlevé-Kuratowski của tập nghiệm bài toán cân bằng bởi sử dụng phương pháp hàm đánh giá. Trong phần một áp dụng, chúng tôi nghiên cứu một trường hợp đặc biệt cho bất đẳng thức tựa biến phân.

Năm 1966, khái niệm đặt chỉnh lần đầu tiên được giới thiệu bởi Tikhonov cho bài toán tối ưu vô hướng không ràng buộc và được biết đến như là đặt chỉnh Tikhonov. Khái niệm này trên cơ sở sự tồn tại và duy nhất của nghiệm và hội tụ của mỗi dãy xấp xỉ cực tiểu đến nghiệm duy nhất. Tuy nhiên, trong nhiều tình huống thực tế các dãy xấp xỉ được thiết lập có thể bị hạn chế. Vì vậy, Levitin và Polyak (năm 1966) đã mở rộng khái niệm đặt chỉnh Tikhonov cho bài toán tối ưu ràng buộc và được biết đến như là khái niệm đặt chỉnh Levitin-Polyak. Từ đó về sau, đã có nhiều người quan tâm nghiên cứu tính đặt chỉnh Levitin-Polyak cho các mô hình bài toán khác nhau liên quan đến tối ưu như bài toán tối ưu, bất đẳng thức biến phân, bài toán cân bằng. Gần đây, Khanh, Plubtieng và Sombut (năm 2014) đã giới thiệu đặt chỉnh Levitin-Polyak cho bài toán cân bằng hai mức yếu và bài toán tối ưu với ràng buộc cân bằng. Sử dụng các tính mức đóng tổng quát, các tác giả đã nghiên cứu tính đặt chỉnh cho các bài toán này. Tuy nhiên, theo sự hiểu biết của chúng tôi, tính chất ổn định nghiệm và tính đặt chỉnh cho bài toán cân bằng hai mức mạnh, bài toán mạng giao thông với ràng buộc cân bằng, bất đẳng thức biến phân với ràng buộc cân bằng và bài toán tối ưu với ràng buộc cân bằng đang là vấn đề mở và đang thu hút nhiều người quan tâm nghiên cứu. Vì vậy, trong Chương 3, chúng tôi sẽ nghiên cứu tính ổn định nghiệm và tính đặt chỉnh Levitin-Polyak cho các bài toán cân bằng hai mức mạnh, bài toán mạng giao thông với ràng buộc cân bằng, bất đẳng thức biến phân với ràng buộc cân bằng và bài toán tối ưu với ràng buộc cân bằng. Đầu tiên, chúng tôi giới thiệu bài toán cân bằng hai mức véctơ mạnh và thiết lập các tính chất nửa liên tục và liên tục cho bài toán này. Sau đó, chúng tôi ứng dụng các kết quả này cho bất đẳng thức biến phân với ràng buộc cân bằng và bài toán tối ưu với ràng buộc cân bằng. Tiếp theo, chúng tôi giới thiệu bài toán cân bằng hai mức véctơ mạnh với nón di động. Sau đó, chúng tôi giới thiệu và nghiên cứu các khái niệm đặt chỉnh Levitin-Polyak và đặt chỉnh Levitin-Polyak tổng quát cho bài toán này. Chúng tôi nghiên cứu mối quan hệ của tính đặt chỉnh với tính nửa liên tục trên của nghiệm xấp

xỉ và sự tồn tại nghiệm và mô tả đặc trưng mêtric các đặt chỉnh Levitin-Polyak và đặt chỉnh Levitin-Polyak tổng quát cho bài toán này. Từ các kết quả chính này, chúng tôi áp dụng cho bài toán mạng giao thông với ràng buộc cân bằng.

7.2. Cấu trúc luận án

Ngoài những ký hiệu thường dùng trong luận án, Mở đầu, Kết luận chung và kiến nghị, Danh sách các bài báo của tác giả liên quan đến luận án và Tài liệu tham khảo, nội dung của luận án bao gồm ba chương. Chương 1 trình bày tính liên tục của ánh xạ nghiệm cho một số bài toán tựa cân bằng véctơ phụ thuộc tham số. Mục 1.1 trình bày lại một số khái niệm cơ bản trong giải tích đa trị được sử dụng trong luận án. Mục 1.2 giới thiệu hai bài toán tựa cân bằng véctơ phụ tham số dạng Minty và Stampacchia. Mục 1.3 dành cho việc thiết lập một số hàm đánh giá cho bài toán tựa cân bằng và nghiên cứu tính liên tục của chúng. Mục 1.4 nghiên cứu tính nửa liên tục trên, nửa liên tục dưới Hausdorff và liên tục Hausdorff cho ánh xạ nghiệm cho hai bài toán tựa cân bằng. Mục 1.5 thảo luận một số trường hợp đặc biệt như bất đẳng thức biến phân loại Minty và Stampacchia. Chương 2 trình bày tính hội tụ theo nghĩa Painlevé-Kuratowski của tập nghiệm cho bài toán cân bằng yếu. Mục 2.1 trình bày dãy các bài toán tựa cân bằng và thiết lập các dãy hàm đánh giá và tính liên tục của chúng cho bài toán tựa cân bằng. Mục 2.2 thiết lập các hội tụ trên, hội tụ dưới và hội tụ theo nghĩa Painlevé-Kuratowski của tập nghiệm bài toán tựa cân bằng bởi việc sử dụng phương pháp hàm đánh. Mục 2.3 trình bày các kết quả ứng dụng từ Mục 2.2 cho bất đẳng thức biến phân. Chương 3 trình bày tính ổn định nghiệm và tính đặt chỉnh cho bài toán cân bằng hai mức véctơ. Mục 3.1 thiết lập tính ổn định nghiệm bao gồm tính nửa liên tục trên, tính nửa liên tục dưới, tính nửa liên tục dưới Hausdorff, liên tục và liên tục Hausdorff cho bài toán cân bằng hai mức và ứng dụng cho bất đẳng thức biến phân với ràng buộc cân bằng, bài toán tối ưu với ràng buộc cân bằng. Mục 3.2 nghiên cứu tính đặt chỉnh Levitin-Polyak và đặt chỉnh Levitin-Polyak tổng quát cho bài toán cân bằng hai mức với nón di động và ứng dụng cho bài toán mạng giao thông với ràng buộc cân bằng.

CHƯƠNG 1

TÍNH LIÊN TỤC CỦA ÁNH XẠ NGHIỆM CHO BÀI TOÁN TỰA CÂN BẰNG

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu về tính liên tục của ánh xạ nghiệm cho bài toán tựa cân bằng. Đầu tiên, chúng tôi nhắc lại một số định nghĩa và tính chất cơ bản của giải tích đa trị có liên quan đến luận án. Tiếp theo, chúng tôi giới thiệu hàm đánh giá phụ thuộc tham số cho bài toán tựa cân bằng mạnh và thiết lập tính liên tục của các hàm đánh giá này. Sau đó, chúng tôi trình bày hai giả thiết căn bản liên quan đến hàm đánh giá và chứng tỏ rằng các giả thiết này là các điều kiện cần và đủ cho tính nửa liên tục dưới Hausdorff và liên tục Hausdorff của ánh xạ nghiệm cho các bài toán này. Cuối cùng, trong phần ứng dụng, chúng tôi nghiên cứu bất đẳng thức tựa biến phân loại Minty và Stampacchia.

1.1 Kiến thức chuẩn bị

Định nghĩa 1.1.1 Cho X và Y là hai tập, một quy luật cho tương ứng mỗi điểm $x \in X$ với một tập $F(x) \subset Y$ được gọi là *ánh xạ đa trị* F từ X vào Y, ký hiệu $F : X \rightrightarrows Y$.

Định nghĩa 1.1.3 Giả sử X, Y là hai không gian tôpô Hausdorff và $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị.

(i) F được gọi là *nửa liên tục trên* (viết tắt là usc) tại $x_0 \in \mathrm{dom}F$ nếu với mỗi lân cận mở V của $F(x_0)$, tồn tại lân cận U của x_0 sao cho $F(x) \subset V$ với mọi $x \in U$.

(ii) F được gọi là *nửa liên tục dưới* (viết tắt là lsc) tại $x_0 \in \mathrm{dom}F$ nếu với mỗi tập mở $V \subset Y$ thỏa mãn $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$, tồn tại lân cận U của x_0 sao cho $F(x) \cap V \neq \emptyset$ với mọi $x \in U$.

(iii) F được gọi là *liên tục* tại $x_0 \in \mathrm{dom}F$, nếu F là usc và lsc tại $x_0 \in \mathrm{dom}F$.

(iv) F được gọi là *đóng tại* $x_0 \in \mathrm{dom}F$ nếu với mỗi lưới $\{(x_\alpha, z_\alpha)\} \subset \mathrm{graph}F$ sao cho $(x_\alpha, z_\alpha) \to (x_0, z_0)$, thì $z_0 \in F(x_0)$.

Định nghĩa 1.1.4 Giả sử X là không gian tôpô Hausdorff, Y là không gian véctơ tôpô Hausdorff và $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị.

(i) F được gọi là *nửa liên tục trên theo Hausdorff* (viết tắt là H-usc) tại $x_0 \in \mathrm{dom}F$ nếu với mỗi lân cận B của gốc trong Y, tồn tại một lân cận U của x_0 sao cho $F(x) \subset F(x_0) + B$ với mọi $x \in U$.

(ii) F được gọi là *nửa liên tục dưới theo Hausdorff* (viết tắt là H-lsc) tại $x_0 \in \mathrm{dom}F$ nếu với mỗi lân cận B của gốc trong Y, tồn tại một lân cận U của x_0 sao cho $F(x_0) \subset F(x) + B$ với mọi $x \in U$.

(iii) F được gọi là *liên tục Hausdorff* tại $x_0 \in \mathrm{dom}F$, nếu F là H-usc và H-lsc tại $x_0 \in \mathrm{dom}F$.

Bổ đề 1.1.8 *Với mọi $e \in \mathrm{int}C$ với $\mathrm{int}C$ là phần trong của C, $y \in Y$ và hàm vô hướng hóa phi tuyến $\xi_e : Y \to \mathbb{R}$ được xác định bởi $\xi_e(y) := \min\{r \in \mathbb{R} \mid y \in re - C\}$, ta có*

(i) *ξ_e là hàm lồi và liên tục trong Y;*

(ii) *$\xi_e(y) \leq r \Leftrightarrow y \in re - C$;*

(iii) *$\xi_e(y) > r \Leftrightarrow y \notin re - C$.*

.

1.2 Bài toán tựa cân bằng

Cho X, Y, Z, P là các không gian véctơ tôpô Hausdorff, $A \subset X$, $B \subset Y$ và $\Gamma \subset P$ là các tập con khác rỗng, C là một nón lồi đóng có đỉnh trong Z với $\mathrm{int}C \neq \emptyset$. Lấy $K : A \times \Gamma \rightrightarrows A$, $T : A \times \Gamma \rightrightarrows B$ là các hàm đa trị và $f : A \times B \times A \times \Gamma \to Z$ là hàm cân bằng, nghĩa là $f(x, t, x, \gamma) = 0$ với mọi $x \in A, t \in B, \gamma \in \Gamma$. Xuất phát từ các mô hình bất đẳng thức biến phân loại Minty và Stampacchia, chúng ta xét hai *bài toán tựa cân bằng véctơ mạnh* sau.
(QEP$_1$) Tìm $x \in K(x, \gamma)$ sao cho

$$f(x, t, y, \gamma) \in C, \forall y \in K(x, \gamma), \forall t \in T(y, \gamma).$$

(QEP$_2$) Tìm $x \in K(x, \gamma)$ sao cho tồn tại $t \in T(x, \gamma)$ thỏa mãn

$$f(x, t, y, \gamma) \in C, \forall y \in K(x, \gamma).$$

Cho $S_1, S_2 : \Gamma \rightrightarrows A$ là các ánh xạ đa trị sao cho với mỗi $\gamma \in \Gamma$, $S_1(\gamma)$ và $S_2(\gamma)$ tương ứng là các tập nghiệm của (QEP$_1$) và (QEP$_2$).

1.3 Hàm đánh giá cho bài toán tựa cân bằng

Trong mục này, chúng ta giới thiệu các hàm đánh giá cho hai bài toán (QEP_1) và (QEP_2) và nghiên cứu một số tính liên tục của chúng. Trong phần còn lại của mục này, chúng ta vẫn sử dụng các ký hiệu trong Mục 1.2 và luôn giả thiết f là liên tục trong $A \times B \times A \times \Gamma$.

Định nghĩa 1.3.1. Hàm $g : A \times \Gamma \to \mathbb{R}$ được gọi là *hàm đánh giá phụ thuộc tham số* cho bài toán (QEP_1) ((QEP_2), tương ứng), nếu:

(a) $g(x, \gamma) \geq 0$ với mọi $x \in K(x, \gamma)$;

(b) $g(x, \gamma) = 0$ khi và chỉ khi $x \in S_1(\gamma)$ ($x \in S_2(\gamma)$, tương ứng).

Bây giờ, chúng ta giả thiết rằng K và T có giá trị compắc trong một lân cận của điểm đang xét. Chúng ta định nghĩa hai hàm $p : A \times \Gamma \to \mathbb{R}$ và $h : A \times \Gamma \to \mathbb{R}$ như sau

$$p(x, \gamma) = \max_{t \in T(y,\gamma)} \max_{y \in K(x,\gamma)} \xi_e(-f(x, t, y, \gamma)), \tag{1.1}$$

và

$$h(x, \gamma) = \min_{t \in T(x,\gamma)} \max_{y \in K(x,\gamma)} \xi_e(-f(x, t, y, \gamma)), \tag{1.2}$$

Vì $K(x, \gamma)$ và $T(x, \gamma)$ là các tập compắc với mọi $(x, \gamma) \in A \times \Gamma$, ξ_e và f là liên tục, nên p và h xác định.

Định lý 1.3.2.

(i) *Hàm $p(x, \gamma)$ được định nghĩa bởi* (1.1) *là một hàm đánh giá phụ thuộc tham số cho bài toán* (QEP_1).

(ii) *Hàm $h(x, \gamma)$ được định nghĩa bởi* (1.2) *là một hàm đánh giá phụ thuộc tham số cho bài toán* (QEP_2).

Định lý 1.3.4. *Với bài toán* (QEP_1) *và* (QEP_2), *ta giả sử rằng K và T là liên tục trong $A \times \Gamma$ và có giá trị compắc. Khi đó, p và h là liên tục trong $A \times \Gamma$.*

1.4 Tính liên tục của ánh xạ nghiệm cho bài toán tựa cân bằng

Trong mục này, chúng ta nghiên cứu tính nửa liên tục trên, tính nửa liên tục dưới Hausdorff và tính liên tục Hausdorff của ánh xạ nghiệm cho bài toán (QEP_1) và (QEP_2).

Định lý 1.3.3. *Với bài toán* (QEP_1) *và* (QEP_2), *ta giả sử rằng A là tập compắc, K là liên tục trong A và có giá trị compắc và tập mức $\mathrm{L}_{\geq C0} f$ là đóng. Khi đó,*

(i) *S_1 là nửa liên tục trên và đóng trong Γ và có giá trị compắc nếu T là nửa liên tục dưới trong A.*

(ii) *S_2 là nửa liên tục trên và đóng trong Γ và có giá trị compắc nếu T là nửa liên tục trên trong A và có giá trị compắc.*

trong đó, $\mathrm{L}_{\geq_C 0} f := \{(x,t,y,\gamma) \in A \times B \times A \times \Gamma \mid f(x,t,y,\gamma) \in C\}$.

Xuất phát từ ý tưởng của giả thiết (H_1) trong Kien (năm 2005), Zhao (năm 1997), chúng ta giới thiệu các giả thiết căn bản sau:
$(H_p(\gamma_0))$: Với $\gamma_0 \in \Gamma$ và bất kỳ lân cận mở U của gốc trong X, tồn tại $\rho > 0$ và một lân cận $V(\gamma_0)$ của γ_0 sao cho với mọi $\gamma \in V(\gamma_0)$ và $x \in E(\gamma) \setminus (S_1(\gamma) + U)$, ta có $p(x,\gamma) \geq \rho$.
$(H_h(\gamma_0))$: Với $\gamma_0 \in \Gamma$ và bất kỳ lân cận mở U của gốc trong X, tồn tại $\rho > 0$ và một lân cận $V(\gamma_0)$ của γ_0 sao cho với mọi $\gamma \in V(\gamma_0)$ và $x \in E(\gamma) \setminus (S_2(\gamma) + U)$, ta có $h(x,\gamma) \geq \rho$.

Định lý 1.4.6. *Với bài toán* (QEP_1) *và* (QEP_2)*, ta giả sử rằng A là compắc, K và T là liên tục trong $A \times \Gamma$ và có giá trị compắc và f là liên tục trong $A \times B \times A \times \Lambda$. Khi đó,*

(i) *S_1 là nửa liên tục dưới Hausdorff trong Γ khi và chỉ khi $(H_p(\gamma_0))$ thỏa mãn.*

(ii) *S_2 là nửa liên tục dưới Hausdorff trong Γ khi và chỉ khi $(H_h(\gamma_0))$ thỏa mãn.*

Từ các kết quả của Định lý 1.4.1 và Định lý 1.4.6, ta có định lý sau đây.

Định lý 1.4.7. *Giả sử rằng tất cả các điều kiện trong Định lý 1.4.6 là thỏa mãn. Khi đó,*

(i) *S_1 là liên tục Hausdorff với giá trị compắc trong Γ khi và chỉ khi $(H_p(\gamma_0))$ thỏa mãn.*

(ii) *S_2 là liên tục Hausdorff với giá trị compắc trong Γ khi và chỉ khi $(H_h(\gamma_0))$ thỏa mãn.*

1.5 Áp dụng cho bất đẳng thức tựa biến phân

Giả sử X, Z, A, B, C, K, T và các ký hiệu như trong Mục 1.2, $L(X;Z)$ là không gian các toán tử tuyến tính liên tục từ X vào Z và $g : A \times \Gamma \to A$ là một hàm véctơ. $\langle t, x\rangle$ biểu thị giá trị của toán tử tuyến tính $t \in L(X;Z)$ tại $x \in X$. Chúng ta luôn giả sử rằng $\langle \cdot, \cdot \rangle : L(X;Z) \times X \to Z$ là liên tục.

Với mọi $\gamma \in \Gamma$, chúng ta xét hai *bất đẳng thức tựa biến phân véctơ loại Minty và Stampacchia* sau.
(MQVI) Tìm $x \in K(x,\gamma)$ sao cho

$$\langle t, y - g(x,\gamma)\rangle \in C, \forall y \in K(x,\gamma), \forall t \in T(y,\gamma).$$

(SQVI) Tìm $x \in K(x, \gamma)$ sao cho tồn tại $t \in T(x, \gamma)$ thỏa mãn

$$\langle t, y - g(x, \gamma)\rangle \in C, \forall y \in K(x, \gamma).$$

Đặt

$$f(x, t, y, \gamma) = \langle t, y - g(x, \gamma)\rangle, \tag{1.3}$$

bài toán (MQVI) và (SQVI) tương ứng trở thành các trường hợp đặc biệt của (QEP_1) và (QEP_2). Với mỗi $\gamma \in \Gamma$, chúng ta ký hiệu $\Phi(\gamma)$ và $\Psi(\gamma)$ tương ứng là các tập nghiệm của bài toán (MQVI) và (SQVI). Chúng ta giả sử rằng các tập nghiệm này là khác rỗng trong một lân cận của $\gamma_0 \in \Gamma$.

Các kết quả sau đây được suy ra từ các kết quả chính của Mục 1.4.

Hệ quả 1.5.1. *Với bài toán* (MQVI) *và* (SQVI)*, ta giả sử rằng A là compắc, K và T là liên tục trong $A \times \Gamma$ và có giá trị compắc và g là liên tục trong $A \times \Gamma$. Khi đó,*

(i) *Φ là nửa liên tục dưới Hausdorff trong Γ khi và chỉ khi $(H_p(\gamma_0))$ thỏa mãn.*

(ii) *Ψ là nửa liên tục dưới Hausdorff trong Γ khi và chỉ khi $(H_h(\gamma_0))$ thỏa mãn.*

Hệ quả 1.5.3. *Giả sử rằng tất cả các điều kiện trong Hệ quả 1.5.1 là thỏa mãn. Khi đó,*

(i) *Φ là liên tục Hausdorff với giá trị compắc trong Γ khi và chỉ khi $(H_p(\gamma_0))$ thỏa mãn.*

(ii) *Ψ là liên tục Hausdorff với giá trị compắc trong Γ khi và chỉ khi $(H_h(\gamma_0))$ thỏa mãn.*

Kết luận Chương 1

Trong Chương 1, chúng tôi đã đạt được những kết quả sau đây:

- Thiết lập được các hàm đánh giá cho các bài toán tựa cân bằng (QEP_1) và (QEP_2) (Định nghĩa 1.3.1, Định lý 1.3.2). Sau đó khảo sát tính liên tục của chúng (Định lý 1.3.4).

- Khảo sát tính nửa liên tục trên cho ánh xạ nghiệm của bài toán tựa cân bằng (QEP_1) và (QEP_2) (Định lý 1.4.1). Trên cơ sở hàm đánh giá, chúng tôi nghiên cứu giả thiết căn bản $(H_p(\gamma_0))$ và $(H_h(\gamma_0))$. Sau đó, chúng tôi chứng tỏ rằng các giả thiết này là điều kiện cần và đủ cho tính nửa liên tục dưới Hausdorff và liên tục Hausdorff của ánh xạ nghiệm cho bài toán (QEP_1) và (QEP_2) (Định lý 1.4.6 và Định lý 1.4.7).

- Từ các kết quả chính trong Mục 1.4. Chúng tôi áp dụng cho bất đẳng thức tựa biến phân loại Minty và Stampacchia (MQVI) và (SQVI). Các kết quả thu được là Hệ quả 1.5.1 và Hệ quả 1.5.3.

Các kết quả trên được trích ra từ bài báo:

L. Q. Anh and N. V. Hung (2018), Gap functions and Hausdorff continuity of solution mappings to parametric strong vector quasiequilibrium problems, *Journal of Industrial and Management Optimization*, **14**, 65-79.

CHƯƠNG 2

TÍNH HỘI TỤ CỦA TẬP NGHIỆM CHO BÀI TOÁN TỰA CÂN BẰNG

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu về tính hội tụ Painlevé-Kuratowski của tập nghiệm bằng cách sử dụng phương pháp hàm đánh giá cho bài toán tựa cân bằng véctơ. Đầu tiên, chúng tôi giới thiệu dãy hàm đánh giá cho bài toán này và thiết lập tính liên tục của chúng. Sau đó, chúng tôi nghiên cứu tính hội tụ trên, hội tụ dưới và hội tụ theo nghĩa Painlevé-Kuratowski của tập nghiệm của bài toán này. Trong mục ứng dụng, chúng tôi nghiên cứu trường hợp đặc biệt cho bất đẳng thức tựa biến phân.

2.1 Dãy các bài toán tựa cân bằng

Cho X, Y, Z là các không gian mêtric tuyến tính, $A \subset X, B \subset Y$ là các tập con compắc. Ta nhắc lại rằng $\mathcal{E}$ được gọi là một không gian mêtric tuyến tính nếu và chỉ nếu nó là một không gian mêtric và không gian tuyến tính với mêtric d của $\mathcal{E}$ là bất biến qua phép chuyển dịch. Lấy $K : A \rightrightarrows A, T : A \rightrightarrows B$ là các ánh xạ đa trị và $f : A \times B \times A \to Z$ là ánh xạ đơn trị, $C : A \rightrightarrows Z$ là ánh xạ đa trị sao cho với mọi $x \in A$, $C(x)$ là một nón lồi đóng trong Z với $\mathrm{int}C(x) \neq \emptyset$. Chúng ta xét *bài toán tựa cân bằng tổng quát yếu* sau đây.

(WQEP) Tìm $\bar{x} \in K(\bar{x})$ sao cho tồn tại $z \in T(\bar{x})$ thỏa mãn

$$f(\bar{x}, z, y) \in Z \setminus -\mathrm{int}C(\bar{x}), \forall y \in K(\bar{x}).$$

Với các dãy của các ánh xạ đa trị $K_n : A \rightrightarrows A, T_n : A \rightrightarrows B$ và ánh xạ đơn trị $f_n : A \times B \times A \to Z$ với $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, ta xét *dãy các bài toán tựa cân bằng tổng quát yếu* sau đây.

$(\mathrm{WQEP})_n$ Tìm $\bar{x} \in K_n(\bar{x})$ sao cho tồn tại $z \in T_n(\bar{x})$ thỏa mãn

$$f_n(\bar{x}, z, y) \in Z \setminus -\mathrm{int}C(\bar{x}), \forall y \in K_n(\bar{x}).$$

Ký hiệu $S(f, T, K)$ và $S(f_n, T_n, K_n)$ tương ứng là các tập nghiệm của bài toán (WQEP) và $(\mathrm{WQEP})_n$.

Định nghĩa 2.1.1. Một dãy các tập $\{D_n\}$, $D_n \subset X$ được gọi là *hội tụ trên* (*hội tụ dưới*) theo nghĩa Painlevé-Kuratowski đến D nếu $\limsup\limits_{n\to\infty} D_n \subset D$ ($D \subset \liminf\limits_{n\to\infty} D_n$, tương ứng). $\{D_n\}$ được gọi là *hội tụ* theo nghĩa Painlevé-Kuratowski đến D nếu $\limsup\limits_{n\to\infty} D_n \subset D \subset \liminf\limits_{n\to\infty} D_n$.

Định nghĩa 2.1.2. Một ánh xạ đa trị $G : X \rightrightarrows Y$ là *nửa liên tục ngoài* (*nửa liên tục trong*) tại x_0 nếu $\limsup\limits_{x\to x_0} G(x) \subset G(x_0)$ ($\liminf\limits_{x\to x_0} G(x) \supset G(x_0)$, tương ứng).

Định nghĩa 2.1.3. Một dãy các ánh xạ đơn trị $\{f_n\}$, $f_n : X \to Y$ được gọi là *hội tụ liên tục* đến ánh xạ $f : X \to Y$ tại x_0 nếu $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x_0)$ với mọi $x_n \to x_0$.

Định nghĩa 2.1.4. Cho $\{G_n\}$, $G_n : X \rightrightarrows Y$ là một dãy các ánh xạ đa trị và $G : X \rightrightarrows Y$ là một ánh xạ đa trị. $\{G_n\}$ được gọi là *hội tụ liên tục ngoài* (*hội tụ liên tục trong*) đến G tại x_0 nếu $\limsup\limits_{n\to\infty} G_n(x_n) \subset G(x_0)$ ($G(x_0) \subset \liminf\limits_{n\to\infty} G_n(x_n)$, tương ứng) với mọi $x_n \to x_0$. $\{G_n\}$ được gọi là *hội tụ liên tục* đến G tại x_0 nếu $\limsup\limits_{n\to\infty} G_n(x_n) \subset G(x_0) \subset \liminf\limits_{n\to\infty} G_n(x_n)$ với mọi $x_n \to x_0$.

Bổ đề 2.1.5. *Giả sử X và Z là hai không gian véctơ tôpô Hausdorff lồi địa phương, $C : X \rightrightarrows Z$ là ánh xạ đa trị sao cho với bất kỳ $x \in X, C(x)$ là một nón lồi, đóng trong Z với $\mathrm{int}C(x) \neq \emptyset$. Giả sử $e : X \to Z$ là lát cắt liên tục của ánh xạ đa trị $\mathrm{int}C(\cdot)$ (nghĩa là $e(x) \in \mathrm{int}C(x)$). Xét ánh xạ đa trị $V : X \rightrightarrows Z$ bởi $V(x) = Z \setminus \mathrm{int}C(x)$ với mọi $x \in X$. Khi đó, hàm vô hướng hóa phi tuyến $\xi_e : X \times Z \to \mathbb{R}$ được định nghĩa bởi $\xi_e(x, y) := \inf\{r \in \mathbb{R} \mid y \in re(x) - C(x)\}$ với mọi $(x, y) \in X \times Z$ có các tính chất sau:*

(i) $\xi_e(x, y) < r \Leftrightarrow y \in re(x) - \mathrm{int}C(x)$;

(ii) $\xi_e(x, y) \geq r \Leftrightarrow y \notin re(x) - \mathrm{int}C(x)$;

(iii) *Nếu V và C là nửa liên tục trên, thì ξ_e là liên tục.*

Định nghĩa 2.1.6. Hàm $q : A \to \mathbb{R}$ được gọi là *hàm đánh giá* cho bài toán (WQEP) ($(\mathrm{WQEP})_n$, tương ứng), nếu:

(a) $q(x) \geq 0$ với mọi $x \in K(x)$;

(b) $q(x) = 0$ khi và chỉ khi $x \in S(f, T, K)$ ($x \in S(f_n, T_n, K_n)$, tương ứng).

Giả sử rằng K, K_n, T, T_n có giá trị compắc và f, f_n là liên tục. Để thuận tiện trong việc trình bày chúng ta ký hiệu $K_0 := K$, $T_0 := T$, $f_0 := f$. Với $n \in \mathbb{N}$, hàm $h_n : A \to \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$h_n(x) = \min_{z\in T_n(x)} \max_{y\in K_n(x)} \{-\xi_e(x, f_n(x, z, y))\}. \tag{2.1}$$

Chúng ta giả sử rằng f_n là các ánh xạ cân bằng, nghĩa là, $f_n(x, z, x) = 0$ với mọi $x \in A$ và $n \in \mathbb{N}$.

Mệnh đề 2.1.7. *Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, hàm $h_n(x)$ được định nghĩa bởi* (2.1) *là một hàm đánh giá cho bài toán* $(\mathrm{WQEP})_n$.

Mệnh đề 2.1.8. *Với $n \in \mathbb{N}$ và bài toán* (WQEP) *và* $(\mathrm{WQEP})_n$*, ta giả sử rằng*

(i) *K_n và T_n là liên tục với giá trị compắc;*

(ii) *V, C là nửa liên tục trên và e là liên tục.*

Khi đó, h_n được định nghĩa bởi (2.1) là liên tục.

Mệnh đề 2.1.9. *Với mỗi $n \in \mathbb{N}$ và bài toán* (WQEP) *và* $(\mathrm{WQEP})_n$*, ta giả sử rằng*

(i) *K_n là liên tục với giá trị compắc*;

(ii) *T_n là nửa liên tục trên với giá trị compắc*;

(iii) *W là đóng.*

Khi đó, $S(f_n, T_n, K_n)$ là compắc.

2.2 Tính hội tụ của tập nghiệm cho bài toán tựa cân bằng

Đầu tiên, chúng ta sẽ nghiên cứu tính hội tụ trên của các tập nghiệm cho bài toán (WQEP) và $(\mathrm{WQEP})_n$.

Định lý 2.2.1. *Với bài toán* (WQEP) *và* $(\mathrm{WQEP})_n$*, ta giả sử rằng*

(i) *$\{K_n\}$ hội tụ liên tục đến K*;

(ii) *$\{T_n\}$ hội tụ liên tục ngoài đến T*;

(iii) *$\{f_n\}$ hội tụ liên tục đến f*;

(iv) *W là đóng.*

Khi đó, $\limsup\limits_{n\to\infty} S(f_n, T_n, K_n) \subset S(f, T, K)$.

Tiếp theo, chúng ta giới thiệu một giả thiết căn bản và nghiên cứu tính hội tụ Painlevé-Kuratowski của tập nghiệm cho bài toán (WQEP) và $(\mathrm{WQEP})_n$.

(H_h): Với bất kỳ một lân cận U của gốc trong X, tồn tại $\alpha \in (0, +\infty)$ và $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $h_n(x) \geq \alpha$ với mọi $n \geq n_0$ và $x \in K_n(x) \setminus (S(f_n, T_n, K_n) + U)$.

Định lý 2.2.12. *Giả sử tất cả các giả thiết của Mệnh đề 2.1.9 thỏa mãn và bổ sung thêm các điều kiện sau*

(i) $\{K_n\}$ *hội tụ liên tục đến* K;

(ii) $\{T_n\}$ *hội tụ liên tục đến* T;

(iii) $\{f_n\}$ *hội tụ liên tục đến* f;

(iv) V, C *là nửa liên tục trên.*

Khi đó, $S(f,T,K) \subset \liminf_{n\to\infty} S(f_n,T_n,K_n)$ *khi và chỉ khi* (H_h) *thỏa mãn.*

Kết hợp Định lý 2.2.1 và Định lý 2.2.12, ta nhận được điều kiện cần và đủ cho tính hội tụ Painlevé-Kuratowski của tập nghiệm cho (WQEP) và $(\text{WQEP})_n$.

Định lý 2.2.13. *Giả sử tất cả các giả thiết của Định lý 2.2.12 thỏa mãn. Khi đó,* $S(f_n,T_n,K_n)$ *hội tụ đến* $S(f,T,K)$ *theo nghĩa Painlevé - Kuratowski khi và chỉ khi* (H_h) *thỏa mãn.*

2.3 Áp dụng cho bất đẳng thức tựa biến phân

Cho X, Z là các không gian Banach, $Y = L(X;Z)$, A, B, C, K, T, K_n, T_n như ở trong Mục 2.2. Khi đó, ta xét *bất đẳng thức tựa biến phân* sau.

(QVI) Tìm $\bar{x} \in K(\bar{x})$ sao cho tồn tại $z \in T(\bar{x})$ thỏa mãn

$$\langle z, y - \bar{x}\rangle \in Z \setminus -\text{int}C(\bar{x}), \forall y \in K(\bar{x}).$$

$(\text{QVI})_n$ Tìm $\bar{x} \in K_n(\bar{x})$ sao cho tồn tại $z \in T_n(\bar{x})$ thỏa mãn

$$\langle z, y - \bar{x}\rangle \in Z \setminus -\text{int}C(\bar{x}), \forall y \in K_n(\bar{x}).$$

Chúng ta ký hiệu $S(T,K)$ và $S(T_n,K_n)$ lần lượt là các tập nghiệm của (QVI) và $(\text{QVI})_n$ và giả sử rằng các tập nghiệm này là khác rỗng. Đặt $f(x,z,y) = f_n(x,y,z) = \langle z, y - x\rangle$, khi đó bài toán (QVI) trở thành một trường hợp đặc biệt của (WQEP).

Hệ quả sau đây được suy ra từ Định lý 2.2.1.

Hệ quả 2.3.1. *Với bài toán* (QVI) *và* $(\text{QVI})_n$*, ta giả sử các điều kiện sau đây thỏa mãn*

(i) $\{K_n\}$ *hội tụ liên tục đến* K;

(ii) $\{T_n\}$ *hội tụ liên tục ngoài đến* T;

(iii) W *là đóng.*

Khi đó, $\limsup_{n\to\infty} S(T_n, K_n) \subset S(T, K)$.

Hệ quả sau đây được suy ra từ Định lý 2.2.12.

Hệ quả 2.3.2. *Với* $n \in \mathbb{N}$ *và* (QVI) *và* $(\text{QVI})_n$*, ta giả sử các điều kiện sau đây thỏa mãn*

(i) K_n *là hội tụ với giá trị compắc và* $\{K_n\}$ *hội tụ liên tục đến* K;

(ii) T_n *là nửa liên tục trên với giá trị compắc và* $\{T_n\}$ *hội tụ liên tục đến* T;

(iii) V*,* C *là nửa liên tục trên*;

(iv) W *là đóng.*

Khi đó, $S(T, K) \subset \liminf_{n\to\infty} S(T_n, K_n)$ *khi và chỉ khi* (H_h) *thỏa mãn.*

Hệ quả 2.3.3. *Giả sử tất cả các giả thiết của Mệnh đề 2.3.2 thỏa mãn. Khi đó,* $S(T_n, K_n)$ *hội tụ đến* $S(T, K)$ *theo nghĩa Painlevé - Kuratowski khi và chỉ khi* (H_h) *thỏa mãn..*

Kết luận Chương 2

Trong chương này, chúng tôi thu được các kết quả sau:

- Thiết lập được các dãy hàm đánh giá cho các bài toán tựa cân bằng (WQEP) và $(\text{WQEP})_n$ (Mệnh đề 2.1.7). Sau đó nghiên cứu tính liên tục của chúng (Mệnh đề 2.1.8).

- Thiết lập tính hội tụ trên theo nghĩa Painlevé - Kuratowski của tập nghiệm của bài toán (WQEP) và $(\text{WQEP})_n$ (Định lý 2.2.1). Trên cơ sở dãy hàm đánh giá, giả thiết căn bản (H_h) là được nghiên cứu. Sau đó, chúng tôi chứng tỏ rằng các giả thiết này là điều kiện cần và đủ cho sự hội tụ dưới và sự hội tụ theo nghĩa Painlevé - Kuratowski của tập nghiệm của bài toán (WQEP) và $(\text{WQEP})_n$ (Định lý 2.2.12 và Định lý 2.2.13).

- Từ các kết quả chính trong Mục 2.1 và Mục 2.2, chúng tôi áp dụng cho dãy bài toán bất đẳng thức tựa biến phân loại (QVI) và $(\text{QVI})_n$. Các kết quả thu được là Hệ quả 2.3.1, Hệ quả 2.3.2 và Hệ quả 2.3.3.

Các kết quả trong chương này được trích ra từ bài báo:

L. Q. Anh, T. Bantaojai, N. V. Hung, V. M. Tam and R. Wangkeeree (2018), Painlevé-Kuratowski convergences of the solution sets for generalized vector quasiequilibrium problems, *Computational and Applied Mathematics*, **37**, 3832–3845.

CHƯƠNG 3

TÍNH ỔN ĐỊNH VÀ ĐẶT CHỈNH CHO BÀI TOÁN CÂN BẰNG HAI MỨC

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu tính ổn định nghiệm và tính đặt chỉnh Levitin-Polyak cho các bài toán cân bằng mạnh hai mức. Đầu tiên, chúng tôi giới thiệu bài toán cân bằng mạnh hai mức và thiết lập tính nửa liên tục và liên tục của ánh xạ nghiệm cho bài toán này. Sau đó, chúng tôi ứng dụng các kết quả này cho bất đẳng thức biến phân với ràng buộc cân bằng và bài toán tối ưu với ràng buộc cân bằng. Tiếp theo, chúng tôi giới thiệu bài toán cân bằng mạnh hai mức với nón di động và nghiên cứu các khái niệm đặt chỉnh Levitin-Polyak và đặt chỉnh Levitin-Polyak tổng quát cho bài toán này. Chúng tôi nghiên cứu mối quan hệ của tính đặt chỉnh với tính nửa liên tục trên của nghiệm xấp xỉ và sự tồn tại nghiệm và đặc trưng mêtric các đặt chỉnh Levitin-Polyak và đặt chỉnh Levitin-Polyak tổng quát cho bài toán này. Từ các kết quả chính này, chúng tôi áp dụng cho bài toán mạng giao thông với ràng buộc cân bằng.

3.1 Tính ổn định của ánh xạ nghiệm cho bài toán cân bằng hai mức

Cho X, Y, Z là các không gian véctơ tôpô Hausdorff. A và Λ lần lượt là các tập con lồi khác rỗng của X và Y, $C \subset Z$ là một nón lồi đóng có đỉnh với phần trong khác rỗng. Giả sử K_1 và $K_2 : A \times \Lambda \rightrightarrows A$ là hai hàm đa trị, $f : A \times A \times \Lambda \to Z$ là hàm véctơ. Với mỗi $\lambda \in \Lambda$, chúng ta xét *bài toán tựa cân bằng véctơ mạnh phụ thuộc tham số* sau đây:
(SQEP) Tìm $\bar{x} \in K_1(\bar{x}, \lambda)$ sao cho

$$f(\bar{x}, y, \lambda) \in C, \forall y \in K_2(\bar{x}, \lambda).$$

Cho $S : \Lambda \rightrightarrows A$ là các ánh xạ đa trị sao cho với mỗi $\lambda \in \Lambda$, $S(\lambda)$ là tập nghiệm của (SQEP). Giả sử $E : \Lambda \rightrightarrows A$ xác định bởi $E(\lambda) := \{x \in A \mid x \in K_1(x, \lambda)\} \neq \emptyset$ với mỗi $\lambda \in \Lambda$. Cho W là không gian véctơ tôpô Hausdorff và Γ là một tập con khác rỗng của W. Lấy $B = A \times \Lambda$ và $h : B \times B \times \Gamma \to Z$ là hàm véctơ, $C' \subset Z$ là nón lồi đóng có đỉnh. Chúng ta xét bài toán *cân bằng véctơ hai mức* sau:
(BEP) Tìm $\bar{x}^* \in \text{graph}S^{-1}$ sao cho

$$h(\bar{x}^*, y^*, \gamma) \in C', \forall y^* \in \text{graph}S^{-1},$$

trong đó $\text{graph}S^{-1} = \{(x, \lambda) \mid x \in S(\lambda)\}$ là đồ thị của S^{-1}.

Cho $\Phi : \Gamma \rightrightarrows B$ là các ánh xạ đa trị sao cho với mỗi $\gamma \in \Gamma$, $\Phi(\gamma)$ là tập nghiệm của (BEP), nghĩa là

$$\Phi(\gamma) = \{\bar{x}^* \in \text{graph}S^{-1} \mid h(\bar{x}^*, y^*, \gamma) \in C',\ \forall y^* \in \text{graph}S^{-1}\},$$

và chúng ta giả sử rằng $\Phi(\gamma) \neq \emptyset$ với mỗi γ trong lân cận của $\gamma_0 \in \Gamma$.

Cho $\varphi : X \to Z$ là hàm véctơ và $C \subset Z$ là nón lồi đóng có đỉnh và phần trong khác rỗng. Với $\theta \in Z$, ta sử dụng các khái niệm tập mức của φ đối với C với các nón khác nhau (tùy theo các ngữ cảnh, để không có sự nhầm lẫn).

$$L_{\geq_C \theta}\varphi := \{x \in X \mid \varphi(x) \in \theta + C\},$$
$$L_{\not>_C \theta}\varphi := \{x \in X \mid \varphi(x) \notin \theta + \text{int}C\},$$

tương tự cho các tập mức $L_{\leq_C \theta}\varphi, L_{\not<_C \theta}\varphi, L_{\not\geq_C \theta}\varphi, L_{>_C \theta}\varphi$,...

Bây giờ, chúng ta nghiên cứu tính nửa liên tục trên, tính đóng của ánh xạ nghiệm cho bài toán (BEP).

Định lý 3.1.1. *Với bài toán* (BEP)*, ta giả sử rằng* Λ *compắc và các điều kiện sau đây thỏa mãn*

(i) *E là nửa liên tục trên với giá trị compắc và K_2 là nửa liên tục dưới;*

(ii) *$L_{\geq_C 0}f$ là đóng trong $A \times A \times \Lambda$;*

(iii) *$L_{\geq_{C'} 0}h$ là đóng trong $B \times B \times \{\gamma_0\}$.*

Khi đó, Φ là nửa liên tục trên và đóng tại γ_0.

Định lý 3.1.5. *Giả sử các giả thiết (ii) và (iii) trong Định lý 3.1.1 thỏa mãn và thay thế giả thiết* (i) *bởi*

(i') *A là compắc, K_1 là đóng, và K_2 là nửa liên tục trên.*

Khi đó, Φ là nửa liên tục trên và đóng tại γ_0.

Tiếp theo, chúng ta sẽ nghiên cứu tính nửa liên tục dưới, nửa liên tục dưới Hausdorff, liên tục và liên tục Hausdorff của ánh xạ nghiệm cho bài toán (SQEP).

Với W, Γ, $B = A \times \Lambda$, h và C' như trong bài tpans (BEP), chúng ta xét *bài toán bổ trợ* sau đây:
(BEP*) Tìm $\bar{x}^* \in \text{graph}S^{-1}$ sao cho

$$h(\bar{x}^*, y^*, \gamma) \in \text{int}C', \forall y^* \in \text{graph}S^{-1}.$$

Giả sử $\Phi^* : \Gamma \rightrightarrows B$ là các ánh xạ đa trị sao cho với mỗi $\gamma \in \Gamma$, $\Phi^*(\gamma)$ là tập nghiệm của (BEP*) và chúng ta giả sử $\Phi^*(\gamma) \neq \emptyset$ với mỗi γ trong lân cận của $\gamma_0 \in \Gamma$. Ta thấy rằng với mọi $\gamma \in \Gamma$, $\Phi^*(\gamma) \subset \Phi(\gamma)$.

Định nghĩa 3.1.7. Cho X, Z là các không gian véctơ tôpô Hausdorff, $\varphi : X \to Z$ là hàm véctơ và $C \subset Z$ là nón lồi đóng có đỉnh. Hàm φ được gọi là *C-tựa lõm tổng quát* trong một tập con lồi khác rỗng $A \subset X$, nếu với mọi $x_1, x_2 \in A$ thỏa mãn $\varphi(x_1) \in C$, $\varphi(x_2) \in \text{int}C$ và với mọi $t \in (0, 1)$, ta có $\varphi(tx_1 + (1-t)x_2) \in \text{int}C$.

Định lý 3.1.8. *Với bài toán* (BEP) *và* (BEP*)*, ta giả sử* Λ *là compắc và các điều kiện sau đây thỏa mãn*

(i) *E là lồi và liên tục với giá trị compắc, K_2 là lõm và liên tục với giá trị compắc;*

(ii) *$L_{\not>_C 0}f$, $L_{\geq_C 0}f$ là đóng trên $A \times A \times \Lambda$ và $L_{\not>_{C'} 0}h$ là đóng trên $B \times B \times \{\gamma_0\}$;*

(iii) *f là C-tựa lõm tổng quát;*

(iv) *$h(\cdot, y^*, \gamma_0)$ là C'-tựa lõm tổng quát, với mọi $y^* \in \text{graph}S^{-1}, \gamma_0 \in \Gamma$.*

Khi đó, Φ là nửa liên tục dưới tại γ_0.

Định lý 3.1.12. *Giả sử tất cả các giả thiết của Định lý 3.1.8 thỏa mãn và bổ sung điều kiện sau:*

(v) *$L_{\geq_{C'} 0}h(\cdot, y^*, \gamma_0)$ là đóng trong B với mọi $y^* \in \text{graph}S^{-1}, \gamma_0 \in \Gamma$.*

Khi đó, Φ là nửa liên tục dưới Hausdorff tại γ_0.

Kết hợp các định lý 3.1.1, 3.1.5 và định lý 3.1.8, 3.1.12, ta thiết lập các điều kiện đủ cho tính liên tục và tính liên tục Hausdorff của ánh xạ nghiệm đến bài toán (BEP).

Định lý 3.1.14.

(i) *Giả sử tất cả các giả thiết của Định lý 3.1.8 thỏa mãn. Khi đó, Φ là liên tục tại γ_0, nếu các điều kiện của Định lý 3.1.1 hoặc Định lý 3.1.5 thỏa mãn.*

(ii) *Giả sử tất cả các giả thiết của Định lý 3.1.12 thỏa mãn. Khi đó, Φ là liên tục Hausdorff tại γ_0, nếu các điều kiện của Định lý 3.1.1 hoặc Định lý 3.1.5 thỏa mãn.*

Bây giờ, chúng ta xét bài toán bất đẳng thức biến phân với ràng buộc cân bằng. Lấy $X, Y, Z, W, C, C', A, B, \Gamma, \Lambda, K_1, K_2, f$ như trong bài toán (SQEP) và lấy $L(X \times Y; Z)$ là không gian của tất cả các toán tử tuyến tính liên tục từ $X \times Y$ vào Z và $T : B \times \Gamma \to L(X \times Y; Z)$ là hàm véctơ. $\langle z, x\rangle$ ký hiệu giá trị của một toán tử $z \in L(X \times Y; Z)$ tại $x \in B$. Với mọi $\gamma \in \Gamma$, chúng ta xét *bất đẳng thức biến phân véctơ với ràng buộc cân bằng* sau: (VIEC) Tìm $\bar{x}^* \in \text{graph}S^{-1}$ sao cho

$$\langle T(\bar{x}^*, \gamma), y^* - \bar{x}^*\rangle \in C', \forall y^* \in \text{graph}S^{-1},$$

trong đó $S(\lambda)$ là tập nghiệm của bài toán (SQEP).

Đặt $h(x^*, y^*, \gamma) = \langle T(x^*, \gamma), y^* - x^*\rangle$, chúng ta thấy (VIEC) trở thành một trường hợp đặc biệt của (BEP). Với $\gamma \in \Gamma$, chúng ta ký hiệu tập nghiệm của (VIEC) bởi $\Psi(\gamma)$ và luôn giả sử rằng $\Psi(\gamma) \neq \emptyset$ với mọi γ trong lân cận của $\gamma_0 \in \Gamma$.

Hệ quả 3.1.15. *Với bài toán* (VIEC)*, ta giả sử rằng*

(i) *E là nửa liên tục trên với giá trị compắc và K_2 là nửa liên tục dưới;*

(ii) *$L_{\geq_C 0}f$ là đóng trong $A \times A \times \Lambda$;*

(iii) *tập $\{(x^*, y^*, \gamma) \mid \langle T(x^*, \gamma), y^* - x^*\rangle \in C'\}$ là đóng trong $B \times B \times \{\gamma_0\}$.*

Khi đó, Ψ là nửa liên tục trên và đóng tại γ_0.

Tiếp theo, chúng ta sẽ nghiên cứu bài toán tối ưu với ràng buộc cân bằng. Lấy $X, Y, Z, W, A, B, C, C', \Lambda, \Gamma, K_1, K_2, f$ như trong bài toán (SQEP) và $g : B \times \Lambda \to Z$ là một hàm véctơ. Với mọi $\gamma \in \Gamma$, chúng ta xét *bài toán tối ưu với ràng buộc cân bằng* sau:

(OPEC) Tìm $\bar{x}^* \in \text{graph}S^{-1}$ sao cho

$$g(y^*, \gamma) \in g(\bar{x}^*, \gamma) + C', \forall y^* \in \text{graph}S^{-1},$$

trong đó $S(\lambda)$ là tập nghiệm của bài toán (SQEP).

Đặt $h(x^*, y^*, \gamma) = g(y^*, \gamma) - g(x^*, \gamma)$, ta thấy rằng (OPEC) là một trường hợp đặc biệt của (BEP). Với $\gamma \in \Gamma$, chúng ta ký hiệu tập nghiệm của bài toán (OPEC) bởi $\Xi(\gamma)$ và giả sử rằng $\Xi(\gamma) \neq \emptyset$ với mọi γ trong một lân cận của $\gamma_0 \in \Gamma$.

Hệ quả 3.1.17. *Với bài toán* (OPEC)*, ta giả sử rằng*

(i) *E là nửa liên tục trên với giá trị compắc và K_2 là nửa liên tục dưới;*

(ii) *$L_{\geq_C 0}f$ là đóng trong $A \times A \times \Lambda$;*

(iii) *tập $\{(x^*, y^*, \gamma) \mid g(y^*, \gamma) - g(x^*, \gamma) \in C'\}$ là đóng trong $B \times B \times \{\gamma_0\}$.*

Khi đó, Ξ là nửa liên tục trên và đóng tại γ_0.

3.2 Tính đặt chỉnh của bài toán cân bằng hai mức

Cho X, W, Z là các không gian Banach, A và Λ tương ứng là các tập con đóng khác rỗng của X và W, $C_1 : A \rightrightarrows Z$ là ánh xạ đa trị sao cho với mọi $x \in A$, $C_1(x)$ là một nón lồi đóng và có đỉnh với $\text{int}C_1(x) \neq \emptyset$. Với $i = 1, 2$, lấy $K_i : A \times \Lambda \rightrightarrows A$ là các ánh xạ đa trị và $f : A \times A \times \Lambda \to Z$ là ánh xạ véctơ. Với $\lambda \in \Lambda$, chúng ta xét *bài toán tựa cân bằng mạnh với nón di động* sau:

(MSQEP) Tìm $\bar{x} \in K_1(\bar{x}, \lambda)$ sao cho

$$f(\bar{x}, y, \lambda) \in C_1(\bar{x}), \forall y \in K_2(\bar{x}, \lambda).$$

Với $\lambda \in \Lambda$, chúng ta ký hiệu tập nghiệm của bài toán (MSQEP) bởi $S(\lambda)$.

Cho Y là không gian Banach, $B = A \times \Lambda$, $C_2 : B \rightrightarrows Y$ là hàm đa trị sao cho với mọi $x^* \in B$, $C_2(x^*)$ là một nón lồi đóng có đỉnh với $\text{int}C_2(x^*) \neq \emptyset$ và $h : B \times B \to Y$ là hàm véctơ. Với mỗi $\gamma_0 \in \Gamma$, chúng ta xét *bài toán cân bằng véctơ hai mức với nón di động* sau:

(MBEP) Tìm $\bar{x}^* \in \text{graph}S^{-1}$ sao cho

$$h(\bar{x}^*, y^*) \in C_2(\bar{x}^*), \forall y^* \in \text{graph}S^{-1},$$

trong đó $S(\lambda)$ là tập nghiệm của (MSQEP) và

$$\text{graph}S^{-1} := \{(x, \lambda) \in A \times \Lambda \mid x \in S(\lambda)\}.$$

Chúng ta ký hiệu tập nghiệm của (MBEP) bởi Ψ.

Từ các khái niệm về nửa liên tục trong Tanaka (năm 1997), chúng ta đưa ra một số khái niệm về nửa liên tục với nón di động sau.

Định nghĩa 3.2.1. Cho $C : X \rightrightarrows Z$ là một hàm đa trị sao cho với mọi $x \in X$, $C(x)$ là nón lồi, đóng có đỉnh với $\text{int}C(x) \neq \emptyset$. Lấy $f : X \times \Lambda \to Z$ là hàm véctơ. Hàm f được gọi là *nửa liên tục trên* theo nón C (viết tắt là C-nửa liên tục trên) tại (x_0, λ_0) nếu với

bất kỳ lân cận V của gốc θ_Z trong Z, tồn tại một lân cận U của (x_0, λ_0) sao cho với mọi $(x, \lambda) \in U$,

$$f(x, \lambda) \in f(x_0, \lambda_0) + V - C(x_0).$$

Nếu f là C-nửa liên tục trên trong toàn bộ $X \times \Lambda$, thì ta nói f là C-nửa liên tục trên.

Tiếp theo, chúng ta đưa ra một số khái niệm đặt chỉnh của Levitin-Polyak cho bài toán cân bằng véctơ hai mức và mô tả mêtric của các khái niệm này. Lấy $e_1 : A \to Z$ và $e_2 : B \to Y$ là các hàm liên tục thỏa mãn $e_1(x) \in \text{int}C_1(x)$ và $e_2(x^*) \in \text{int}C_2(x^*)$ với mọi $x \in A$ và $x^* \in B$, tương ứng.

Định nghĩa 3.2.4. Một dãy $\{x_n^*\} := \{(x_n, \lambda_n)\}$ được gọi là *dãy xấp xỉ Levitin-Polyak* (LP) của (MBEP) nếu

(i) $\{x_n^*\} := \{(x_n, \lambda_n)\} \subset A \times \Lambda, \forall n \in \mathbb{N}$;

(ii) Tồn tại một dãy $\{\varepsilon_n\} \subset \mathbb{R}_+$ hội tụ đến 0 sao cho

$$\begin{aligned} &d(x_n, K_1(x_n, \lambda_n)) \leq \varepsilon_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ &f(x_n, y, \lambda_n) + \varepsilon_n e_1(x_n) \in C_1(x_n), \forall y \in K_2(x_n, \lambda_n) \quad \text{và} \\ &h(x_n^*, y^*) + \varepsilon_n e_2(x_n^*) \in C_2(x_n^*), \forall y^* \in \text{graph}S^{-1}, \end{aligned}$$

trong đó $d(a, M) := \inf_{b \in M} d(a, b)$ là khoảng cách từ điểm đến tập.

Định nghĩa 3.2.5. Bài toán (MBEP) được gọi là *đặt chỉnh Levitin-Polyak* (LP) nếu

(i) Bài toán (MBEP) có nghiệm duy nhất;

(ii) Mỗi dãy xấp xỉ Levitin-Polyak $\{x_n^*\}$ của (MBEP) hội tụ đến nghiệm duy nhất.

Định nghĩa 3.2.6. Bài toán (MBEP) được gọi là *đặt chỉnh Levitin-Polyak (LP) tổng quát* nếu

(i) Ψ là khác rỗng;

(ii) với mọi dãy xấp xỉ Levitin-Polyak $\{x_n^*\}$ của (MBEP), tồn tại một dãy con hội tụ đến một số điểm của Ψ.

Với $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, tập nghiệm xấp xỉ của (MBEP) là

$$\begin{aligned} \widetilde{\Psi}(\varepsilon) := \{x^* = (x, \lambda) \in \text{graph}S^{-1} \mid d(x, K_1(x, \lambda)) \leq \varepsilon, \\ f(x, y, \lambda) + \varepsilon e_1(x) \in C_1(x), \forall y \in K_2(x, \lambda), \\ h(x^*, y^*) + \varepsilon e_2(x^*) \in C_2(x^*), \ \forall y^* \in \text{graph}S^{-1}\}. \end{aligned}$$

Rõ ràng rằng với $0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$, $\widetilde{\Psi}(0) = \Psi$ và $\widetilde{\Psi}(\varepsilon_1) \subset \widetilde{\Psi}(\varepsilon_2)$.

Định lý 3.2.8. *Với bài toán* (MBEP)*, ta giả sử rằng A và Λ là các tập compắc và các điều kiện sau đây thỏa mãn*

(i) *K_1 là nửa liên tục trên với giá trị compắc và K_2 là nửa liên tục dưới;*

(ii) *f là C_1-nửa liên tục trên;*

(iii) *với mọi $y^* \in \text{graph}S^{-1}$, $h(\cdot, y^*)$ là C_2-nửa liên tục trên;*

(iv) *C_1 và C_2 là nửa liên tục trên Hausdorff.*

Khi đó, $\widetilde{\Psi}$ là nửa liên tục trên tại 0 và có giá trị compắc.

Định lý 3.2.9. *Bài toán* (MBEP) *là đặt chỉnh Levitin-Polyak tổng quát khi và chỉ khi $\widetilde{\Psi}$ là nửa liên tục trên và có giá trị compắc khác rỗng tại 0.*

Định lý 3.2.10. *Giả sử rằng tất cả các giả thiết của Định lý 3.2.8 thỏa mãn. Khi đó,*

(i) *Bài toán* (MBEP) *là đặt chỉnh Levitin-Polyak tổng quát khi và chỉ khi Ψ là khác rỗng.*

(ii) *Bài toán* (MBEP) *là đặt chỉnh Levitin-Polyak khi và chỉ khi Ψ là đơn phần tử.*

Định lý 3.2.11. *Giả sử rằng tất cả các giả thiết* (i)-(iv) *của Định lý 3.2.8 thỏa mãn. Khi đó, bài toán* (MBEP) *là đặt chỉnh Levitin-Polyak khi và chỉ khi*

$$\widetilde{\Psi}(\varepsilon) \neq \emptyset, \forall \varepsilon \geq 0 \quad \text{và} \quad \text{diam}\widetilde{\Psi}(\varepsilon) \to 0 \ \text{ khi } \ \varepsilon \to 0.$$

Bây giờ, chúng ta nghiên cứu bài toán mạng giao thông với ràng buộc cân bằng như là phần ứng dụng.

Đầu tiên, chúng ta nhắc lại mô hình bài toán mạng giao thông đã được nghiên cứu bởi nhiều tác giả như Wardrop (năm 1952), Smith (năm 1979) De Luca (năm 1995), Anh và Khanh (năm 2010). Cho một mạng giao thông $L = (N, A)$, trong đó N là các nút mạng (ngã tư, sân bay, nhà ga,...) và A là các đường liên kết. Đặt $Q = (Q_1, Q_2, ..., Q_n)$ là tập các cặp gốc-đích (viết tắt là cặp O/D). Giả sử rằng một cặp $Q_i, i = 1, 2, ..., n$ là được kết nối bởi một tập các đường S_i, trong đó S_i chứa $s_i \geq 1$ đường. Đặt $F = (F_1, F_2, ..., F_m)$ là biểu thị cho dòng véctơ, trong đó $m = \sum_{i=1}^{n} s_i$. Khả năng thông xe của đường và điều kiện ràng buộc là

$$F \in C = \{F \in \mathbb{R}^m : 0 \leq \omega_p \leq F_p \leq \Omega_p, p = 1, 2, ..., m\},$$

trong đó ω_p và Ω_p là các số thực, $C \subset \mathbb{R}^m$ là khác rỗng. Giả sử phí vận chuyển trên đường $F_p, p = 1, 2, ..., m$, phụ thuộc trên toàn bộ dòng véctơ F là $T_p(F, \lambda) \geq 0$ với $\lambda \in \Lambda$ là tham số nhiễu. Khi đó, chi phí trên đường là

$$T(F, \lambda) = (T_1(F, \lambda), T_2(F, \lambda), ..., T_m(F, \lambda)).$$

Một dòng véctơ H được gọi là dòng cân bằng nếu
$\forall Q_i, \forall \xi \in S_i, \forall \tau \in S_i$ sao cho

$$[T_\xi(H, \lambda) < T_\tau(H, \lambda)] \Rightarrow [H_\xi = \Omega_\xi \ \text{ hoặc } \ H_\tau = \omega_\tau].$$

Giả sử nhu cầu vận chuyển ψ_i của cặp O/D, $Q_i, i = 1, 2, ..., n$ phụ thuộc trên $\lambda \in \Lambda$ và cũng phụ thuộc trên dòng cân bằng H. Do đó, xét tất cả các cặp O/D, ta có ánh xạ $\psi : \mathbb{R}^m_+ \times \Lambda \to \mathbb{R}^n_+$. Chúng ta sử dụng khái niệm Kronecker

$$\phi_{i\tau} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } \tau \in S_i, \\ 0 & \text{nếu } \tau \notin S_i. \end{cases}$$

và

$$\phi = \{\phi_{i\tau}\}, \quad i = 1, 2, ..., n, \ \text{và } \tau = 1, 2, ..., m.$$

Khi đó, các dòng đáp ứng nhu cầu được gọi là dòng chấp nhận được là tập

$$K(H,\lambda) = \{F \in C \mid \phi F = \psi(H,\lambda)\}.$$

Bổ đề 3.2.12. *Một dòng véctơ $H \in K(H,\lambda)$ là dòng cân bằng khi và chỉ khi nó là nghiệm của bài toán bất đẳng thức tựa biến phân sau đây*

(TN) *Tìm $H \in K(H,\lambda)$ sao cho*

$$\langle T(H,\lambda), F - H\rangle \geq 0, \forall F \in K(H,\lambda).$$

Cho $X = W = \mathbb{R}^m, Z = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}, C_2(H^*) = \mathbb{R}_+, K_1(H,\lambda) = K_2(H,\lambda) = K(H,\lambda)$ và $A, Y, \Lambda, C_1(H)$, e_1 như bài toán (MBEP). Lấy $T : B \to L(X \times W; Y)$ là hàm véctơ. Chúng ta xét *bài toán mạng giao thông với ràng buộc cân bằng* sau.
(TNEC) Tìm $\bar{H}^* \in \text{graph}S^{-1}$ sao cho

$$\langle T(\bar{H}^*), F^* - \bar{H}^*\rangle \geq 0, \forall F^* = (F,\lambda) \in \text{graph}S^{-1},$$

trong đó $S(\lambda)$ là tập nghiệm của (MSQEP).
Ký hiệu tập nghiệm của (TNEC) bởi Φ, nghĩa là,

$$\Phi = \{\bar{H}^* \in \text{graph}S^{-1} \mid \langle T(\bar{H}^*), F^* - \bar{H}^*\rangle \geq 0,\ \forall F^* \in \text{graph}S^{-1}\}.$$

Với $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, chúng ta ký hiệu tập nghiệm xấp xỉ của (TNEC) bởi

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}(\varepsilon) := \{H^* \in \text{graph}S^{-1} \mid\ & d(H, K(H,\lambda)) \leq \varepsilon,\\ & f(H,F,\lambda) + \varepsilon e_1(H) \in C_1(H), \forall F \in K(H,\lambda),\\ & \langle T(H^*), F^* - H^*\rangle + \varepsilon \geq 0,\ \forall F^* \in \text{graph}S^{-1}\}.\end{aligned}$$

Hệ quả 3.2.17. *Với bài toán* (TNEC)*, ta giả sử rằng*

(i) *ψ là liên tục;*

(ii) *f là C_1-nửa liên tục trên;*

(iii) *Hàm $(H^*, F^*) \longmapsto \langle T(H^*), F^* - H^*\rangle$ là nửa liên tục trên.*

Khi đó, bài toán (TNEC) *là đặt chỉnh Levitin-Polyak tổng quát khi và chỉ khi $\widetilde{\Phi}$ là nửa liên tục trên tại* 0 *và có giá trị compắc.*

Hệ quả 3.2.18. *Giả sử rằng tất cả các điều kiện trong Hệ quả 3.2.17 được thỏa mãn. Khi đó,* (TNEC) *là đặt chỉnh Levitin-Polyak khi và chỉ khi*

$$\widetilde{\Phi}(\varepsilon) \neq \emptyset, \forall \varepsilon \geq 0 \ \text{ và } \ \text{diam}\widetilde{\Phi}(\varepsilon) \to 0 \ \text{ khi } \ \varepsilon \to 0.$$

Kết luận Chương 3

Trong Chương 3, chúng tôi đã đạt được những kết quả sau đây:

- Thiết lập bài toán cân bằng hai mức véctơ phụ thuộc tham số (MBEP). Sau đó, chúng tôi khảo sát các tính nửa liên tục và liên tục của chúng (Định lý 3.1.1, Định lý 3.1.5, Định lý 3.1.8, Định lý 3.1.12 và Định lý 3.1.14).

- Từ các kết quả trong Mục 3.1, chúng tôi áp dụng cho bất đẳng thức biến phân với ràng buộc cân bằng và bài toán tối ưu với ràng buộc cân bằng (Hệ quả 3.1.15 và Hệ quả 3.1.17).

- Thiết lập bài toán cân bằng hai mức véctơ với nón di động (MBEP). Sau đó, chúng tôi nghiên cứu mối quan hệ của tính đặt chỉnh với tính nửa liên tục trên của nghiệm xấp xỉ và sự tồn tại nghiệm (Định lý 3.2.8, Định lý 3.2.9 và Định lý 3.2.10) và thiết lập tính đặt chỉnh Levitin-Polyak và đặt chỉnh Levitin-Polyak tổng quát (Định lý 3.2.11).

- Từ các kết quả chính trong Mục 3.2, chúng tôi áp dụng cho bài toán mạng giao thông với ràng buộc cân bằng. Các kết quả thu được là Hệ quả 3.2.17 và Hệ quả 3.2.18.

Các kết quả trên đã được trích ra từ các bài báo:

1. L. Q. Anh and N. V. Hung (2018), Stability of solution mappings for parametric bilevel vector equilibrium problems, *Computational and Applied Mathematics*, **37**, 1537–1549.

2. L. Q. Anh and N. V. Hung (2018), Levitin-Polyak well-posedness for strong bilevel vector equilibrium problems and applications to traffic network problems with equilibrium constraints, *Positivity*, **22**, 1223–1239.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1 Kết luận

Luận án nghiên cứu về tính chất của tập nghiệm như tính liên tục, tính hội tụ, tính ổn định và đặt chỉnh cho một số bài toán liên quan đến tối ưu bao gồm bài toán cân bằng, bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán cân bằng hai mức, bài toán bất đẳng thức biến phân với ràng buộc cân bằng, bài toán tối ưu với ràng buộc cân bằng và bài toán mạng giao thông với ràng buộc cân bằng. Kết quả đạt được trong luận án này là.

1. Thiết lập được các hàm đánh giá cho các bài toán tựa cân bằng (QEP_1) và (QEP_2). Trên cơ sở hàm đánh giá, chúng tôi thiết lập giả thiết căn bản (H_p) và (H_h). Sau đó, chúng tôi nghiên cứu các tính chất liên tục của ánh xạ nghiệm cho các bài toán này. Trong mục áp dụng, chúng tôi nghiên cứu bài toán bất đẳng thức tựa biến phân loại Minty và Stampacchia (MQVI) và (SQVI).

2. Thiết lập được các dãy hàm đánh giá cho các bài toán tựa cân bằng (WQEP) và (WQEP_n) và khảo sát tính liên tục của chúng. Nghiên cứu tính hội tụ trên, hội tụ dưới và hội tụ theo nghĩa Painlev*é* - Kuratowski của tập nghiệm của bài toán (WQEP) và (WQEP_n) trên cơ sở giả thiết căn bản (H_h). Trong phần áp dụng, chúng tôi cũng thiết lập và nghiên cứu cho dãy bài toán bất đẳng thức tựa biến phân loại (QVI) và $(\mathrm{QVI})_n$.

3. Thu được các kết quả là các tính nửa liên tục và liên tục của bài toán cân bằng hai mức véctơ, bài toán bất đẳng thức biến phân với ràng buộc cân bằng và bài toán tối ưu với ràng buộc cân bằng.

4. Nghiên cứu mối quan hệ của tính đặt chỉnh với tính nửa liên tục trên của nghiệm xấp xỉ của bài toán cân bằng hai mức véctơ với nón di động và mô tả mêtric các đặt chỉnh Levitin-Polyak và đặt chỉnh Levitin-Polyak tổng quát cho bài toán này. Bài toán mạng giao thông với ràng buộc cân bằng là cũng được chúng tôi nghiên cứu trong mục áp dụng.

2 Kiến nghị

Trong thời gian tới, chúng tôi mong muốn tiếp tục nghiên cứu các vấn đề sau:

1. Nghiên cứu về sự tồn tại nghiệm cho các bài toán liên quan đến tối ưu như bài toán mạng giao thông, bài toán tối ưu, bài toán cân bằng, bài toán bao hàm biến phân, bài toán quan hệ biến phân và các bài toán hai mức tương ứng.

2. Nghiên cứu tính chất ổn định nghiệm cho một số bài toán liên quan đến tối ưu với các giả thiết yếu hơn.

3. Nghiên cứu các dạng hội tụ khác nhau cho một số bài toán liên quan đến tối ưu bằng việc sử dụng các loại hội tụ của các dãy tập và dãy hàm khác nhau.

4. Nghiên cứu tính đặt chỉnh cho các bài toán lớn hơn như bài toán bao hàm biến phân và bài toán quan hệ biến phân với một số giả thiết phù hợp.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH CỦA NGHIÊN CỨU SINH LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

1. L. Q. Anh and N. V. Hung (2018), Gap functions and Hausdorff continuity of solution mappings to parametric strong vector quasiequilibrium problems, *Journal of Industrial and Management Optimization*, **14**, 65-79. (SCI-E)

2. L. Q. Anh and N. V. Hung (2018), Stability of solution mappings for parametric bilevel vector equilibrium problems, *Computational and Applied Mathematics*, **37**, 1537–1549. (SCI-E)

3. L. Q. Anh, T. Bantaojai, N. V. Hung, V. M. Tam and R. Wangkeeree (2018), Painlevé-Kuratowski convergences of the solution sets for generalized vector quasiequilibrium problems, *Computational and Applied Mathematics*, **37**, 3832–3845. (SCI-E)

4. L. Q. Anh and N. V. Hung (2018), Levitin-Polyak well-posedness for strong bilevel vector equilibrium problems and applications to traffic network problems with equilibrium constraints, *Positivity*, **22**, 1223–1239. (SCI-E)

CÁC KẾT QUẢ CỦA LUẬN ÁN ĐÃ ĐƯỢC BÁO CÁO TẠI

1. Hội thảo Tối ưu và Tính toán khoa học tại Ba vì, Hà Nội, 21-23/4/2016, 20-22/4/2017

2. Hội nghị Quốc tế lần thứ 9 về Điểm bất động và tối ưu tại KMUTT, Bangkok, Thailand, 19-22/5/2016

3. Hội thảo Quốc tế về các xu hướng mới trong Giải tích biến phân, Tối ưu và Ứng dụng tại Quy Nhơn, 7-10/12/2016

4. Đại hội Toán học toàn quốc lần thứ 9 tại Nha Trang 14-18/8/2018.

5. Seminar tổ Giải tích, Khoa Sư phạm, Đại học Cần Thơ từ năm 2015 đến năm 2018

6. Seminar tổ Toán ứng dụng, Đại học Khoa học Tự nhiên TPHCM

7. Seminar của Tổ Giải tích thuộc Viện Sư phạm Tự nhiên Trường Đại học Vinh.