BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

DƯƠNG XUÂN GIÁP

CÁC ĐỊNH LÝ ERGODIC VÀ LUẬT SỐ LỚN ĐỐI VỚI MẢNG CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN ĐA TRỊ

Chuyên ngành: Lý thuyết xác suất và Thống kê toán học
Mã số: 62. 46. 01. 06

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

NGHỆ AN - 2016

Luận án được hoàn thành tại Trường Đại học Vinh

Người hướng dẫn khoa học: 1. GS. TS. Nguyễn Văn Quảng

2. GS. Charles Castaing

Phản biện 1: GS. TSKH. Đặng Hùng Thắng

Đại học Khoa học tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội

Phản biện 2: PGS. TS. Trần Hùng Thao

Viện Toán học - Viện Khoa học Công nghệ Việt Nam

Phản biện 3: TS. Lê Hồng Sơn

Đại học Sư phạm Kỹ thuật Vinh

Luận án được bảo vệ tại Hội đồng chấm luận án cấp trường họp tại Trường Đại học Vinh

Vào hồi .... ngày .... tháng .... năm ....

Có thể tìm hiểu luận án tại:

- Thư viện Quốc gia Việt Nam
- Trung tâm Thông tin - Thư viện Nguyễn Thúc Hào thuộc Trường Đại học Vinh

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Thời gian gần đây, định lý ergodic và luật số lớn đối với các biến ngẫu nhiên đa trị đã được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu và có nhiều ứng dụng trong tối ưu ngẫu nhiên, thống kê, toán kinh tế, y học và một số lĩnh vực khác. Biến ngẫu nhiên đa trị là sự mở rộng của phần tử ngẫu nhiên. Chính vì vậy, việc nghiên cứu định lý ergodic và luật số lớn cho các biến ngẫu nhiên đa trị không chỉ có ý nghĩa lý thuyết mà còn có ý nghĩa thực tiễn.

Thực tiễn đòi hỏi chúng ta nghiên cứu về mảng nhiều chiều các biến ngẫu nhiên. Đối với cấu trúc nhiều chiều, quan hệ thứ tự thông thường trên tập các chỉ số không có tính chất tuyến tính. Do đó, khi mở rộng các định lý giới hạn đối với các biến ngẫu nhiên đa trị từ trường hợp dãy sang trường hợp mảng nhiều chỉ số ứng với $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$ hoặc $\mathbf{n}_{\min} \to \infty$, chúng ta sẽ gặp nhiều điều bất thường. Điều này góp phần làm cho các kết quả nghiên cứu về các định lý giới hạn đa trị dạng luật số lớn và dạng định lý ergodic đối với cấu trúc nhiều chiều có nhiều ý nghĩa.

Lý thuyết ergodic bắt nguồn từ ngành cơ học thống kê. Nghiên cứu các định lý ergodic được bắt đầu vào những năm 1931-1932 bởi G. D. Birkhoff và J. v. Neumann. Trong mấy thập kỷ gần đây, định lý ergodic Birkhoff đã được mở rộng theo hai hướng chính: cho cấu trúc nhiều chiều và cho các hàm đa trị. Theo hướng thứ nhất, đầu tiên là vào năm 1951, N. Dunford và A. Zygmund đã thiết lập định lý ergodic Birkhoff đối với họ không giao hoán các phép biến đổi bảo toàn độ đo tương ứng cho các trường hợp tham số rời rạc và tham số liên tục. Kết quả này sau đó được N. Dunford, J. T. Schwartz (năm 1956) và N. A. Fava (năm 1972) tổng quát lên cho trường hợp toán tử. Các kết quả trên tiếp tục được mở rộng cho trường hợp tổng có trọng số trong các công trình của R. L. Jones và J. Olsen (năm 1994), M. Lin và M. Weber (2007), F. Mukhamedov, M. Mukhamedov và S. Temir (năm 2008), ... Theo hướng thứ hai, vào năm 1991, J. Bán thiết lập định lý ergodic Birkhoff cho các biến ngẫu nhiên nhận giá trị tập compact hoặc giá trị mờ trên không gian Banach ứng với hội tụ theo khoảng cách Hausdorff. Cho tới năm 2003, C. Choirat, C. Hess và R. A. Seri thu được định lý ergodic Birkhoff cho các biến ngẫu nhiên đa trị nhận giá trị tập lồi ứng với hội tụ Kuratowski. Gần đây, vào năm 2011, H. Ziat chứng minh định lý ergodic Birkhoff cho các biến ngẫu nhiên đa trị theo các loại hội tụ: Mosco, Wijsman và Slice. Do đó, nghiên cứu định lý ergodic Birkhoff cho cả cấu trúc nhiều chiều và cho các hàm đa trị đang là vấn đề có tính thời sự.

Luật số lớn đa trị được chứng minh lần đầu tiên vào năm 1975 bởi Z. Artstein và R. A. Vitale cho các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối, nhận giá trị trên không gian các tập con compact của $\mathbb{R}^d$, ứng với hội tụ theo khoảng cách Hausdorff. Kết quả này sau đó được mở rộng theo hai hướng chính: cho các biến ngẫu nhiên nhận giá trị tập compact và cho các biến ngẫu nhiên nhận giá trị tập đóng. Theo hướng thứ nhất, chúng ta có thể tham khảo trong các công trình của N. Cressie (năm 1978), C. Hess (năm 1979), M. L. Puri và D. A. Ralescu (năm 1983), F. Hiai (năm 1984), Z. Artstein và J. C. Hansen (năm 1985), P. Terán và I. Molchanov (năm 2006), ... Theo hướng thứ hai, luật số lớn được chứng minh đầu tiên vào năm 1981 bởi Z. Artstein và S. Hart cho hội tụ Kuratowski đối với các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối, nhận giá trị trên không gian các tập con đóng của $\mathbb{R}^d$. Sau đó nó được tiếp tục nghiên cứu bởi F. Hiai và C. Hess cho hội tụ Mosco và Wijsman. Cho đến nay, nghiên cứu về luật số lớn cho các biến ngẫu nhiên đa trị vẫn là một vấn đề có tính thời sự của lý thuyết xác suất.

Luật số lớn đa trị chủ yếu tập trung nghiên cứu các biến ngẫu nhiên độc lập. Tuy nhiên, thực tế không phải lúc nào chúng ta cũng có thể giả thiết được rằng các biến ngẫu nhiên là độc lập. Một hướng phát triển của luật số lớn đa trị là nghiên cứu luật số lớn đối với dãy và mảng các biến ngẫu nhiên đa trị mà điều kiện độc lập được thay thế bởi các điều kiện phụ thuộc như độc lập đôi một, phụ thuộc hoán đổi được, phụ thuộc 2-hoán đổi được. Đây là một hướng nghiên cứu có giá trị về mặt thực tiễn.

Các định lý giới hạn dạng luật số lớn và dạng định lý ergodic trong xác suất đa trị thường được nghiên cứu cho các biến ngẫu nhiên nhận giá trị trên không gian các tập con compact hoặc không gian các tập con lồi hoặc không gian các tập con đóng, ... của một không gian Banach. Do đó, các kết quả theo hướng nghiên cứu này và các chứng minh của chúng có sự kết hợp và giao thoa giữa lý thuyết xác suất, giải tích lồi và giải tích hàm.

Hội tụ theo khoảng cách Hausdorff thường được sử dụng khi nghiên cứu các biến ngẫu nhiên nhận giá trị tập compact. Đối với các biến ngẫu nhiên đa trị nhận giá trị là tập đóng, người ta thường sử dụng các loại hội tụ: Kuratowski, Mosco và Wijsman. Hội tụ Kuratowski phù hợp cho việc thiết lập luật số lớn đa trị đối với các không gian hữu hạn chiều. Hội tụ Mosco là một mở rộng của hội tụ Kuratowski đối với không gian Banach. Loại hội tụ này phù hợp cho các không gian phản xạ và có ứng dụng thú vị trong các bất đẳng thức biến phân. Với mở rộng phù hợp

cho các không gian không phản xạ, hội tụ Wijsman đã được giới thiệu và thích hợp cho việc nghiên cứu về tốc độ hội tụ và còn được sử dụng để chứng minh luật số lớn cho hội tụ Slice-một loại hội tụ có nhiều ứng dụng trong tối ưu ngẫu nhiên. Do vậy, nghiên cứu các định lý giới hạn cho các biến ngẫu nhiên đa trị theo các loại hội tụ Mosco và Wijsman mang tới nhiều điều thú vị và ý nghĩa.

Với các lý do nêu trên, chúng tôi chọn đề tài nghiên cứu cho luận án của mình là: **"Các định lý ergodic và luật số lớn đối với mảng các biến ngẫu nhiên đa trị"**.

2. Mục đích nghiên cứu

Mục đích của luận án là thiết lập định lý ergodic Birkhoff dạng nhiều chiều, thiết lập luật số lớn đối với mảng hai chỉ số và mảng tam giác các biến ngẫu nhiên đa trị nhận giá trị trên không gian các tập con đóng của không gian Banach thực, khả ly với các giả thiết khác nhau.

3. Đối tượng nghiên cứu

- Định lý ergodic Birkhoff dạng nhiều chiều.
- Luật số lớn đối với mảng các biến ngẫu nhiên đa trị.

4. Phạm vi nghiên cứu

Luận án tập trung nghiên cứu định lý ergodic Birkhoff dạng nhiều chiều, luật số lớn đối với mảng hai chỉ số và mảng tam giác các biến ngẫu nhiên đa trị nhận giá trị trên không gian các tập con đóng của một không gian Banach thực, khả ly. Các loại hội tụ được xét đến là hội tụ Mosco và hội tụ Wijsman. Đối với luật số lớn đa trị, các biến ngẫu nhiên đa trị được giả thiết độc lập, hoặc độc lập đôi một, hoặc phụ thuộc 2-hoán đổi được.

5. Phương pháp nghiên cứu

Chúng tôi sử dụng phối hợp các phương pháp nghiên cứu lý thuyết thuộc các chuyên ngành *lý thuyết xác suất*, *giải tích lồi* và *giải tích hàm* như: kỹ thuật lồi hóa, dạng định lý Stolz, ...

6. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn

Các kết quả của luận án góp phần làm phong phú thêm cho hướng nghiên cứu về các định lý giới hạn trong xác suất đa trị.

Luận án là tài liệu tham khảo cho sinh viên, học viên cao học và nghiên cứu sinh chuyên ngành Lý thuyết xác suất và Thống kê toán học.

7. Tổng quan và cấu trúc luận án

7.1. Tổng quan về luận án

Trong luận án này, chúng tôi thiết lập các định lý giới hạn ứng với tôpô Mosco và tôpô Wijsman theo dạng định lý ergodic Birkhoff và dạng luật số lớn đối với mảng các biến ngẫu nhiên đa trị nhận giá trị trên không gian các tập con đóng của không gian Banach thực, khả ly.

Trước hết chúng tôi giới thiệu một số khái niệm cơ bản về xác suất trên không gian các tập con đóng của một không gian Banach. Sau đó, chúng tôi chứng minh một số kết quả về hội tụ Mosco và hội tụ Wijsman đối với mảng nhiều chiều các tập con đóng của không gian Banach và đối với mảng nhiều chiều các biến ngẫu nhiên đa trị.

Đối với định lý ergodic, chúng tôi thiết lập định lý ergodic Birkhoff đối với cấu trúc nhiều chiều cho các trường hợp: đơn trị và đa trị. Nói riêng, định lý ergodic Birkhoff đa trị được chúng tôi thiết lập cho cấu trúc hai chiều.

Đối với luật số lớn cho mảng hai chỉ số các biến ngẫu nhiên đa trị, chúng tôi nghiên cứu cho trường hợp $m \vee n \to \infty$. Kết hợp dạng định lý Stolz cho mảng hai chỉ số, tính chất về sự hội tụ khi $m \vee n \to \infty$, kỹ thuật lồi hóa cho mảng hai chỉ số và các bổ đề chứng minh trước đó, chúng tôi thiết lập được luật số lớn theo các loại hội tụ Mosco và Wijsman cho mảng hai chiều các biến ngẫu nhiên đa trị. Các biến ngẫu nhiên được giả thiết độc lập đôi một và cùng phân phối, hoặc độc lập và nhận giá trị trên không gian các tập con đóng của không gian Rademacher dạng p, hoặc phụ thuộc 2-hoán đổi được.

Đối với luật số lớn cho mảng tam giác các biến ngẫu nhiên đa trị, chúng tôi thiết lập luật số lớn theo các loại hội tụ Mosco và Wijsman cho các biến ngẫu nhiên thỏa mãn: độc lập theo hàng và nhận giá trị trên không gian các tập con đóng của không gian Rademacher dạng p. Để thu được các kết quả trên, chúng tôi thiết lập dạng định lý Stolz cho trường hợp mảng tam giác.

Để thiết lập định lý ergodic Birkhoff và luật số lớn cho biến ngẫu nhiên đa trị ứng với hội tụ Mosco và hội tụ Wijsman, chúng tôi mở rộng kỹ thuật lồi hóa từ trường hợp dãy sang các trường hợp mảng hai chỉ số và mảng tam giác.

7.2. Cấu trúc của luận án

Ngoài các phần Một số ký hiệu thường dùng trong luận án, Mở đầu, Kết luận chung và kiến nghị, Danh mục công trình liên quan trực tiếp đến luận án và Tài liệu tham khảo, nội dung chính của luận án được trình bày trong bốn chương.

Chương 1 được dành để giới thiệu một số kiến thức cơ bản của không gian các tập con đóng của không gian Banach, các tính chất về giải tích lồi và giải tích hàm, thiết lập các kết quả hội tụ đối với các tôpô Mosco và Wijsman cho mảng các tập con đóng của một không gian Banach và cho mảng các biến ngẫu nhiên đa trị. Mục 1.1 trình bày phần kiến thức chuẩn bị bao gồm các ký hiệu, các định nghĩa và các khái niệm cơ bản liên quan đến nội dung của cả luận án. Mục 1.2 trình bày định nghĩa các loại hội tụ thường gặp trên không gian các tập con đóng của không gian Banach và chứng minh một số tính chất về hội tụ Mosco và hội tụ Wijsman cho mảng nhiều chỉ số. Mục 1.3 được dành để thiết lập các kết quả hội tụ theo các tôpô Mosco và Wijsman đối với mảng nhiều chỉ số các biến ngẫu nhiên đa trị. Các kết quả này được sử dụng để chứng minh định lý ergodic Birkhoff và luật số lớn đa trị ở các chương tiếp theo.

Chương 2 trình bày về định lý ergodic Birkhoff đối với cấu trúc nhiều chiều cho biến ngẫu nhiên đơn trị và đa trị. Mục 2.1 giới thiệu một số khái niệm và tính chất cơ bản của lý thuyết ergodic phục vụ cho nội dung chính của chương. Trong mục 2.2, chúng tôi thiết lập định lý ergodic Birkhoff dạng nhiều chiều cho phần tử ngẫu nhiên nhận giá trị trên không gian Banach thực và khả ly. Đây là kết quả quan trọng để thiết lập định lý ergodic Birkhoff đa trị có cấu trúc nhiều chiều. Mục 2.3 trình bày định lý ergodic Birkhoff dạng hai chiều cho biến ngẫu nhiên đa trị theo các loại hội tụ Mosco và Wijsman. Trong mục này, chúng tôi còn chứng minh định lý ergodic Birkhoff đa trị dạng nhiều chiều đối với trường hợp phép biến đổi bảo toàn độ đo không được giả thiết là ergodic. Mục 2.4 trình bày định lý ergodic Birkhoff dạng hai chiều cho biến ngẫu nhiên mờ theo hội tụ Mosco.

Chương 3 được dành để nghiên cứu luật số lớn đối với mảng hai chiều các biến ngẫu nhiên đa trị theo các loại hội tụ Mosco và Wijsman. Mục 3.1 trình bày các bổ đề cần thiết cho chứng minh các kết quả chính của Chương 3. Mục 3.2 được dành để thiết lập luật số lớn đối với mảng hai chỉ số các biến ngẫu nhiên đa trị cho các trường hợp: độc lập đôi một cùng phân phối, hoặc độc lập và nhận giá trị trên không gian các tập con đóng của không gian Rademacher dạng p, hoặc phụ thuộc 2-hoán đổi được.

Chương 4 trình bày về luật số lớn đối với mảng tam giác các biến ngẫu nhiên đa trị theo các loại hội tụ Mosco và Wijsman. Mục 4.1 thiết lập dạng định lý Stolz cho trường hợp mảng tam giác. Mục 4.2 nghiên cứu luật số lớn cho mảng tam giác các biến ngẫu nhiên đa trị thỏa mãn: độc lập theo hàng và nhận giá trị trên không gian các tập con đóng của không gian Rademacher dạng p.

CHƯƠNG 1

MỘT SỐ TÍNH CHẤT VỀ HỘI TỤ MOSCO VÀ HỘI TỤ WIJSMAN

Trong chương này, chúng tôi giới thiệu một số khái niệm cơ bản về xác suất trên không gian các tập con đóng của một không gian Banach, nghiên cứu các loại hội tụ và các tính chất cần thiết về giải tích hàm, giải tích lồi trên không gian này. Chúng tôi thiết lập một số kết quả hội tụ liên quan tới các tôpô Mosco và Wijsman đối với mảng nhiều chỉ số các tập con đóng của một không gian Banach thực, khả ly và đối với mảng nhiều chỉ số các biến ngẫu nhiên đa trị. Các kết quả chính của chương được viết dựa trên bài báo [1].

1.1. Một số kiến thức chuẩn bị

Trong luận án này, nếu không nói gì thêm, ta luôn giả thiết rằng $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ là một không gian xác suất, $\mathcal{F}$ là một σ-đại số con của $\mathcal{A}$, $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$ là không gian Banach thực và khả ly, $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}$ là σ-đại số Borel của $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}^*$ là không gian đối ngẫu của $\mathfrak{X}$. Ký hiệu $c(\mathfrak{X})$ là họ tất cả các tập con khác rỗng và đóng của $\mathfrak{X}$.

Ký hiệu $\mathbb{N}$ là tập các số nguyên dương, $\mathbb{Q}$ là tập các số hữu tỉ, $\mathbb{R}$ là tập các số thực và $\mathbb{R}_+$ là tập các số thực không âm.

Với mỗi $d \in \mathbb{N}$, trên tập hợp $\mathbb{N}^d$, các phần tử $(1, 1, \ldots, 1)$, $(2, 2, \ldots, 2)$, $(m_1, m_2, \ldots, m_d)$, $(n_1, n_2, \ldots, n_d)$ lần lượt được ký hiệu bởi $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$. Giả sử $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_d) \in \mathbb{N}^d$, ta ký hiệu $|\mathbf{n}| = \prod_{i=1}^{d} n_i$, $\mathbf{n}_{\max} = \max\{n_i : i = 1, 2, \ldots, d\}$ và $\mathbf{n}_{\min} = \min\{n_i : i = 1, 2, \ldots, d\}$. Với hai số thực m và n, giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của chúng tương ứng được ký hiệu bởi $m \vee n$ và $m \wedge n$. Với mỗi $a \in \mathbb{R}$, lôgarit cơ số 2 của $a \vee 1$ được ký hiệu là $\log^+ a$. Với $\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, ta viết $\mathbf{m} \preceq \mathbf{n}$ (tương ứng, $\mathbf{m} \prec \mathbf{n}$) nếu $m_i \leqslant n_i$ (tương ứng, $m_i < n_i$) với mọi $i = 1, 2, ..., d$.

Với $A, B \subset \mathfrak{X}$, $\mathrm{cl}A$ và $\overline{\mathrm{co}}A$ tương ứng ký hiệu *bao đóng* và *bao lồi đóng* của A; *hàm khoảng cách* $d(\cdot, A)$ của A, *khoảng cách Hausdorff* $d_{\mathrm{H}}(A, B)$ của A và B, *hàm tựa* $s(\cdot, A)$ của A, *chuẩn* $\|A\|$ của A tương ứng được định nghĩa bởi

$$d(x, A) = \inf\{\|x - y\| \ : y \in A\}, (x \in \mathfrak{X}),$$
$$d_{\mathrm{H}}(A, B) = \max\{\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, A)\},$$
$$s(x^*, A) = \sup\{\langle x^*, y\rangle \ : y \in A\}, (x^* \in \mathfrak{X}^*),$$
$$\|A\| = \sup\{||x|| \ : x \in A\}.$$

Đặt $\mathbf{B}^* = \{x^* \in \mathfrak{X}^* : \|x^*\| \leq 1\}$ và $\mathbf{S}^* = \{x^* \in \mathfrak{X}^* : \|x^*\| = 1\}$. Khi đó, $\mathbf{B}^*$ và $\mathbf{S}^*$ tương ứng gọi là *hình cầu đơn vị đóng* và *mặt cầu đơn vị* của $\mathfrak{X}^*$.

Ký hiệu $\mathcal{P}(\mathfrak{X})$ là tập tất cả các tập con khác rỗng của $\mathfrak{X}$. Trên $\mathcal{P}(\mathfrak{X})$, ta trang bị các phép toán sau

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\},$$
$$\lambda A = \{\lambda a : a \in A\},$$

trong đó $A, B \in \mathcal{P}(\mathfrak{X})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Nói chung, không tồn tại phần tử đối của $A \in \mathcal{P}(\mathfrak{X})$ nên $\mathcal{P}(\mathfrak{X})$ không phải là một không gian tuyến tính ứng với phép toán lấy tổng và lấy tích vô hướng nêu trên.

σ-đại số trên $c(\mathfrak{X})$ sinh bởi các tập $U^- := \{C \in c(\mathfrak{X}) : C \cap U \neq \emptyset\}$ với U là tập mở của $\mathfrak{X}$, được gọi là *σ-đại số Effrös* và được ký hiệu là $\mathcal{B}_{c(\mathfrak{X})}$.

1.1.1 Định nghĩa. Ánh xạ $F : \Omega \to c(\mathfrak{X})$ được gọi là *$\mathcal{F}$-đo được* nếu với mọi $B \in \mathcal{B}_{c(\mathfrak{X})}$, $F^{-1}(B) \in \mathcal{F}$. Ánh xạ $\mathcal{F}$-đo được F còn được gọi là *biến ngẫu nhiên đa trị $\mathcal{F}$-đo được*. Nếu $\mathcal{F} = \mathcal{A}$ thì ta nói gọn F là *biến ngẫu nhiên đa trị*.

Các phép toán đối với các biến ngẫu nhiên đa trị được định nghĩa tương ứng là các phép toán trên $\mathcal{P}(\mathfrak{X})$ cho mỗi $\omega \in \Omega$.

Với mỗi biến ngẫu nhiên đa trị F, ta ký hiệu $\mathcal{A}_F = \{F^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}_{c(\mathfrak{X})}\}$. Khi đó $\mathcal{A}_F$ là σ-đại số con bé nhất của $\mathcal{A}$ mà F đo được. *Phân phối xác suất* của F là độ đo xác suất $\mathbb{P}_F$ trên $\mathcal{B}_{c(\mathfrak{X})}$ được xác định bởi $\mathbb{P}_F(B) = \mathbb{P}(F^{-1}(B)), B \in \mathcal{B}_{c(\mathfrak{X})}$.

1.1.3 Định nghĩa. Một họ các biến ngẫu nhiên đa trị $\{F_i : i \in I\}$ được gọi là *độc lập* (tương ứng, *độc lập đôi một*) nếu họ các σ-đại số sinh bởi chúng $\{\mathcal{A}_{F_i} : i \in I\}$ là độc lập (tương ứng, độc lập đôi một), và được gọi là *cùng phân phối* nếu tất cả các phân phối xác suất $\mathbb{P}_{F_i}$, $i \in I$ đều bằng nhau.

1.1.4 Định nghĩa. Một họ hữu hạn các biến ngẫu nhiên đa trị $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ được gọi là *hoán đổi được* nếu với mọi phép thế π của tập $\{1, 2, \ldots, n\}$ và mọi tập con $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ của $\mathcal{B}_{c(\mathfrak{X})}$,

$$\mathbb{P}(F_1 \in B_1, \ldots, F_n \in B_n) = \mathbb{P}(F_{\pi(1)} \in B_1, \ldots, F_{\pi(n)} \in B_n).$$

Một họ đếm được các biến ngẫu nhiên đa trị được gọi là *hoán đổi được* nếu mọi họ con hữu hạn của nó đều hoán đổi được.

1.1.5 Định nghĩa. Họ các biến ngẫu nhiên đa trị $\{F_i : i \in I\}$ được gọi là 2-*hoán đổi được* nếu với mọi $i_1, i_2, j_1, j_2 \in I$, $i_1 \neq i_2$, $j_1 \neq j_2$ và mọi $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_{c(\mathfrak{X})}$,

$$\mathbb{P}(F_{i_1} \in B_1, F_{i_2} \in B_2) = \mathbb{P}(F_{j_1} \in B_1, F_{j_2} \in B_2).$$

Mối quan hệ giữa tính độc lập cùng phân phối, tính độc lập đôi một cùng phân phối, tính hoán đổi được, tính 2-hoán đổi được và tính cùng phân phối của họ các biến ngẫu nhiên đa trị được thể hiện bởi sơ đồ sau:

$$\begin{tikzcd}
\text{độc lập cùng phân phối} \arrow[r] \arrow[d] & \text{độc lập đôi một cùng phân phối} \arrow[d] \\
\text{hoán đổi được} \arrow[r] & \text{2-hoán đổi được} \arrow[d] \\
 & \text{cùng phân phối}
\end{tikzcd}$$

Với mỗi $p \geq 1$, ký hiệu $\mathbf{L}^p(\mathcal{F}, \mathfrak{X})$ là không gian Banach các phần tử ngẫu nhiên $\mathcal{F}$-đo được $f : \Omega \to \mathfrak{X}$ sao cho $\| f \|_p = (\mathbb{E} \| f \|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty$. Nếu $\mathcal{F} = \mathcal{A}$ thì $\mathbf{L}^p(\mathcal{A}, \mathfrak{X})$ được viết gọn là $\mathbf{L}^p(\mathfrak{X})$. Nếu $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$ thì ta viết gọn $\mathbf{L}^p$ thay cho $\mathbf{L}^p(\mathbb{R})$.

Với mỗi $p \geq 1$ và mỗi biến ngẫu nhiên đa trị $\mathcal{F}$-đo được F, đặt

$$\mathcal{S}_F^p(\mathcal{F}) = \{f \in \mathbf{L}^p(\mathcal{F}, \mathfrak{X}) : f(\omega) \in F(\omega) \text{ h.c.c.}\}.$$

Trong trường hợp $\mathcal{F} = \mathcal{A}$ ta viết $\mathcal{S}_F^p(\mathcal{A})$ gọn lại là $\mathcal{S}_F^p$.

1.1.8 Định nghĩa. Biến ngẫu nhiên đa trị $F : \Omega \to c(\mathfrak{X})$ được gọi là *khả tích* nếu $\mathcal{S}_F^1$ khác rỗng.

Năm 1965, R. J. Aumann đã giới thiệu khái niệm kỳ vọng của biến ngẫu nhiên đa trị như sau. **1.1.9 Định nghĩa.** *Kỳ vọng* của biến ngẫu nhiên đa trị khả tích F, ký hiệu $\mathbb{E}F$, được định nghĩa bởi

$$\mathbb{E}F := \{\mathbb{E}f : f \in \mathcal{S}_F^1\},$$

trong đó $\mathbb{E}f$ là tích phân Bochner của phần tử ngẫu nhiên f.

Ngoài ra, với mỗi biến ngẫu nhiên đa trị $\mathcal{F}$-đo được F, ta định nghĩa

$$\mathbb{E}(F, \mathcal{F}) := \{\mathbb{E}f : f \in \mathcal{S}_F^1(\mathcal{F})\}.$$

1.1.10 Định nghĩa. Giả sử $\{r_j : j \geqslant 1\}$ là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối và $\mathbb{P}(r_1 = 1) = \mathbb{P}(r_1 = -1) = \frac{1}{2}$. Không gian $\mathfrak{X}$ được gọi là một *không gian Rademacher dạng p* ($p \in [1, 2]$) nếu tồn tại một hằng số $C > 0$ sao cho với mọi $i \geqslant 1$ và mọi $v_j \in \mathfrak{X}$ ($1 \leqslant j \leqslant i$) thì

$$\Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{j=1}^{i} r_j v_j\Big\|^p\Big)^{1/p} \leqslant C\Big(\sum_{j=1}^{i} \|v_j\|^p\Big)^{1/p}.$$

Với $\{x_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\} \subset \mathbb{R}$, ký hiệu

$$\liminf_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} x_{\mathbf{n}} = \sup_{k\geq 1} \inf_{\mathbf{n}_{\max}\geq k} x_{\mathbf{n}}, \qquad \limsup_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} x_{\mathbf{n}} = \inf_{k\geq 1} \sup_{\mathbf{n}_{\max}\geq k} x_{\mathbf{n}},$$
$$\liminf_{\mathbf{n}_{\min}\to\infty} x_{\mathbf{n}} = \sup_{k\geq 1} \inf_{\mathbf{n}_{\min}\geq k} x_{\mathbf{n}}, \qquad \limsup_{\mathbf{n}_{\min}\to\infty} x_{\mathbf{n}} = \inf_{k\geq 1} \sup_{\mathbf{n}_{\min}\geq k} x_{\mathbf{n}}.$$

Ký hiệu s (tương ứng, w) là *tôpô mạnh*, tức là tôpô sinh bởi chuẩn (tương ứng, *tôpô yếu*) trên $\mathfrak{X}$.

1.1.11 Định nghĩa. Ta nói rằng:

(a) Mảng $\{x_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\} \subset \mathbb{R}$ *hội tụ tới* $x \in \mathbb{R}$ khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$ nếu $\liminf_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} x_{\mathbf{n}} = \limsup_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} x_{\mathbf{n}} = x$. Khi đó, ta ký hiệu $\lim_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} x_{\mathbf{n}} = x$, hoặc $x_{\mathbf{n}} \to x$ khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$.

(b) Mảng $\{x_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\} \subset \mathfrak{X}$ *hội tụ tới* $x \in \mathfrak{X}$ khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$ nếu $\lim_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} \|x_{\mathbf{n}} - x\| = 0$. Khi đó, ta ký hiệu s-$\lim_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} x_{\mathbf{n}} = x$, hoặc $x_{\mathbf{n}} \xrightarrow{s} x$ khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$ (để cho gọn, ta thường lược bỏ ký hiệu s).

(c) Mảng $\{x_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\} \subset \mathfrak{X}$ *hội tụ yếu tới* $x \in \mathfrak{X}$ khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$ nếu $\lim_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} \langle x^*, x_{\mathbf{n}}\rangle = \langle x^*, x\rangle$ với mọi $x^* \in \mathfrak{X}^*$. Khi đó, ta ký hiệu w-$\lim_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} x_{\mathbf{n}} = x$, hoặc $x_{\mathbf{n}} \xrightarrow{w} x$ khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$.

Sự hội tụ khi $\mathbf{n}_{\min} \to \infty$ được phát biểu tương tự.

1.1.15 Định nghĩa. Mảng các phần tử ngẫu nhiên $\{f_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ được gọi là *hội tụ theo trung bình cấp r* ($r > 0$) tới phần tử ngẫu nhiên f khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$ (tương ứng, $\mathbf{n}_{\min} \to \infty$) và được ký hiệu $f_{\mathbf{n}} \to f$ trong $\mathbf{L}^r$ khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$ (tương ứng, $\mathbf{n}_{\min} \to \infty$), nếu $\mathbb{E}\|f_{\mathbf{n}} - f\|^r \to 0$ khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$ (tương ứng, $\mathbf{n}_{\min} \to \infty$).

1.2. Một số tính chất về hội tụ Mosco và hội tụ Wijsman đối với mảng các tập con đóng của không gian Banach

Đầu tiên, chúng tôi giới thiệu một số loại hội tụ quan trọng trên không gian các tập con đóng của không gian Banach. Giả sử $d \in \mathbb{N}$ và $\{A_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng trên $c(\mathfrak{X})$. Để thuận tiện, các tôpô s và w trên $\mathfrak{X}$ được ký hiệu chung là t. Ký hiệu

$$t\text{-}\liminf_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}} = \{x \in \mathfrak{X} : x = t\text{-}\lim_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} x_{\mathbf{n}}, \text{ với } x_{\mathbf{n}} \in A_{\mathbf{n}}\},$$

$$t\text{-}\limsup_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}} = \{x \in \mathfrak{X} : x = t\text{-}\lim_{\mathbf{k}_{\max}\to\infty} x_{\mathbf{k}},\ \text{với } x_{\mathbf{k}} \in A_{\mathbf{n}(\mathbf{k})}\},$$

trong đó $\{A_{\mathbf{n}(\mathbf{k})} : \mathbf{k} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng con của mảng $\{A_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ (ở đây, *mảng con* được hiểu theo nghĩa là dãy con theo từng tọa độ).

Dễ thấy rằng $t\text{-}\liminf_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}} \subset t\text{-}\limsup_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}}$ và $s\text{-}\liminf_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}} \subset w\text{-}\limsup_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}}$.

1.2.1 Định nghĩa. Giả sử $A \in c(\mathfrak{X})$. Mảng $\{A_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\} \subset c(\mathfrak{X})$ được gọi là

(*a*) *hội tụ theo khoảng cách Hausdorff* tới A khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$ và được ký hiệu là $\text{H-}\lim_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}} = A$, nếu $\lim_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} d_{\mathrm{H}}(A_{\mathbf{n}}, A) = 0$;

(*b*) *hội tụ yếu* tới A khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$ và được ký hiệu là $\text{W-}\lim_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}} = A$, nếu $\lim_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} s(x^*, A_{\mathbf{n}}) = s(x^*, A)$ với mọi $x^* \in \mathfrak{X}^*$;

(*c*) *hội tụ Wijsman* tới A khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$ và được ký hiệu là $\text{Wijs-}\lim_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}} = A$, nếu $\lim_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} d(x, A_{\mathbf{n}}) = d(x, A)$ với mọi $x \in \mathfrak{X}$;

(*d*) *hội tụ Kuratowski* tới A ứng với tôpô t khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$ và được ký hiệu là $t\text{-}\lim_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}} = A$, nếu $t\text{-}\limsup_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}} = t\text{-}\liminf_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}} = A$;

(*e*) *hội tụ Mosco* tới A khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$ và được ký hiệu là $\text{M-}\lim_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}} = A$, nếu

$$w\text{-}\limsup_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}} = s\text{-}\liminf_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}} = A.$$

Sự hội tụ khi $\mathbf{n}_{\min} \to \infty$ được phát biểu tương tự.

Tính chất sau đây được chúng tôi đưa ra để chứng minh các kết quả chính của luận án.

1.2.3 Định lý. *Giả sử* $\{A_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\} \subset c(\mathfrak{X})$. *Khi đó, nếu* $s\text{-}\liminf_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}} \neq \emptyset$ *thì* $s\text{-}\liminf_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}} \in c(\mathfrak{X})$.

Định lý tiếp theo được chúng tôi thiết lập để chứng minh phần "lim sup" của hội tụ Mosco đối với luật số lớn cho mảng các biến ngẫu nhiên đa trị.

1.2.5 Định lý. *Giả sử* $\{A, A_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\} \subset c(\mathfrak{X})$ *và* D^* *là một tập con đếm được của* $\mathbf{S}^*$ *sao cho* $x \in \overline{\mathrm{co}}A$ *khi và chỉ khi* $\langle x^*, x\rangle \leq s(x^*, A)$ *với mọi* $x^* \in D^*$. *Khi đó, nếu* $\limsup_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} s(x^*, A_{\mathbf{n}}) \leq s(x^*, A)$ *với mọi* $x^* \in D^*$, *thì*

$$w\text{-}\limsup_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}} \subset \overline{\mathrm{co}}A.$$

Kết quả sau được dùng để chứng minh phần "lim inf" của hội tụ Wijsman đối với cấu trúc nhiều chỉ số.

1.2.7 Định lý. *Giả sử* $\{A, A_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\} \subset c(\mathfrak{X})$ *và giả sử* D^* *là một tập con đếm được, trù mật của* $\mathbf{B}^*$ *sao cho* $d(x, \overline{\text{co}}A) = \sup_{x^* \in D^*} \{\langle x^*, x\rangle - s(x^*, \overline{\text{co}}A)\}$, *với mọi* $x \in \mathfrak{X}$. *Khi đó, nếu với mọi* $x^* \in D^*$, $\limsup_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} s(x^*, A_{\mathbf{n}}) \le s(x^*, A)$ *thì với mọi* $x \in \mathfrak{X}$

$$\liminf_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} d(x, A_{\mathbf{n}}) \ge d(x, \overline{\text{co}}A).$$

Nghiên cứu mối liên hệ giữa hội tụ Wijsman và hội tụ Kuratowski cho trường hợp mảng nhiều chiều, chúng tôi thu được kết quả thể hiện qua định lý sau đây.

1.2.8 Định lý. *Giả sử* $\{A, A_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\} \subset c(\mathfrak{X})$. *Khi đó, nếu* Wijs-$\lim_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}} = A$ *thì* s-$\lim_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}} = A$.

1.3. Một số tính chất của hội tụ Mosco và hội tụ Wijsman đối với mảng các biến ngẫu nhiên đa trị

Trong Định nghĩa 1.2.1, nếu ta thay $A_{\mathbf{n}}$ bởi $F_{\mathbf{n}}(\omega)$ và A bởi $F(\omega)$ với ω thuộc vào một tập có xác suất 1, trong đó F, $F_{\mathbf{n}}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ là các biến ngẫu nhiên đa trị, thì ta có khái niệm hội tụ hầu chắc chắn cho các biến ngẫu nhiên đa trị.

Dựa trên các kết quả thu được ở mục 1.2, chúng tôi thu được hai định lý sau đây về phần "lim sup" của hội tụ Wijsman cho trường hợp mảng nhiều chỉ số các biến ngẫu nhiên đa trị.

1.3.2 Định lý. *Giả sử* D *là một tập con đếm được, trù mật trên* $\mathfrak{X}$ *và* $F, F_{\mathbf{n}}$ $(\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d)$ *là các biến ngẫu nhiên đa trị. Nếu với mỗi* $x \in D$, $\limsup_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} d(x, F_{\mathbf{n}}(\omega)) \le d(x, F(\omega))$ h.c.c., *thì*

$$\limsup_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} d(x, F_{\mathbf{n}}(\omega)) \le d(x, F(\omega)) \text{ với mọi } x \in \mathfrak{X} \text{ h.c.c.}$$

1.3.3 Định lý. *Giả sử* $F, F_{\mathbf{n}}$ $(\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d)$ *là các biến ngẫu nhiên đa trị. Nếu* $F(\omega) \subset s$-$\liminf_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} F_{\mathbf{n}}(\omega)$ *h.c.c., thì*

$$\limsup_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} d(x, F_{\mathbf{n}}(\omega)) \le d(x, F(\omega)) \text{ với mọi } x \in \mathfrak{X} \text{ h.c.c.}$$

Sau đây là tính chất về hội tụ Wijsman đối với mảng nhiều chiều các biến ngẫu nhiên đa trị.

1.3.4 Định lý. *Giả sử* D *là một tập con đếm được, trù mật trên* $\mathfrak{X}$ *và* $F, F_{\mathbf{n}}$ $(\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d)$ *là các biến ngẫu nhiên đa trị. Khi đó, mảng* $\{F_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *hội tụ Wijsman tới* F *h.c.c. khi* $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$ *khi và chỉ khi với mỗi* $x \in D$,

$$d(x, F_{\mathbf{n}}(\omega)) \to d(x, F(\omega)) \text{ h.c.c. khi } \mathbf{n}_{\max} \to \infty.$$

1.4 Nhận xét. Các kết quả trong chương này đều được xét cho trường hợp hội tụ khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$. Đối với trường hợp hội tụ khi $\mathbf{n}_{\min} \to \infty$, ta có các kết quả tương tự.

Kết luận của Chương 1

Trong chương này, luận án đã giải quyết được những vấn đề sau:

- Chứng minh một số tính chất về hội tụ Mosco và hội tụ Wijsman đối với mảng nhiều chỉ số các tập con đóng của không gian Banach thực, khả ly.

- Thiết lập một số kết quả hội tụ cho mảng nhiều chỉ số các biến ngẫu nhiên đa trị đối với hội tụ Mosco và hội tụ Wijsman.

CHƯƠNG 2

ĐỊNH LÝ ERGODIC BIRKHOFF DẠNG NHIỀU CHIỀU

Trong chương này, chúng tôi giới thiệu một số khái niệm liên quan tới lý thuyết ergodic, thiết lập định lý ergodic Birkhoff dạng nhiều chiều trên không gian Banach thực, khả ly và thu được định lý ergodic Birkhoff đa trị dạng hai chiều cho biến ngẫu nhiên đa trị và cho biến ngẫu nhiên mờ. Các kết quả chính của chương được viết dựa trên bài báo [3].

2.1. Một số kiến thức chuẩn bị

2.1.1 Định nghĩa. (i) Một phép biến đổi $T : \Omega \to \Omega$ được gọi là *đo được* nếu $T^{-1}(A) \in \mathcal{A}$, với mọi $A \in \mathcal{A}$.

(ii) Một phép biến đổi $T : \Omega \to \Omega$ được gọi là *bảo toàn độ đo* nếu T là đo được và đồng thời $\mathbb{P}(T^{-1}(A)) = \mathbb{P}(A)$, với mọi $A \in \mathcal{A}$. Khi đó, ta nói $\mathbb{P}$ là *độ đo T-bất biến.*

(iii) Một tập $A \in \mathcal{A}$ được gọi là *T-bất biến* nếu $T^{-1}(A) = A$.

(iv) Một biến ngẫu nhiên f được gọi là *T-bất biến* nếu $f \circ T = f$.

(v) Một phép biến đổi bảo toàn độ đo $T : \Omega \to \Omega$ được gọi là *ergodic* nếu các tập T-bất biến chỉ có xác suất 0 hoặc 1; nghĩa là, với mọi $A \in \mathcal{A}$, điều kiện $T^{-1}(A) = A$ kéo theo $\mathbb{P}(A) = 0$ hoặc $\mathbb{P}(A) = 1$.

2.1.2 Nhận xét. Họ tất cả các tập T-bất biến lập thành một σ-đại số con của σ-đại số $\mathcal{A}$. Ta ký hiệu σ-đại số này là $\mathcal{I}_T$.

Nếu $T_1, T_2 : \Omega \to \Omega$ là các phép biến đổi bảo toàn độ đo thì tích $T_1 \circ T_2$ (còn được viết gọn là T_1T_2) cũng là phép biến đổi bảo toàn độ đo. Đặc biệt, nếu $T : \Omega \to \Omega$ là một phép biến đổi bảo toàn độ đo thì phép lặp T^n $(n \in \mathbb{N})$ cũng là một phép biến đổi bảo toàn độ đo.

Tiếp theo, chúng tôi giới thiệu một số khái niệm cơ sở của biến ngẫu nhiên mờ. Đây là một mở rộng của khái niệm biến ngẫu nhiên đa trị.

Ánh xạ $u : \mathfrak{X} \to [0, 1]$ được gọi là một *tập mờ* trên $\mathfrak{X}$.

Với mỗi tập mờ u, *tập α-mức* $L_\alpha u$ ($\alpha \in (0,1]$) được định nghĩa bởi

$$L_\alpha u = \{x \in \mathfrak{X} : u(x) \geq \alpha\}.$$

Ta còn định nghĩa $L_{\alpha^+} u = \{x \in \mathfrak{X} : u(x) > \alpha\}$, $\alpha \in [0,1)$.

Ký hiệu $\mathbf{F}(\mathfrak{X})$ là không gian các tập mờ $u : \mathfrak{X} \to [0,1]$ thỏa mãn

(1) u là chuẩn tắc, nghĩa là, tập 1-mức $L_1 u$ khác rỗng,

(2) u là nửa liên tục trên, nghĩa là, với mỗi $\alpha \in (0,1]$, tập α-mức $L_\alpha u$ là tập con đóng của $\mathfrak{X}$.

Trên $\mathbf{F}(\mathfrak{X})$, ta trang bị các phép toán sau

$$(u+v)(x) = \sup_{y+z=x} \min\{u(y), v(z)\},$$
$$(\lambda u)(x) = \begin{cases} u(\lambda^{-1}x) & \text{nếu } \lambda \neq 0, \\ \mathbb{I}_{\{0\}}(x) & \text{nếu } \lambda = 0, \end{cases}$$

trong đó $u, v \in \mathbf{F}(\mathfrak{X})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Bao lồi đóng $\overline{\text{co}}u$ của $u \in \mathbf{F}(\mathfrak{X})$ được định nghĩa như sau

$$\overline{\text{co}}u(x) = \sup\{\alpha \in (0,1] : x \in \overline{\text{co}}(L_\alpha u)\}.$$

2.1.3 Định nghĩa. Ánh xạ $\tilde{F} : \Omega \to \mathbf{F}(\mathfrak{X})$ được gọi là *biến ngẫu nhiên mờ* nếu $\{(\omega, x) : x \in L_\alpha(\tilde{F}(\omega))\} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}_{\mathfrak{X}}$, với mọi $\alpha \in (0,1]$.

Năm 1991, J. Bán đã chỉ ra rằng $\tilde{F}$ là biến ngẫu nhiên mờ thì $L_\alpha \tilde{F}$ là biến ngẫu nhiên đa trị, với mọi $\alpha \in (0,1]$.

2.1.4 Định nghĩa. *Kỳ vọng* của biến ngẫu nhiên mờ $\tilde{F}$, ký hiệu $\mathbb{E}\tilde{F}$, là một tập mờ trên $\mathfrak{X}$ thỏa mãn $L_\alpha\left(\mathbb{E}\tilde{F}\right) = \mathbb{E}\left(L_\alpha \tilde{F}\right)$ với mọi $\alpha \in (0,1]$.

2.2. Định lý ergodic Birkhoff dạng nhiều chiều đối với phần tử ngẫu nhiên nhận giá trị trên không gian Banach thực, khả ly

Năm 1951, N. Dunford chứng minh định lý ergodic Birkhoff dạng nhiều chiều cho trường hợp thực, trong đó giới hạn là một hàm khả tích. Kết quả này sau đó được N. Dunford, J. T. Schwartz (năm 1956) và N. A. Fava (năm 1972) mở rộng cho trường hợp các toán tử co. Trong phần tiếp theo, chúng tôi thiết lập định lý ergodic Birkhoff dạng nhiều chiều cho trường hợp phần tử ngẫu nhiên nhận giá trị trên không gian Banach thực, khả ly. Kết quả này chỉ ra rằng hàm giới hạn là kỳ vọng có điều kiện ứng với σ-đại số các tập bất biến.

2.2.2 Định lý. *Giả sử $T_1, T_2, \ldots, T_d$ là các phép biến đổi giao hoán, bảo toàn độ đo. Khi đó, nếu phần tử ngẫu nhiên f thỏa mãn $\mathbb{E}\left(\|f\|\left(\log^+\|f\|\right)^{d-1}\right) < \infty$, thì*

$$\frac{1}{n_1\ldots n_d}\sum_{i_1=0}^{n_1-1}\cdots\sum_{i_d=0}^{n_d-1} f(T_1^{i_1}\ldots T_d^{i_d}) \to \mathbb{E}(f|\mathcal{I}) \text{ h.c.c. khi } \mathbf{n}_{\min}\to\infty$$

trong đó $\mathcal{I} = \bigcap_{i=1}^{d}\mathcal{I}_{T_i}$. Hơn nữa, nếu T_s là ergodic với s nào đó thuộc $\{1, 2, \ldots, d\}$, thì $\mathbb{E}(f|\mathcal{I}) = \mathbb{E}f$ h.c.c.

2.3. Định lý ergodic Birkhoff dạng nhiều chiều đối với biến ngẫu nhiên đa trị

Sau đây là phần "lim inf" của hội tụ Mosco cho định lý ergodic Birkhoff dạng hai chiều đối với biến ngẫu nhiên đa trị.

2.3.3 Mệnh đề. *Giả sử F là một biến ngẫu nhiên đa trị thỏa mãn $\mathbb{E}(\|F\|\log^+\|F\|) < \infty$. Giả sử T_1, T_2 là hai phép biến đổi giao hoán sao cho với mọi $i \in \{1, 2\}$ và mọi $s \geq 1$, T_i^s là ergodic. Khi đó,*

$$\overline{\text{co}}\mathbb{E}F \subset s\text{-}\liminf_{m\wedge n\to\infty}\frac{1}{mn}\text{cl}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}F(T_1^iT_2^j(\omega)) \text{ h.c.c.}$$

Nếu các phép biến đổi bảo toàn độ đo không được giả thiết là ergodic, chúng tôi thu được kết quả sau đây.

2.3.4 Định lý. *Giả sử $T_1, T_2, \ldots, T_d$ là các phép biến đổi giao hoán, bảo toàn độ đo. Khi đó, nếu F là biến ngẫu nhiên đa trị thỏa mãn $\mathbb{E}\left(\|F\|\left(\log^+\|F\|\right)^{d-1}\right) < \infty$, thì*

$$\mathbb{E}(F|\mathcal{I}) \subset s\text{-}\liminf_{\mathbf{n}_{\min}\to\infty}\frac{1}{n_1\ldots n_d}\text{cl}\sum_{i_1=0}^{n_1-1}\cdots\sum_{i_d=0}^{n_d-1}F(T_1^{i_1}\ldots T_d^{i_d}(\omega)) \text{ h.c.c.},$$

trong đó $\mathcal{I} = \bigcap_{i=1}^{d}\mathcal{I}_{T_i}$.

Mệnh đề sau đây là phần "lim sup" của hội tụ Mosco của định lý ergodic Birkhoff dạng hai chiều đối với biến ngẫu nhiên đa trị.

2.3.5 Mệnh đề. *Giả sử F là một biến ngẫu nhiên đa trị thỏa mãn $\mathbb{E}(\|F\|\log^+\|F\|) < \infty$ và T_1, T_2 là hai phép biến đổi giao hoán, bảo toàn độ đo sao cho T_i là ergodic với i nào đó thuộc $\{1, 2\}$. Khi đó,*

$$w\text{-}\limsup_{m\wedge n\to\infty}\frac{1}{mn}\text{cl}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}F(T_1^iT_2^j(\omega)) \subset \overline{\text{co}}\mathbb{E}F \text{ h.c.c.}$$

Sau đây là định lý ergodic Birkhoff dạng hai chiều đối với biến ngẫu nhiên đa trị theo các loại hội tụ Mosco và Wijsman.

2.3.6 Định lý. *Giả sử F là một biến ngẫu nhiên đa trị thỏa mãn $\mathbb{E}\left(\|F\|\log^+\|F\|\right) < \infty$. Giả sử T_1, T_2 là hai phép biến đổi giao hoán sao cho T_i^s là ergodic với mọi $i \in \{1,2\}$ và mọi $s \geq 1$. Khi đó*

$$\frac{1}{mn}\mathrm{cl}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} F\left(T_1^i T_2^j(\omega)\right) \to \overline{\mathrm{co}}\mathbb{E}F \text{ h.c.c. khi } m \wedge n \to \infty$$

theo các loại hội tụ Mosco và Wijsman.

2.4. Định lý ergodic Birkhoff dạng hai chiều đối với biến ngẫu nhiên mờ

Trong mục này, sử dụng Định lý 2.3.6, chúng tôi thu được định lý ergodic Birkhoff cho biến ngẫu nhiên mờ ứng với hội tụ Mosco.

2.4.1 Định lý. *Giả sử T_1, T_2 là hai phép biến đổi giao hoán sao cho T_i^s là ergodic với mọi $i \in \{1,2\}$ và mọi số nguyên dương s. Khi đó, nếu $\tilde{F} : \Omega \to \mathbf{F}(\mathfrak{X})$ là một biến ngẫu nhiên mờ thỏa mãn $\mathcal{S}^1_{L_1\tilde{F}} \neq \emptyset$, $\mathbb{E}\left(\|\mathrm{cl}(L_{0^+}\tilde{F})\|\log^+\|\mathrm{cl}(L_{0^+}\tilde{F})\|\right) < \infty$ và*

$$L_\alpha(\overline{\mathrm{co}}\mathbb{E}\tilde{F}) = \mathrm{cl}(L_{\alpha^+}(\overline{\mathrm{co}}\mathbb{E}\tilde{F})) \text{ với mọi } \alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \tag{2.4.1}$$

thì

$$\text{M-}\lim_{m\wedge n\to\infty}\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\tilde{F}\left(T_1^i T_2^j(\omega)\right) = \overline{\mathrm{co}}\mathbb{E}\tilde{F} \text{ h.c.c.},$$

nghĩa là, tồn tại một tập $N \in \mathcal{A}$ có xác suất 0 sao cho

$$\text{M-}\lim_{m\wedge n\to\infty} L_\alpha\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\tilde{F}\left(T_1^i T_2^j(\omega)\right)\right) = L_\alpha\left(\overline{\mathrm{co}}\mathbb{E}\tilde{F}\right)$$

với mọi $\alpha \in (0,1]$ và mọi $\omega \in \Omega \setminus N$.

Hai ví dụ sau đây chỉ ra rằng tất cả các giả thiết của Định lý 2.4.1 đều thỏa mãn.

2.4.2 Ví dụ. Cho $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$ và $a < b$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Giả sử rằng $u : \mathbb{R} \to [0,1]$ là một tập mờ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn u là hàm tăng ngặt trên đoạn $[a,b]$, $u(x) = 0$ với mọi $x \in (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ và $u(b) = 1$. Chẳng hạn,

$$u(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{nếu} \quad x \in [a,b], \\ 0 & \text{nếu} \quad x \in (-\infty, a) \cup (b, +\infty). \end{cases}$$

Biến ngẫu nhiên mờ $\tilde{F} : \Omega \to \mathbf{F}(\mathbb{R})$ được xác định bởi $\tilde{F}(\omega) = u$ với mọi $\omega \in \Omega$. Khi đó, $\tilde{F}$ thỏa mãn tất cả các giả thiết của Định lý 2.4.1.

2.4.3 Ví dụ. Cho $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$. Tập mờ $u : \mathbb{R} \to [0, 1]$ được định nghĩa bởi

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad x < 0, \\ 2x & \text{nếu} \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 2(1-x) & \text{nếu} \quad \frac{1}{2} < x < 1, \\ 0 & \text{nếu} \quad x \ge 1. \end{cases}$$

Khi đó, $\tilde{F}$ thỏa mãn tất cả các giả thiết của Định lý 2.4.1, trong đó biến ngẫu nhiên mờ $\tilde{F} : \Omega \to \mathbf{F}(\mathbb{R})$ được xác định bởi $\tilde{F}(\omega) = u$ với mọi $\omega \in \Omega$.

Ví dụ tiếp theo chứng tỏ rằng trong Định lý 2.4.1, điều kiện (2.4.1) không được suy ra từ các điều kiện còn lại.

2.4.4 Ví dụ. Cho $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$. Ta định nghĩa tập mờ $u : \mathbb{R} \to [0, 1]$ như sau

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad x < 0, \\ 2\sqrt{2}x & \text{nếu} \quad 0 \le x \le \frac{1}{4}, \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{nếu} \quad \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}, \\ (4 - 2\sqrt{2})x - 3 + 2\sqrt{2} & \text{nếu} \quad \frac{3}{4} \le x \le 1, \\ 0 & \text{nếu} \quad x > 1. \end{cases}$$

Tiếp tục, biến ngẫu nhiên mờ $\tilde{F}$ được định nghĩa bởi $\tilde{F}(\omega) = u$ với mọi $\omega \in \Omega$.

Có thể kiểm tra được rằng $L_\alpha u \neq \mathrm{cl}(L_{\alpha^+} u)$ với $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Do đó, điều kiện (2.4.1) của Định lý 2.4.1 không thỏa mãn. Có thể kiểm tra được rằng các điều kiện khác đều thỏa mãn. Do đó, điều kiện (2.4.1) không được suy ra từ các điều kiện còn lại.

Kết luận của Chương 2

Trong chương này, luận án đã giải quyết được những vấn đề sau:

- Thiết lập định lý ergodic Birkhoff dạng nhiều chiều trên không gian Banach thực, khả ly.

- Thiết lập định lý ergodic Birkhoff dạng hai chiều cho biến ngẫu nhiên đa trị và cho biến ngẫu nhiên mờ.

- Thiết lập định lý ergodic Birkhoff đa trị dạng nhiều chiều đối với trường hợp phép biến đổi bảo toàn độ đo không được giả thiết là ergodic.

- Đưa ra một số ví dụ minh họa kết quả chính của chương.

CHƯƠNG 3

LUẬT SỐ LỚN ĐỐI VỚI MẢNG HAI CHIỀU CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN ĐA TRỊ

Trong chương này, chúng tôi thiết lập một số luật số lớn đối với mảng hai chiều các biến ngẫu nhiên đa trị theo các loại hội tụ Mosco, Wijsman. Các kết quả chính của chương được viết dựa trên các bài báo [1] và [2].

3.1. Một số kết quả bổ trợ

Sau đây, chúng tôi đưa ra một bổ đề quan trọng và là chìa khóa để thiết lập luật số lớn đối với mảng hai chiều các biến ngẫu nhiên đa trị ứng với sự hội tụ khi $m \vee n \to \infty$.

3.1.4 Bổ đề. *Giả sử $\{x_{ij} : i \geq 1, j \geq 1\}$ là một mảng hai chiều các phần tử trên không gian Banach. Nếu ba điều kiện sau đây được thỏa mãn*

$$(i) \text{ với mỗi } m \geq 1, \ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{mj} \to x \ \text{ khi } \ n \to \infty,$$

$$(ii) \text{ với mỗi } n \geq 1, \ \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_{in} \to x \ \text{ khi } \ m \to \infty,$$

$$(iii) \ \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \to x \quad \text{khi } \ m \wedge n \to \infty,$$

thì

$$\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \to x \ \text{ khi } \ m \vee n \to \infty.$$

Áp dụng Bổ đề 3.1.4, chúng tôi chứng minh dạng hai chỉ số của định lý Stolz.

3.1.5 Bổ đề. *Giả sử $\{x_{ij} : i \geq 1, j \geq 1\}$ là một mảng các phần tử trên không gian Banach. Nếu $\lim\limits_{i \vee j \to \infty} x_{ij} = x$ thì*

$$\lim_{m \vee n \to \infty} \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = x.$$

3.2. Luật số lớn đối với mảng hai chiều các biến ngẫu nhiên đa trị

Định lý sau đây mở rộng các kết quả của C. Hess (các năm 1985 và 1999) và của F. Hiai (năm 1985) từ trường hợp dãy sang trường hợp mảng hai chỉ số.

3.2.1 Định lý. *Nếu* $\{F_{ij} : i \geq 1, j \geq 1\}$ *là mảng hai chiều các biến ngẫu nhiên đa trị độc lập đôi một cùng phân phối sao cho* $\mathcal{S}^1_{F_{11}} \neq \emptyset$ *và* $\mathbb{E}(\|F_{11}\| \log^+ \|F_{11}\|) < \infty$, *thì*

$$\frac{1}{mn}\mathrm{cl}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} F_{ij}(\omega) \to \overline{\mathrm{co}}\mathbb{E}F_{11} \ \ h.c.c. \ khi \ \ m \vee n \to \infty$$

theo các loại hội tụ Mosco và Wijsman.

Định lý sau thiết lập luật số lớn cho mảng hai chiều các biến ngẫu nhiên đa trị độc lập, nhận giá trị trên không gian các tập đóng của không gian Rademacher dạng p. Trường hợp dãy được chứng minh bởi F. Hiai vào năm 1985.

3.2.2 Định lý. *Giả sử* $\mathfrak{X}$ *là một không gian Rademacher dạng* p $(p \in [1, 2])$. *Nếu* $\{F_{ij} : i \geq 1, j \geq 1\}$ *là mảng hai chiều các biến ngẫu nhiên độc lập và thỏa mãn*

$$(a) \qquad \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}\|F_{ij}\|^p}{(ij)^p} < \infty,$$

(b) *tồn tại tập* $X \in c(\mathfrak{X})$ *sao cho*

$$X \subset s\text{-}\liminf_{i\vee j\to\infty}(\mathrm{cl}(\mathbb{E}(F_{ij}, \mathcal{A}_{F_{ij}}))),$$
$$\limsup_{i\vee j\to\infty} s(x^*, \mathrm{cl}(\mathbb{E}F_{ij})) \leq s(x^*, X), \text{ với mọi } x^* \in \mathfrak{X}^*,$$

thì ta thu được luật số lớn theo các loại hội tụ Mosco và Wijsman

$$\frac{1}{mn}\mathrm{cl}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} F_{ij}(\omega) \to \overline{\mathrm{co}}X \ \ h.c.c. \ khi \ \ m \vee n \to \infty.$$

Để thiết lập luật số lớn cho mảng hai chiều các biến ngẫu nhiên đa trị 2-hoán đổi được, chúng tôi chứng minh một số kết quả sau đây về mảng nhiều chiều các phần tử ngẫu nhiên 2-hoán đổi được.

3.2.6 Định lý. *Giả sử* $\{f_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *là một mảng các phần tử ngẫu nhiên 2-hoán đổi được, nhận giá trị trên* $\mathfrak{X}$. *Nếu* $\mathbb{E}(\|f_{\mathbf{1}}\|(\log^+ \|f_{\mathbf{1}}\|)^{d-1}) < \infty$ *thì*

$$\frac{1}{|\mathbf{n}|}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} f_{\mathbf{i}} \to f \ \ h.c.c. \ và \ trong \ \mathbf{L}^1 \ \ khi \ \ \mathbf{n}_{\max} \to \infty,$$

trong đó f là một phần tử ngẫu nhiên nào đó thỏa mãn $\mathbb{E}f = \mathbb{E}f_{\mathbf{1}}$.

Kết quả sau đây thể hiện giới hạn là tất định.

3.2.7 Định lý. *Giả sử $\{f_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng các phần tử ngẫu nhiên 2-hoán đổi được thuộc $\mathbf{L}^2(\mathfrak{X})$ và giả sử không gian đối ngẫu $\mathfrak{X}^*$ là khả ly (ứng với tôpô sinh bởi chuẩn trên $\mathfrak{X}^*$). Nếu $\mathrm{Cov}(\langle x^*, f_{\mathbf{1}}\rangle, \langle x^*, f_{\mathbf{2}}\rangle) = 0$ với mọi $x^* \in \mathfrak{X}^*$, thì*

$$\frac{1}{|\mathbf{n}|}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} f_{\mathbf{i}} \to \mathbb{E}f_{\mathbf{1}} \ \ h.c.c. \text{ và trong } \mathbf{L}^1 \ \ \text{khi } \mathbf{n}_{\max} \to \infty.$$

Khi nghiên cứu để mở rộng Định lý 3.2.6 cho mảng hai chiều các biến ngẫu nhiên đa trị, chúng tôi thu được kết quả sau.

3.2.8 Định lý. *Giả sử rằng $\{F_{ij} : i \geq 1, j \geq 1\}$ là một mảng hai chiều các biến ngẫu nhiên đa trị 2-hoán đổi được sao cho $\mathcal{S}^1_{F_{11}} \neq \emptyset$ và $\mathbb{E}(\|F_{11}\| \log^+ \|F_{11}\|) < \infty$. Đặt $S_{mn} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n F_{ij}$. Khi đó,*

(a) $\overline{\mathrm{co}}\mathbb{E}F_{11} \subset \mathrm{cl}(\mathbb{E}F)$, trong đó F là biến ngẫu nhiên đa trị thỏa mãn $F(\omega) = s\text{-}\liminf_{m\wedge n\to\infty} \mathrm{cl}\left(\frac{S_{mn}(\omega)}{mn}\right)$ h.c.c.

(b) Nếu $\mathfrak{X}$ là không gian phản xạ và $\sup_{m,n\geq 1} \|F_{mn}(\omega)\| < \infty$ h.c.c., thì $\mathrm{cl}(\mathbb{E}Y) \subset \overline{\mathrm{co}}\mathbb{E}F_{11}$, trong đó Y là biến ngẫu nhiên đa trị thỏa mãn $Y(\omega) = w\text{-}\limsup_{m\vee n\to\infty} \mathrm{cl}\left(\frac{S_{mn}(\omega)}{mn}\right)$ h.c.c.

Kết luận của Chương 3

Trong chương này, luận án đã giải quyết được những vấn đề sau:

- Chứng minh một điều kiện về sự hội tụ của trung bình cộng các phần tử thuộc m hàng đầu tiên và n cột đầu tiên của mảng hai chiều các phần tử thuộc vào một không gian Banach khi $m \vee n \to \infty$, dựa trên sự hội tụ trên mỗi hàng, sự hội tụ trên mỗi cột và sự hội tụ khi $m \wedge n \to \infty$.

- Thiết lập luật số lớn đối với mảng nhiều chỉ số các phần tử ngẫu nhiên 2-hoán đổi được, nhận giá trị trên không gian Banach thực, khả ly.

- Thiết lập các luật số lớn theo hội tụ Mosco và hội tụ Wijsman cho mảng hai chỉ số các biến ngẫu nhiên đa trị cho các trường hợp: độc lập đôi một cùng phân phối, hoặc độc lập và nhận giá trị trên không gian các tập con đóng của không gian Rademacher dạng p, hoặc phụ thuộc 2-hoán đổi được.

- Đưa ra ví dụ minh họa kết quả chính.

CHƯƠNG 4

LUẬT SỐ LỚN ĐỐI VỚI MẢNG TAM GIÁC CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN ĐA TRỊ

Trong chương này, chúng tôi thiết lập một số luật số lớn đối với mảng tam giác các biến ngẫu nhiên đa trị độc lập theo hàng, nhận giá trị trên không gian các tập con đóng của không gian Rademacher dạng p. Các loại hội tụ được xét là hội tụ Mosco và hội tụ Wijsman. Các kết quả chính của chương được viết dựa trên bài báo [4].

4.1. Dạng định lý Stolz cho trường hợp mảng tam giác

Với $\{x_{ni} : n \geq 1, 1 \leq i \leq n\} \subset \mathbb{R}$, ký hiệu

$$\liminf_{i\to\infty} x_{ni} = \sup_{k\geq 1} \inf_{k\leq i\leq n} x_{ni},$$
$$\limsup_{i\to\infty} x_{ni} = \inf_{k\geq 1} \sup_{k\leq i\leq n} x_{ni}.$$

4.1.1 Định nghĩa. (a) Mảng tam giác $\{x_{ni} : n \geq 1, 1 \leq i \leq n\} \subset \mathbb{R}$ được gọi là *hội tụ tới* $x \in \mathbb{R}$ *khi* $i \to \infty$ và ký hiệu là $\lim\limits_{i\to\infty} x_{ni} = x$, nếu

$$\liminf_{i\to\infty} x_{ni} = \limsup_{i\to\infty} x_{ni} = x.$$

(b) Mảng tam giác $\{x_{ni} : n \geq 1, 1 \leq i \leq n\} \subset \mathfrak{X}$ được gọi là *hội tụ tới* $x \in \mathfrak{X}$ *khi* $i \to \infty$ và ký hiệu là $\lim\limits_{i\to\infty} x_{ni} = x$, nếu $\lim\limits_{i\to\infty} \|x_{ni} - x\| = 0$.

Bổ đề sau đây là dạng định lý Stolz cho trường hợp mảng tam giác.

4.1.3 Bổ đề. *Giả sử* $\{x_{ni} : n \geq 1, 1 \leq i \leq n\}$ *là một mảng tam giác các phần tử trên một không gian Banach và thỏa mãn hai điều kiện:*

(a) $\lim\limits_{i\to\infty} x_{ni} = x$,

(b) *tồn tại hằng số* $C > 0$ *sao cho* $\|x_{ni}\| \leq C$, *với mọi* $n \geq 1, 1 \leq i \leq n$.

Khi đó

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ni} \to x \ \ khi\, n \to \infty.$$

Trong mục này, chúng tôi còn đưa ra ví dụ chứng tỏ rằng Bổ đề 4.1.3 không còn đúng nếu điều kiện (b) không được thỏa mãn.

4.2. Luật số lớn đối với mảng tam giác các biến ngẫu nhiên đa trị

Ta nói rằng họ các biến ngẫu nhiên đa trị $\{F_i : i \in I\}$ *có kỳ vọng bị chặn* nếu tồn tại hằng số dương C sao cho $\|\mathbb{E}F_i\| \leq C$ với mọi $i \in I$.

Định lý sau đây là một sự tương tự kết quả của F. Hiai (năm 1985) cho trường hợp mảng tam giác.

4.2.1 Định lý. *Giả sử $\mathfrak{X}$ là một không gian Rademacher dạng p ($p \in (1,2]$) và $\{F_{ni} : n \geq 1, 1 \leq i \leq n\}$ là một mảng tam giác các biến ngẫu nhiên đa trị độc lập theo hàng, có kỳ vọng bị chặn. Giả thiết rằng $\Psi(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục, lồi, chẵn, nhận giá trị dương sao cho*

$$\frac{\Psi(|t|)}{|t|^r} \uparrow \text{ và } \frac{\Psi(|t|)}{|t|^{r+p-1}} \downarrow \text{ khi } |t| \uparrow \tag{4.2.1}$$

với r là số nguyên không âm nào đó và tồn tại hằng số dương C_1 thỏa mãn

$$\Psi(a+b) \leq C_1(\Psi(a) + \Psi(b)) \text{ với mọi } a, b \in \mathbb{R}. \tag{4.2.2}$$

Khi đó, nếu các điều kiện sau được thỏa mãn

$$+)\ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{E}(\Psi(\|F_{ni}\|))}{\Psi(n)} < \infty, \tag{4.2.3}$$

$$+)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{E}\|F_{ni}\|^p}{n^p}\right)^{p.k} < \infty, \tag{4.2.4}$$

với k là hằng số nguyên dương nào đó và tồn tại $X \in c(\mathfrak{X})$ sao cho

$$+)\ X \subset s\text{-}\liminf_{i\to\infty} \mathrm{cl}(\mathbb{E}(F_{ni}, \mathcal{A}_{F_{ni}})),$$

$$+)\ \limsup_{i\to\infty} s(x^*, \mathrm{cl}(\mathbb{E}F_{ni})) \leq s(x^*, X), \text{ với mọi } x^* \in \mathfrak{X}^*$$

thì chúng ta thu được luật số lớn

$$\frac{1}{n}\mathrm{cl}\sum_{i=1}^{n} F_{ni}(\omega) \to \overline{\mathrm{co}}X \text{ h.c.c. khi } n \to \infty$$

đối với hội tụ Mosco và hội tụ Wijsman.

4.2.2 Chú ý. Trong Định lý 4.2.1, nếu điều kiện (4.2.1) được thỏa mãn với $r = 0$ hoặc $r = 1$ thì có thể lược bỏ điều kiện (4.2.4).

Chúng tôi còn đưa ra ví dụ chứng tỏ điều kiện "kỳ vọng bị chặn" trong Định lý 4.2.1 không được suy ra từ các điều kiện còn lại.

Định lý tiếp theo là một mở rộng các kết quả của A. Bozorgnia, R. F. Patterson và R. L. Taylor (năm 1997) cho trường hợp các biến ngẫu nhiên đa trị.

4.2.3 Định lý. *Giả sử* $\{F_{ni} : n \geq 1, 1 \leq i \leq n\}$ *là một mảng tam giác các biến ngẫu nhiên đa trị độc lập theo hàng, nhận giá trị trên không gian các tập con đóng của một không gian Rademacher dạng* p $(p \in (1, 2])$. *Giả sử* $\{a_n : n \geq 1\}$ *là dãy tăng ngặt các số thực dương sao cho* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *và giả sử* $\Psi(t)$ *là hàm số liên tục, chẵn, nhận giá trị dương sao cho*

$$\frac{\Psi(|t|)}{|t|^r} \uparrow \text{ và } \frac{\Psi(|t|)}{|t|^{r+p-1}} \downarrow \text{ khi } |t| \uparrow \tag{4.2.23}$$

với r *là số nguyên không âm nào đó. Khi đó, nếu*

$$+)\ 0 \in \mathbb{E}(F_{ni}, \mathcal{A}_{F_{ni}}), \tag{4.2.24}$$

$$+)\ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{E}(\Psi(\|F_{ni}\|))}{\Psi(a_n)} < \infty, \tag{4.2.25}$$

$$+)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{E}\|F_{ni}\|^p}{a_n^p}\right)^{p.k} < \infty, \tag{4.2.26}$$

với k *là một số nguyên dương nào đó, thì*

$$0 \in s\text{-}\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}\mathrm{cl}\sum_{i=1}^{n} F_{ni}(\omega) \ h.c.c.$$

4.2.4 Chú ý. Trong Định lý 4.2.3, nếu điều kiện (4.2.23) được thỏa mãn với $r = 1$ thì có thể lược bỏ điều kiện (4.2.26), và nếu điều kiện (4.2.23) được thỏa mãn với $r = 0$ thì có thể lược bỏ các điều kiện (4.2.24), (4.2.26).

Chúng tôi còn đưa ra ví dụ chứng tỏ kết luận của Định lý 4.2.3 không thể thay thế bởi kết luận mạnh hơn

$$\text{M-}\lim \frac{1}{a_n}\mathrm{cl}\sum_{i=1}^{n} F_{ni}(\omega) = \{0\} \ \text{ h.c.c.}$$

Kết luận của Chương 4

Trong chương này, luận án đã giải quyết được những vấn đề sau:

- Thiết lập dạng định lý Stolz cho trường hợp mảng tam giác.

- Thiết lập luật số lớn theo hội tụ Mosco và hội tụ Wijsman đối với mảng tam giác các biến ngẫu nhiên đa trị thỏa mãn: độc lập theo hàng và nhận giá trị trên không gian các tập con đóng của không gian Rademacher dạng p.

- Đưa ra một số ví dụ minh họa kết quả chính.

KẾT LUẬN CHUNG VÀ KIẾN NGHỊ

1. Kết luận chung

Luận án đã thu được các kết quả chính sau đây:

- Thiết lập một số kết quả hội tụ đối với các tôpô Mosco và Wijsman cho mảng nhiều chỉ số các tập con đóng của không gian Banach và cho mảng nhiều chỉ số các biến ngẫu nhiên đa trị.

- Thiết lập định lý ergodic Birkhoff dạng nhiều chiều cho phần tử ngẫu nhiên nhận giá trị trên không gian Banach thực, khả ly.

- Thiết lập định lý ergodic Birkhoff đa trị theo các loại hội tụ Mosco và Wijsman đối với cấu trúc mảng hai chiều.

- Thiết lập luật số lớn cho mảng các phần tử ngẫu nhiên 2-hoán đổi được.

- Thiết lập luật số lớn theo hội tụ Mosco và hội tụ Wijsman đối với mảng hai chỉ số các biến ngẫu nhiên đa trị cho các trường hợp: độc lập đôi một cùng phân phối, hoặc độc lập và nhận giá trị trên không gian các tập con đóng của không gian Rademacher dạng p, hoặc phụ thuộc 2-hoán đổi được.

- Thiết lập luật số lớn ứng với hội tụ Mosco và hội tụ Wijsman đối với mảng tam giác các biến ngẫu nhiên đa trị thỏa mãn: độc lập theo hàng và nhận giá trị trên không gian các tập con đóng của không gian Rademacher dạng p.

2. Kiến nghị về những hướng nghiên cứu tiếp theo

Trong thời gian tới, chúng tôi dự định nghiên cứu các vấn đề sau đây:

- Các định lý giới hạn dạng luật yếu số lớn theo hội tụ Mosco và hội tụ Wijsman đối với dãy và mảng các biến ngẫu nhiên đa trị.

- Các định lý ergodic đa trị theo các loại hội tụ: Mosco, Wijsman, Slice, Hausdorff, ... đối với trường hợp một chiều và trường hợp nhiều chiều.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH LIÊN QUAN TRỰC TIẾP ĐẾN LUẬN ÁN

1. C. Castaing, N. V. Quang and D. X. Giap (2012), Mosco convergence of strong law of large numbers for double array of closed valued random variables in Banach space, *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, **13**(4), 615-636.

2. C. Castaing, N. V. Quang and D. X. Giap (2012), Various convergence results in strong law of large numbers for double array of random sets in Banach spaces, *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, **13**(1), 1-30.

3. D. X. Giap and N. V. Quang (2016), Multidimensional and multivalued ergodic theorems for measure-preserving transformations, *Set-Valued and Variational Analysis*, DOI 10.1007/s11228-016-0361-z (*Available online January 2016*).

4. N. V. Quang and D. X. Giap (2013), Mosco convergence of SLLN for triangular arrays of rowwise independent random sets, *Statistics and Probability Letters*, **83**, 1117-1126.

Các kết quả của luận án đã được báo cáo tại:

- Hội nghị Toán học phối hợp Việt-Pháp (Đại học Sư phạm Huế, 20-24/08/2012),
- Đại hội Toán học Việt Nam lần thứ 8 (Trường Sĩ quan Thông tin, 10-14/08/2013),
- Hội nghị toàn quốc lần thứ 5: "Xác suất - Thống kê: nghiên cứu, ứng dụng và giảng dạy" (Đại học Sư phạm Đà Nẵng, 23-25/05/2015),
- Seminar của Bộ môn Xác suất thống kê và Toán ứng dụng thuộc Khoa Sư phạm Toán học-Trường Đại học Vinh (từ năm 2011 đến năm 2015).