BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

DƯƠNG XUÂN GIÁP

CÁC ĐỊNH LÝ ERGODIC VÀ LUẬT SỐ LỚN ĐỐI VỚI MẢNG CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN ĐA TRỊ

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

NGHỆ AN - 2016

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

DƯƠNG XUÂN GIÁP

CÁC ĐỊNH LÝ ERGODIC VÀ LUẬT SỐ LỚN ĐỐI VỚI MẢNG CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN ĐA TRỊ

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Lý thuyết xác suất và Thống kê toán học

Mã số: 62. 46. 01. 06

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC: 1. GS. TS. NGUYỄN VĂN QUẢNG
2. GS. CHARLES CASTAING

NGHỆ AN - 2016

LỜI CAM ĐOAN

Luận án này được hoàn thành tại Trường Đại học Vinh, dưới sự hướng dẫn của GS. TS. Nguyễn Văn Quảng và GS. Charles Castaing. Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi. Các kết quả được trình bày trong luận án là trung thực, được các đồng tác giả cho phép sử dụng và chưa từng được ai công bố trước đó.

Tác giả

Dương Xuân Giáp

LỜI CẢM ƠN

Luận án này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của GS. TS. Nguyễn Văn Quảng và GS. Charles Castaing. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới hai Thầy-những người đã đặt bài toán, hướng dẫn, giúp đỡ tận tình và chu đáo trong suốt quá trình tác giả học tập và thực hiện luận án.

Tác giả xin cảm ơn TS. Nguyễn Văn Huấn và ThS. Nguyễn Trần Thuận về những thảo luận và góp ý từ lúc viết bản thảo cho tới khi hoàn thiện luận án.

Trong quá trình hoàn thành luận án, tác giả đã nhận được sự quan tâm và góp ý của PGS. TS. Nguyễn Thành Quang, PGS. TS. Trần Xuân Sinh, PGS. TS. Trần Văn Ân, TS. Nguyễn Trung Hòa, TS. Nguyễn Thị Thế, PGS. TS. Lê Văn Thành, PGS. TS. Kiều Phương Chi, TS. Nguyễn Thanh Diệu, TS. Võ Thị Hồng Vân, TS. Vũ Thị Hồng Thanh, TS. Lê Hồng Sơn cùng các nhà khoa học và bạn bè đồng nghiệp. Tác giả xin chân thành cảm ơn về những sự giúp đỡ quý báu đó.

Tác giả xin được gửi lời cảm ơn tới Khoa Sư phạm Toán học và Phòng Đào tạo Sau đại học, Trường Đại học Vinh về sự hỗ trợ và tạo mọi điều kiện thuận lợi để tác giả hoàn thành nhiệm vụ của một nghiên cứu sinh.

Tác giả xin gửi lời cảm ơn tới Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán vì đã hỗ trợ và tạo điều kiện thuận lợi cho tác giả được học tập và nghiên cứu tại Viện.

Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn tới những người họ hàng và những người bạn thân thiết đã luôn động viên và khích lệ tác giả trong suốt quá trình học tập và công tác.

Cuối cùng, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất tới gia đình đã luôn là chỗ dựa vững chắc cho tác giả yên tâm học tập, nghiên cứu và công tác.

Dương Xuân Giáp

MỤC LỤC

Một số ký hiệu thường dùng trong luận án **1**

Mở đầu **3**

Chương 1. Một số tính chất về hội tụ Mosco và hội tụ Wijsman **13**

1.1. Một số kiến thức chuẩn bị 13

1.2. Một số tính chất về hội tụ Mosco và hội tụ Wijsman đối với mảng các tập con đóng của không gian Banach 21

1.3. Một số tính chất về hội tụ Mosco và hội tụ Wijsman đối với mảng các biến ngẫu nhiên đa trị 29

1.4. Nhận xét 32

Chương 2. Định lý ergodic Birkhoff dạng nhiều chiều **33**

2.1. Một số kiến thức chuẩn bị 33

2.2. Định lý ergodic Birkhoff dạng nhiều chiều cho phần tử ngẫu nhiên nhận giá trị trên không gian Banach thực, khả ly 35

2.3. Định lý ergodic Birkhoff dạng nhiều chiều cho biến ngẫu nhiên đa trị 40

2.4. Định lý ergodic Birkhoff dạng hai chiều cho biến ngẫu nhiên mờ . . . 48

Chương 3. Luật số lớn đối với mảng hai chiều các biến ngẫu nhiên đa trị **53**

3.1. Một số kết quả bổ trợ 53

3.2. Luật số lớn đối với mảng hai chiều các biến ngẫu nhiên đa trị 57

Chương 4. Luật số lớn đối với mảng tam giác các biến ngẫu nhiên đa trị **77**

4.1. Dạng định lý Stolz cho trường hợp mảng tam giác 77

4.2. Luật số lớn đối với mảng tam giác các biến ngẫu nhiên đa trị 79

Kết luận chung và kiến nghị **92**

Danh mục các công trình liên quan trực tiếp đến luận án **93**

Tài liệu tham khảo **94**

MỘT SỐ KÝ HIỆU THƯỜNG DÙNG TRONG LUẬN ÁN

$\mathbb{N}$	tập hợp các số nguyên dương
$\mathbb{Q}$	tập hợp các số hữu tỉ
$\mathbb{R}$	tập hợp các số thực
$\mathbb{R}_+$	tập hợp các số thực không âm
$\mathbf{n}$	phần tử $\mathbf{n} := (n_1, n_2, \ldots, n_d) \in \mathbb{N}^d$
$\mathbf{1}$	phần tử $\mathbf{1} := (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^d$
$\mathbf{2}$	phần tử $\mathbf{2} := (2, 2, \ldots, 2) \in \mathbb{N}^d$
$\mathbf{3}$	phần tử $\mathbf{3} := (3, 3, \ldots, 3) \in \mathbb{N}^d$
$\mathbf{n}_{\min}$	giá trị $\mathbf{n}_{\min} := \min\{n_i : i = 1, 2, \ldots, d\}$
$\mathbf{n}_{\max}$	giá trị $\mathbf{n}_{\max} := \max\{n_i : i = 1, 2, \ldots, d\}$
$\lvert\mathbf{n}\rvert$	giá trị $\lvert\mathbf{n}\rvert := \prod_{i=1}^{d} n_i$
$\mathfrak{X}$	không gian Banach thực, khả ly
$\lVert x\rVert$	chuẩn của phần tử $x \in \mathfrak{X}$
$\lVert A\rVert$	chuẩn của tập A, với $A \subset \mathfrak{X}$
$\mathfrak{X}^*$	không gian đối ngẫu của $\mathfrak{X}$
$\mathbf{B}^*$	hình cầu đơn vị đóng của $\mathfrak{X}^*$
$\mathbf{S}^*$	mặt cầu đơn vị của $\mathfrak{X}^*$
$c(\mathfrak{X})$	không gian các tập con đóng, khác rỗng của $\mathfrak{X}$
$\overline{\text{co}}A$	bao lồi đóng của tập A, với $A \subset \mathfrak{X}$
$\text{cl}A$	bao đóng của tập A, với $A \subset \mathfrak{X}$
$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$	không gian xác suất
T	phép biến đổi bảo toàn độ đo trên không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
$\mathcal{I}_T$	σ-đại số các tập T-bất biến
$\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}$	σ-đại số Borel của $\mathfrak{X}$
$\mathcal{B}_{c(\mathfrak{X})}$	σ-đại số Effrös của $c(\mathfrak{X})$
$\mathcal{A}_F$	σ-đại số con bé nhất của $\mathcal{A}$ mà biến ngẫu nhiên đa trị F đo được
$\langle x^*, x\rangle$	giá trị của phiếm hàm x^* ($x^* \in \mathfrak{X}^*$) tại điểm $x \in \mathfrak{X}$
$\mathbb{E}F$	kỳ vọng của biến ngẫu nhiên F
$t\text{-}\liminf_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}}$	giới hạn dưới của mảng $\{A_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\} \subset c(\mathfrak{X})$ ứng với tôpô t khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$
$t\text{-}\limsup_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}}$	giới hạn trên của mảng $\{A_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\} \subset c(\mathfrak{X})$ ứng với tôpô t khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$
$\text{M-}\lim_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}}$	giới hạn dạng Mosco của mảng $\{A_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\} \subset c(\mathfrak{X})$ khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$
$\text{Wijs-}\lim_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}}$	giới hạn dạng Wijsman của mảng $\{A_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\} \subset c(\mathfrak{X})$ khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$

$\mathbb{I}_A$	hàm chỉ tiêu của A
h.c.c.	hầu chắc chắn
$m \vee n$	giá trị lớn nhất của hai số thực m và n
$m \wedge n$	giá trị nhỏ nhất của hai số thực m và n
$\log^+ a$	lôgarit cơ số 2 của $a \vee 1$, với $a \in \mathbb{R}_+$
a^+	giá trị $a^+ := \max\{a, 0\}$, trong đó $a \in \mathbb{R}$
a^-	giá trị $a^- := \max\{-a, 0\}$, trong đó $a \in \mathbb{R}$
tr. i	trang thứ i trong tài liệu được trích dẫn
tr. i-j	từ trang thứ i đến trang thứ j trong tài liệu được trích dẫn
$\square$	kết thúc chứng minh

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

1.1. Thời gian gần đây, định lý ergodic và luật số lớn đối với các biến ngẫu nhiên đa trị đã được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu và có nhiều ứng dụng trong tối ưu ngẫu nhiên, thống kê, toán kinh tế, y học và một số lĩnh vực khác. Biến ngẫu nhiên đa trị là sự mở rộng của phần tử ngẫu nhiên. Chính vì vậy, việc nghiên cứu định lý ergodic và luật số lớn cho các biến ngẫu nhiên đa trị không chỉ có ý nghĩa lý thuyết mà còn có ý nghĩa thực tiễn.

1.2. Thực tiễn đòi hỏi chúng ta nghiên cứu về mảng nhiều chiều các biến ngẫu nhiên. Đối với cấu trúc nhiều chiều, quan hệ thứ tự thông thường trên tập các chỉ số không có tính chất tuyến tính. Do đó, khi mở rộng các định lý giới hạn đối với các biến ngẫu nhiên đa trị từ trường hợp dãy sang trường hợp mảng nhiều chỉ số ứng với $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$ hoặc $\mathbf{n}_{\min} \to \infty$, chúng ta sẽ gặp nhiều điều bất thường. Điều này góp phần làm cho các kết quả nghiên cứu về các định lý giới hạn đa trị dạng luật số lớn và dạng định lý ergodic đối với cấu trúc nhiều chiều có nhiều ý nghĩa.

1.3. Lý thuyết ergodic bắt nguồn từ ngành cơ học thống kê. Nghiên cứu các định lý ergodic được bắt đầu vào những năm 1931-1932 bởi G. D. Birkhoff [10] và J. v. Neumann [59]. Trong mấy thập kỷ gần đây, định lý ergodic Birkhoff đã được mở rộng theo hai hướng chính: cho cấu trúc nhiều chiều và cho các hàm đa trị. Theo hướng thứ nhất, vào năm 1951-không lâu sau khi H. E. Robbins đặt ra bài toán về tính đúng đắn của định lý ergodic Birkhoff cho trường hợp hai chiều (xem [21]), N. Dunford [21] và A. Zygmund [75] đã thiết lập định lý ergodic Birkhoff đối với họ không giao hoán các phép biến đổi bảo toàn độ đo tương ứng cho các trường hợp tham số rời rạc và tham số liên tục. Kết quả này sau đó được N. Dunford, J. T. Schwartz [22] và N. A. Fava [27] tổng quát lên

cho trường hợp toán tử. Các kết quả trên tiếp tục được mở rộng cho trường hợp tổng có trọng số trong các công trình của R. L. Jones và J. Olsen [46], M. Lin và M. Weber [52], F. Mukhamedov, M. Mukhamedov và S. Temir [58], T. Yoshimoto [73]. Theo hướng thứ hai, vào năm 1991, J. Bán [5] thiết lập định lý ergodic Birkhoff cho các biến ngẫu nhiên nhận giá trị tập compact hoặc giá trị mờ trên không gian Banach ứng với hội tụ theo khoảng cách Hausdorff. Cho tới năm 2003, C. Choirat, C. Hess và R. A. Seri [17] thu được định lý ergodic Birkhoff cho các biến ngẫu nhiên đa trị nhận giá trị tập lồi ứng với hội tụ Kuratowski. Gần đây, H. Ziat [74] chứng minh định lý ergodic Birkhoff cho các biến ngẫu nhiên đa trị theo các loại hội tụ: Mosco, Wijsman và Slice. Do đó, nghiên cứu định lý ergodic Birkhoff cho cả cấu trúc nhiều chiều và cho các hàm đa trị đang là vấn đề có tính thời sự.

1.4. Luật số lớn đa trị được chứng minh lần đầu tiên vào năm 1975 bởi Z. Artstein và R. A. Vitale [3] cho các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối, nhận giá trị trên không gian các tập con compact của $\mathbb{R}^d$, ứng với hội tụ theo khoảng cách Hausdorff. Kết quả này sau đó được mở rộng theo hai hướng chính: cho các biến ngẫu nhiên nhận giá trị trên không gian các tập con compact của không gian Banach và cho các biến ngẫu nhiên nhận giá trị trên không gian các tập con đóng (có thể không bị chặn) của không gian Banach. Theo hướng thứ nhất, chúng ta có thể tham khảo trong các công trình của N. Cressie [20], C. Hess [34], M. L. Puri và D. A. Ralescu [61], E. Giné, M. G. Hahn và J. Zinn [31], F. Hiai [40], Z. Artstein và J. C. Hansen [1], A. Colubi, M. López-Díaz, J. S. Domínguez-Menchero và M. A. Gil [19], P. Terán và I. Molchanov [69], K. A. Fu và L. X. Zhang [29], ... Theo hướng thứ hai, luật số lớn được chứng minh đầu tiên bởi Z. Artstein và S. Hart [2] cho hội tụ Kuratowski đối với các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối, nhận giá trị trên không gian các tập con đóng của $\mathbb{R}^d$. Sau đó nó được tiếp tục nghiên cứu bởi F. Hiai [41] và C. Hess [37, 38, 39] cho các loại hội tụ Mosco và Wijsman. Cho đến nay, nghiên cứu về luật số lớn cho các biến ngẫu nhiên đa trị vẫn là một vấn đề có tính thời sự của

lý thuyết xác suất.

1.5. Luật số lớn đa trị chủ yếu tập trung nghiên cứu các biến ngẫu nhiên độc lập. Tuy nhiên, thực tế không phải lúc nào chúng ta cũng có thể giả thiết được rằng các biến ngẫu nhiên là độc lập. Một hướng phát triển của luật số lớn đa trị là nghiên cứu luật số lớn đối với dãy và mảng các biến ngẫu nhiên đa trị mà điều kiện độc lập được thay thế bởi các điều kiện phụ thuộc như độc lập đôi một, phụ thuộc hoán đổi được, phụ thuộc 2-hoán đổi được. Đây là một hướng nghiên cứu có giá trị về mặt thực tiễn.

1.6. Các định lý giới hạn dạng luật số lớn và dạng định lý ergodic trong xác suất đa trị thường được nghiên cứu cho các biến ngẫu nhiên nhận giá trị trên không gian các tập con compact hoặc không gian các tập con compact yếu hoặc không gian các tập con lồi hoặc không gian các tập con đóng, ... của một không gian Banach. Do đó, các kết quả theo hướng nghiên cứu này và các chứng minh của chúng có sự kết hợp và giao thoa giữa lý thuyết xác suất, giải tích lồi và giải tích hàm.

1.7. Hội tụ theo khoảng cách Hausdorff thường được sử dụng khi nghiên cứu các biến ngẫu nhiên nhận giá trị là tập compact. Đối với các biến ngẫu nhiên đa trị nhận giá trị là tập đóng, người ta thường sử dụng các loại hội tụ: hội tụ Kuratowski (ứng với tôpô Fell, xem [9]), hội tụ Mosco (được giới thiệu trong [56, 57]) và hội tụ Wijsman (được giới thiệu trong [70, 71]). Hội tụ Kuratowski phù hợp cho việc thiết lập luật số lớn đa trị đối với các không gian hữu hạn chiều. Hội tụ Mosco là một mở rộng của hội tụ Kuratowski đối với không gian Banach. Loại hội tụ này phù hợp cho các không gian phản xạ và có ứng dụng thú vị trong các bất đẳng thức biến phân (xem [56, 57]). Với mở rộng phù hợp cho các không gian không phản xạ, hội tụ Wijsman đã được giới thiệu và thích hợp cho việc nghiên cứu về tốc độ hội tụ và còn được sử dụng để chứng minh luật số lớn cho hội tụ Slice-một loại hội tụ có nhiều ứng dụng trong tối ưu ngẫu nhiên. Do vậy, nghiên cứu các định lý giới hạn cho các biến ngẫu nhiên đa trị theo các loại hội

tụ Mosco và Wijsman mang tới nhiều điều thú vị và ý nghĩa.

Với các lý do nêu trên, chúng tôi chọn đề tài nghiên cứu cho luận án của mình là: **"Các định lý ergodic và luật số lớn đối với mảng các biến ngẫu nhiên đa trị"**.

2. Mục đích nghiên cứu

Mục đích của luận án là thiết lập định lý ergodic Birkhoff dạng nhiều chiều, thiết lập luật số lớn đối với mảng hai chỉ số và mảng tam giác các biến ngẫu nhiên đa trị nhận giá trị trên không gian các tập con đóng của không gian Banach thực, khả ly với các giả thiết khác nhau.

3. Đối tượng nghiên cứu

- Định lý ergodic Birkhoff dạng nhiều chiều.
- Luật số lớn đối với mảng các biến ngẫu nhiên đa trị.

4. Phạm vi nghiên cứu

Luận án tập trung nghiên cứu định lý ergodic Birkhoff dạng nhiều chiều, luật số lớn đối với mảng hai chỉ số và mảng tam giác các biến ngẫu nhiên đa trị nhận giá trị trên không gian các tập con đóng của một không gian Banach thực, khả ly. Các loại hội tụ được xét đến là hội tụ Mosco và hội tụ Wijsman. Đối với luật số lớn đa trị, các biến ngẫu nhiên đa trị được giả thiết độc lập, hoặc độc lập đôi một, hoặc phụ thuộc 2-hoán đổi được.

5. Phương pháp nghiên cứu

Chúng tôi sử dụng phối hợp các phương pháp nghiên cứu lý thuyết thuộc các chuyên ngành *lý thuyết xác suất*, *giải tích lồi* và *giải tích hàm* như: kỹ thuật lồi hóa, dạng định lý Stolz, ...

6. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn

Các kết quả của luận án góp phần làm phong phú thêm cho hướng nghiên cứu về các định lý giới hạn trong xác suất đa trị.

Luận án là tài liệu tham khảo cho sinh viên, học viên cao học và nghiên cứu

sinh chuyên ngành Lý thuyết xác suất và Thống kê toán học.

7. Tổng quan và cấu trúc luận án

7.1. Tổng quan về luận án

Năm 1927, F. Hausdorff [33, §28] giới thiệu một khoảng cách trên không gian các tập con đóng của một không gian mêtric. Kể từ đó, nghiên cứu sự hội tụ đối với các tập con đóng của một không gian tôpô được nhiều nhà toán học trên thế giới quan tâm. Nói riêng, vào năm 1964, R. A. Wijsman [70] giới thiệu một loại hội tụ mới đối với dãy các tập con đóng của một không gian Euclide hữu hạn chiều. Sau đó, loại hội tụ này tiếp tục được nghiên cứu trên không gian các tập con đóng của một không gian mêtric (xem G. Beer [6, 7, 8]), hoặc của một không gian Banach, hoặc của một số không gian có cấu trúc đặc biệt khác. Loại hội tụ này thích hợp cho việc nghiên cứu tốc độ hội tụ của dãy các biến ngẫu nhiên nhận giá trị là các tập đóng. Năm 1969, U. Mosco [56] giới thiệu một loại hội tụ mới đối với dãy các tập con đóng của một không gian định chuẩn và sử dụng nó để nghiên cứu các bất đẳng thức biến phân.

Nghiên cứu về các biến ngẫu nhiên đa trị được bắt đầu bởi H. E. Robbins [65, 66] vào các năm 1944 và 1945. Nhưng mãi đến các năm 1974 và 1975, vấn đề này mới tiếp tục được các nhà toán học quan tâm nghiên cứu (chẳng hạn, D. G. Kendall [48], G. Matheron [55], R. Fortet và M. Kambouzia [28]), ... Kể từ đó đến nay, nghiên cứu về các biến ngẫu nhiên đa trị thu hút rất nhiều sự quan tâm của các nhà toán học trên thế giới. Đặc biệt, luật số lớn đa trị được chứng minh lần đầu tiên vào năm 1975 bởi Z. Artstein và R. A. Vitale [3] cho các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối, nhận giá trị trên không gian các tập con compact của một không gian hữu hạn chiều ứng với hội tụ theo khoảng cách Hausdorff. Về sau, luật số lớn đa trị đã được mở rộng bởi N. Cressie, C. Hess, M. L. Puri, D. A. Ralescu, E. Giné, M. G. Hahn, J. Zinn, F. Hiai, Z. Artstein, J. C. Hansen, A. Colubi, M. López-Díaz, J. S. Domínguez-Menchero, M. A. Gil, H. Inoue, R. L. Taylor, T. Uemura, C. Castaing, F. Ezzaki, P. Raynaud de Fitte, P. Terán, I. Molchanov, S. Li, Y. Ogura, K. A. Fu, L. X. Zhang, ... Tuy nhiên,

các kết quả thu được chủ yếu được thiết lập cho các biến ngẫu nhiên đa trị nhận giá trị là các tập compact, lồi. Theo hướng mở rộng cho các biến ngẫu nhiên đa trị nhận giá trị là các tập đóng, luật số lớn được chứng minh đầu tiên vào năm 1981 bởi Z. Artstein và S. Hart cho hội tụ Kuratowski đối với các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối, nhận giá trị trên không gian các tập con đóng của $\mathbb{R}^d$ (xem [2, Định lý 3.2]). Đến năm 1985, F. Hiai mở rộng kết quả trên của Z. Artstein và S. Hart cho trường hợp không gian vô hạn chiều (xem [41, Định lý 3.2]). Định lý này phát biểu như sau: "*Nếu* $\{F_n : n \geq 1\}$ *là một dãy các biến ngẫu nhiên khả tích, độc lập cùng phân phối, nhận giá trị trên không gian các tập con đóng và khác rỗng của một không gian Banach thực và khả ly, thì xảy ra luật số lớn ứng với hội tụ Mosco*

$$\frac{1}{n}\mathrm{cl}\sum_{i=1}^{n} F_i(\omega) \to \overline{\mathrm{co}}\mathbb{E}F_1 \ \ h.c.c. \ khi\, n \to \infty."$$

Ngoài ra, F. Hiai còn thu được luật số lớn theo hội tụ Mosco cho dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, không cùng phân phối, nhận giá trị trên không gian các tập con đóng của không gian Rademacher dạng p (xem [41, Định lý 3.3]). Kết quả này được phát biểu như sau: "*Giả sử* $\mathfrak{X}$ *là một không gian Rademacher dạng* p ($p \in (1, 2]$) *và giả sử rằng* $\{F_n : n \geq 1\}$ *là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, nhận giá trị trên không gian các tập con đóng và khác rỗng của* $\mathfrak{X}$ *và thỏa mãn* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-p}\mathbb{E}\|F_n(\cdot)\|^p < \infty$. *Khi đó, nếu tồn tại tập con đóng, khác rỗng* X *của* $\mathfrak{X}$ *sao cho*

$$\begin{aligned}
&(a)\ X \subset s\text{-}\liminf_{n\to\infty} \mathrm{cl}\mathbb{E}[F_n, \mathcal{A}_{F_n}],\\
&(b)\ \limsup_{n\to\infty} s(x^*, \mathrm{cl}\mathbb{E}[F_n]) \leq s(x^*, X), \quad x^* \in \mathfrak{X}^*,
\end{aligned}$$

thì ta thu được luật số lớn cho hội tụ Mosco

$$\frac{1}{n}\mathrm{cl}\sum_{i=1}^{n} F_i(\omega) \to \overline{\mathrm{co}}X \ \ h.c.c. \ khi\, n \to \infty."$$

Để thu được các kết quả trên, F. Hiai đã sử dụng phối hợp "kỹ thuật lồi hóa" cho trường hợp dãy với bổ đề về sự tồn tại dãy các lát cắt cùng phân phối của

dãy các biến ngẫu nhiên đa trị cùng phân phối (xem [41, Bổ đề 3.1, tr. 623]). Bổ đề này đã được giới thiệu trước đó bởi C. Hess [35, 36]. Cũng vào năm đó (năm 1985), C. Hess [38] đã độc lập chứng minh Định lý 3.2 của F. Hiai [41] cho trường hợp độc lập đôi một, cùng phân phối. Mãi đến năm 1999, C. Hess mới thiết lập luật số lớn đa trị theo hội tụ Wijsman cho dãy các biến ngẫu nhiên đa trị độc lập đôi một, cùng phân phối, nhận giá trị trên không gian các tập con đóng của một không gian Banach khả ly (xem [39, Định lý 3.5, tr. 177]) và áp dụng kết quả này để thu được luật số lớn theo tôpô Slice (xem [39, Định lý 3.10, tr. 179]). Để chứng minh luật số lớn theo tôpô Wijsman, C. Hess đã sử dụng kỹ thuật lồi hóa cho trường hợp dãy với cách trình bày khác với cách mà F. Hiai đã thực hiện trước đó.

Trong nước, luật số lớn đa trị ứng với hội tụ theo khoảng cách Hausdorff cũng đã được một số tác giả như Nguyễn Văn Quảng và Nguyễn Trần Thuận quan tâm nghiên cứu (xem [15, 64]).

Định lý ergodic Birkhoff cổ điển được phát biểu như sau: "*Nếu T là phép biến đổi bảo toàn độ đo trên không gian đo $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ và $f \in \mathbf{L}^1$, thì trung bình cộng*

$$A_n f := \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i$$

hội tụ hầu khắp nơi (ứng với độ đo μ) tới một hàm T-bất biến $\overline{f}$ thỏa mãn $\|\overline{f}\|_1 \leq \|f\|_1$ và với mỗi tập T-bất biến $A \in \mathcal{A}$ mà $\mu(A) < \infty$ ta đều có

$$\int_A \overline{f} d\mu = \int_A f d\mu."$$

Kết quả này sau đó được tiếp tục nghiên cứu và mở rộng theo nhiều hướng khác nhau. Đặc biệt, định lý ergodic Birkhoff đối với các biến ngẫu nhiên nhận giá trị trên không gian các tập con đóng của một không gian Banach được chứng minh bởi H. Ziat [74] vào năm 2011. Các loại hội tụ được xét đến là hội tụ Mosco, hội tụ Wijsman và hội tụ Slice.

Trong luận án này, chúng tôi thiết lập các định lý giới hạn ứng với tôpô Mosco và tôpô Wijsman theo dạng định lý ergodic Birkhoff và dạng luật số lớn đối với

mảng các biến ngẫu nhiên đa trị nhận giá trị trên không gian các tập con đóng của không gian Banach thực, khả ly.

Trước hết chúng tôi giới thiệu một số khái niệm cơ bản về xác suất trên không gian các tập con đóng của một không gian Banach. Sau đó, chúng tôi chứng minh một số kết quả về hội tụ Mosco và hội tụ Wijsman đối với mảng nhiều chiều các tập con đóng của không gian Banach và đối với mảng nhiều chiều các biến ngẫu nhiên đa trị.

Đối với định lý ergodic, chúng tôi thiết lập định lý ergodic Birkhoff đối với cấu trúc nhiều chiều cho các trường hợp: đơn trị và đa trị. Nói riêng, định lý ergodic Birkhoff đa trị được chúng tôi thiết lập cho cấu trúc hai chiều.

Đối với luật số lớn cho mảng hai chỉ số các biến ngẫu nhiên đa trị, chúng tôi nghiên cứu cho trường hợp $m \vee n \to \infty$. Kết hợp dạng định lý Stolz cho mảng hai chỉ số, tính chất về sự hội tụ khi $m \vee n \to \infty$, kỹ thuật lồi hóa cho mảng hai chỉ số và các bổ đề chứng minh trước đó, chúng tôi thiết lập được luật số lớn theo các loại hội tụ Mosco và Wijsman cho mảng hai chiều các biến ngẫu nhiên đa trị. Các biến ngẫu nhiên được giả thiết độc lập đôi một và cùng phân phối, hoặc độc lập và nhận giá trị trên không gian các tập con đóng của không gian Rademacher dạng p, hoặc phụ thuộc 2-hoán đổi được.

Đối với luật số lớn cho mảng tam giác các biến ngẫu nhiên đa trị, chúng tôi thiết lập luật số lớn theo các loại hội tụ Mosco và Wijsman cho các biến ngẫu nhiên thỏa mãn: độc lập theo hàng và nhận giá trị trên không gian các tập con đóng của không gian Rademacher dạng p. Để thu được các kết quả trên, chúng tôi thiết lập dạng định lý Stolz cho trường hợp mảng tam giác.

Để thiết lập định lý ergodic Birkhoff và luật số lớn cho biến ngẫu nhiên đa trị ứng với hội tụ Mosco và hội tụ Wijsman, chúng tôi mở rộng kỹ thuật lồi hóa từ trường hợp dãy sang các trường hợp: mảng hai chỉ số và mảng tam giác.

7.2. Cấu trúc của luận án

Ngoài các phần Một số ký hiệu thường dùng trong luận án, Mở đầu, Kết luận chung và kiến nghị, Danh mục công trình liên quan trực tiếp đến luận án và Tài

liệu tham khảo, nội dung chính của luận án được trình bày trong bốn chương.

Chương 1 được dành để giới thiệu một số kiến thức cơ bản của không gian các tập con đóng của không gian Banach, các tính chất về giải tích lồi và giải tích hàm, thiết lập các kết quả hội tụ đối với các tôpô Mosco và Wijsman cho mảng các tập con đóng của một không gian Banach và cho mảng các biến ngẫu nhiên đa trị. Mục 1.1 trình bày phần kiến thức chuẩn bị bao gồm các ký hiệu, các định nghĩa và các khái niệm cơ bản liên quan đến nội dung của cả luận án. Mục 1.2 trình bày định nghĩa các loại hội tụ thường gặp trên không gian các tập con đóng của không gian Banach và chứng minh một số tính chất về hội tụ Mosco và hội tụ Wijsman cho mảng nhiều chỉ số. Mục 1.3 được dành để thiết lập các kết quả hội tụ theo các tôpô Mosco và Wijsman đối với mảng nhiều chỉ số các biến ngẫu nhiên đa trị. Các kết quả này được sử dụng để chứng minh định lý ergodic Birkhoff và luật số lớn đa trị ở các chương tiếp theo. Các kết quả chính của Chương 1 là Định lý 1.2.3, Định lý 1.2.5, Định lý 1.2.6, Định lý 1.2.7, Định lý 1.3.1 và Định lý 1.3.3.

Chương 2 trình bày về định lý ergodic Birkhoff đối với cấu trúc nhiều chiều cho biến ngẫu nhiên đơn trị và đa trị. Mục 2.1 giới thiệu một số khái niệm và tính chất cơ bản của lý thuyết ergodic phục vụ cho nội dung chính của chương. Trong mục 2.2, chúng tôi thiết lập định lý ergodic Birkhoff dạng nhiều chiều cho phần tử ngẫu nhiên nhận giá trị trên không gian Banach thực và khả ly. Đây là kết quả quan trọng để thiết lập định lý ergodic Birkhoff đa trị có cấu trúc nhiều chiều. Mục 2.3 trình bày định lý ergodic Birkhoff dạng hai chiều cho biến ngẫu nhiên đa trị theo các loại hội tụ Mosco và Wijsman. Trong mục này, chúng tôi còn chứng minh định lý ergodic Birkhoff đa trị dạng nhiều chiều đối với trường hợp phép biến đổi bảo toàn độ đo không được giả thiết là ergodic. Mục 2.4 trình bày định lý ergodic Birkhoff dạng hai chiều cho biến ngẫu nhiên mờ theo hội tụ Mosco. Các kết quả chính của Chương 2 là Định lý 2.2.2, Định lý 2.3.6 và Định lý 2.4.1.

Chương 3 được dành để nghiên cứu luật số lớn đối với mảng hai chiều các biến ngẫu nhiên đa trị theo các loại hội tụ Mosco và Wijsman. Mục 3.1 trình bày các

bổ đề cần thiết cho chứng minh các kết quả chính của Chương 3. Mục 3.2 được dành để thiết lập luật số lớn đối với mảng hai chỉ số các biến ngẫu nhiên đa trị cho các trường hợp: độc lập đôi một cùng phân phối, hoặc độc lập và nhận giá trị trên không gian các tập con đóng của không gian Rademacher dạng p, hoặc phụ thuộc 2-hoán đổi được. Các kết quả chính của Chương 3 là Định lý 3.2.1, Định lý 3.2.2, Định lý 3.2.6, Định lý 3.2.7 và Định lý 3.2.8.

Chương 4 trình bày về luật số lớn đối với mảng tam giác các biến ngẫu nhiên đa trị theo các loại hội tụ Mosco và Wijsman. Mục 4.1 thiết lập dạng định lý Stolz cho trường hợp mảng tam giác. Mục 4.2 nghiên cứu luật số lớn cho mảng tam giác các biến ngẫu nhiên đa trị thỏa mãn: độc lập theo hàng và nhận giá trị trên không gian các tập con đóng của không gian Rademacher dạng p. Các kết quả chính của Chương 4 là Định lý 4.2.1 và Định lý 4.2.3.

Các kết quả chính của luận án đã được trình bày tại Hội nghị Toán học phối hợp Việt-Pháp (Đại học Sư phạm Huế, 20-24/08/2012), Đại hội Toán học Việt Nam lần thứ 8 (Trường Sĩ quan Thông tin, 10-14/08/2013), Hội nghị toàn quốc lần thứ 5: "Xác suất - Thống kê: nghiên cứu, ứng dụng và giảng dạy" (Đại học Sư phạm Đà Nẵng, 23-25/05/2015), Seminar của Bộ môn Xác suất thống kê và Toán ứng dụng thuộc Khoa Sư phạm Toán học-Trường Đại học Vinh (từ năm 2011 đến năm 2015). Phần lớn các kết quả này đã được công bố trên các tạp chí *Set-Valued and Variational Analysis*, *Statistics and Probability Letters* và *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*.

CHƯƠNG 1

MỘT SỐ TÍNH CHẤT VỀ HỘI TỤ MOSCO VÀ HỘI TỤ WIJSMAN

Trong chương này, chúng tôi giới thiệu một số khái niệm cơ bản về xác suất trên không gian các tập con đóng của một không gian Banach, nghiên cứu các loại hội tụ và các tính chất cần thiết về giải tích hàm, giải tích lồi trên không gian này. Chúng tôi thiết lập một số kết quả hội tụ liên quan tới các tôpô Mosco và Wijsman đối với mảng nhiều chỉ số các tập con đóng của một không gian Banach thực, khả ly và đối với mảng nhiều chỉ số các biến ngẫu nhiên đa trị. Các kết quả chính của chương được viết dựa trên bài báo [13].

1.1. Một số kiến thức chuẩn bị

Trong luận án này, nếu không nói gì thêm, ta luôn giả thiết rằng $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ là một không gian xác suất, $\mathcal{F}$ là một σ-đại số con của $\mathcal{A}$, $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$ là không gian Banach thực và khả ly, $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}$ là σ-đại số Borel của $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}^*$ là không gian đối ngẫu của $\mathfrak{X}$. Ký hiệu $c(\mathfrak{X})$ (tương ứng, $cc(\mathfrak{X})$, $cwk(\mathfrak{X})$, $k(\mathfrak{X})$, $ck(\mathfrak{X})$) là họ tất cả các tập con khác rỗng và đóng (tương ứng, lồi và đóng, lồi và compact yếu, compact, lồi và compact) của $\mathfrak{X}$.

Nếu đồng nhất phần tử $x \in \mathfrak{X}$ với tập đơn tử $\{x\} \in c(\mathfrak{X})$ thì có thể coi $\mathfrak{X}$ là tập con của $c(\mathfrak{X})$. Từ đó, có thể nói các kết quả thu được trong luận án này đối với biến ngẫu nhiên đa trị là sự tổng quát các kết quả tương ứng đối với phần tử ngẫu nhiên đơn trị. Tuy nhiên, do cấu trúc tôpô của không gian các tập đóng và do những đặc tính đặc biệt của các phép toán trong lý thuyết tập hợp nên các biến ngẫu nhiên đa trị có nhiều tính chất phong phú hơn.

Ký hiệu $\mathbb{N}$ là tập các số nguyên dương, $\mathbb{Q}$ là tập các số hữu tỉ, $\mathbb{R}$ là tập các số thực và $\mathbb{R}_+$ là tập các số thực không âm.

Với mỗi $d \in \mathbb{N}$, trên tập hợp $\mathbb{N}^d$, các phần tử $(1, 1, \ldots, 1)$, $(2, 2, \ldots, 2)$, $(3, 3, \ldots, 3)$, $(m_1, m_2, \ldots, m_d)$, $(n_1, n_2, \ldots, n_d)$ lần lượt được ký hiệu bởi $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$, $\mathbf{3}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$. Giả sử $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_d) \in \mathbb{N}^d$, ta ký hiệu $|\mathbf{n}| = \prod_{i=1}^{d} n_i$, $\mathbf{n}_{\max} = \max\{n_i : i = 1, 2, \ldots, d\}$ và $\mathbf{n}_{\min} = \min\{n_i : i = 1, 2, \ldots, d\}$. Với hai số thực m và n, giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của chúng tương ứng được ký hiệu bởi $m \vee n$ và $m \wedge n$. Với mỗi $a \in \mathbb{R}$, lôgarit cơ số 2 của $a \vee 1$ được ký hiệu là $\log^+ a$. Với $\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, ta viết $\mathbf{m} \preceq \mathbf{n}$ (tương ứng, $\mathbf{m} \prec \mathbf{n}$) nếu $m_i \leqslant n_i$ (tương ứng, $m_i < n_i$) với mọi $i = 1, 2, ..., d$.

Với $A, B \subset \mathfrak{X}$, cl$A$, co$A$ và $\overline{\text{co}}A$ tương ứng ký hiệu *bao đóng*, *bao lồi* và *bao lồi đóng* của A; *hàm khoảng cách* $d(\cdot, A)$ của A, *khoảng cách Hausdorff* $d_{\mathrm{H}}(A, B)$ của A và B, *hàm tựa* $s(\cdot, A)$ của A, *chuẩn* $\|A\|$ của A tương ứng được định nghĩa bởi

$$d(x, A) = \inf\{\|x - y\| \ : y \in A\}, (x \in \mathfrak{X}),$$

$$d_{\mathrm{H}}(A, B) = \max\{\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, A)\},$$

$$s(x^*, A) = \sup\{\langle x^*, y\rangle \ : y \in A\}, (x^* \in \mathfrak{X}^*),$$

$$\|A\| = \sup\{||x|| \ : x \in A\}.$$

Đặt $\mathbf{B}^* = \{x^* \in \mathfrak{X}^* : \|x^*\| \leq 1\}$ và $\mathbf{S}^* = \{x^* \in \mathfrak{X}^* : \|x^*\| = 1\}$. Khi đó, $\mathbf{B}^*$ và $\mathbf{S}^*$ tương ứng gọi là *hình cầu đơn vị đóng* và *mặt cầu đơn vị* của $\mathfrak{X}^*$.

Ký hiệu $\mathcal{P}(\mathfrak{X})$ là tập tất cả các tập con khác rỗng của $\mathfrak{X}$. Trên $\mathcal{P}(\mathfrak{X})$, ta trang bị các phép toán sau

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\},$$

$$\lambda A = \{\lambda a : a \in A\},$$

trong đó $A, B \in \mathcal{P}(\mathfrak{X})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Nói chung, không tồn tại phần tử đối của $A \in \mathcal{P}(\mathfrak{X})$ nên $\mathcal{P}(\mathfrak{X})$ không phải là một không gian tuyến tính ứng với phép toán lấy tổng và lấy tích vô hướng nêu trên. Hơn nữa, ngay cả khi A và B là các tập đóng và bị chặn thì $A + B$ có thể không phải là tập đóng (xem ví dụ trong [51, Chú ý 1.1.1, tr. 1-2]). Tuy nhiên, nếu $A, B \in ck(\mathfrak{X})$ thì $A + B \in ck(\mathfrak{X})$.

σ-đại số trên $c(\mathfrak{X})$ sinh bởi các tập

$$U^- := \{C \in c(\mathfrak{X}) : C \cap U \neq \emptyset\}$$

với U là tập mở của $\mathfrak{X}$, được gọi là *σ-đại số Effrös* và được ký hiệu là $\mathcal{B}_{c(\mathfrak{X})}$ (xem [41]).

1.1.1 Định nghĩa. ([41, tr. 614]) Ánh xạ $F : \Omega \to c(\mathfrak{X})$ được gọi là *$\mathcal{F}$-đo được* nếu với mọi $B \in \mathcal{B}_{c(\mathfrak{X})}$, $F^{-1}(B) \in \mathcal{F}$. Ánh xạ $\mathcal{F}$-đo được F còn được gọi là *biến ngẫu nhiên đa trị $\mathcal{F}$-đo được*. Nếu $\mathcal{F} = \mathcal{A}$ thì ta nói gọn F là *đo được*, hoặc *biến ngẫu nhiên đa trị*.

1.1.2 Định lý. ([42, Định lý 1.0]) *Ánh xạ $F : \Omega \to c(\mathfrak{X})$ đo được khi và chỉ khi tồn tại dãy $\{f_n : n \geq 1\}$ các phần tử ngẫu nhiên từ Ω vào $\mathfrak{X}$ sao cho $F(\omega) = \mathrm{cl}\{f_n(\omega) : n \geq 1\}$ với mọi $\omega \in \Omega$. Dãy $\{f_n : n \geq 1\}$ như trên được gọi là một biểu diễn Castaing của F.*

Các phép toán đối với các biến ngẫu nhiên đa trị được định nghĩa tương ứng là các phép toán trên $\mathcal{P}(\mathfrak{X})$ cho mỗi $\omega \in \Omega$.

Theo [51, Định lý 1.2.3], nếu F_1, F_2 là các biến ngẫu nhiên đa trị và ξ là biến ngẫu nhiên (đơn trị) thì

(*a*) $d_{\mathrm{H}}(F_1(\omega), F_2(\omega)), d(x, F(\omega))$ $(x \in \mathfrak{X})$ và $s(x^*, F(\omega))$ $(x^* \in \mathfrak{X}^*)$ là các biến ngẫu nhiên (đơn trị);

(*b*) $\mathrm{cl}(F_1 + F_2), \xi F_1$ và $\overline{\mathrm{co}} F_1$ là các biến ngẫu nhiên đa trị.

Với mỗi biến ngẫu nhiên đa trị F, ta ký hiệu $\mathcal{A}_F = \{F^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}_{c(\mathfrak{X})}\}$. Khi đó $\mathcal{A}_F$ là σ-đại số con bé nhất của $\mathcal{A}$ mà F đo được. *Phân phối xác suất* của F là độ đo xác suất $\mathbb{P}_F$ trên $\mathcal{B}_{c(\mathfrak{X})}$ được xác định bởi

$$\mathbb{P}_F(B) = \mathbb{P}(F^{-1}(B)), B \in \mathcal{B}_{c(\mathfrak{X})}.$$

1.1.3 Định nghĩa. ([41, tr. 623]) Một họ các biến ngẫu nhiên đa trị $\{F_i : i \in I\}$ được gọi là *độc lập* (tương ứng, *độc lập đôi một*) nếu họ các σ-đại số sinh bởi chúng $\{\mathcal{A}_{F_i} : i \in I\}$ là độc lập (tương ứng, độc lập đôi một), và được gọi là *cùng phân phối* nếu tất cả các phân phối xác suất $\mathbb{P}_{F_i}$, $i \in I$ đều bằng nhau.

1.1.4 Định nghĩa. ([45, tr. 267]) Một họ hữu hạn các biến ngẫu nhiên đa trị $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ được gọi là *hoán đổi được* nếu với mọi phép thế π của tập $\{1, 2, \ldots, n\}$ và mọi tập con $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ của $\mathcal{B}_{c(\mathfrak{X})}$,

$$\mathbb{P}(F_1 \in B_1, \ldots, F_n \in B_n) = \mathbb{P}(F_{\pi(1)} \in B_1, \ldots, F_{\pi(n)} \in B_n).$$

Một họ đếm được các biến ngẫu nhiên đa trị được gọi là *hoán đổi được* nếu mọi họ con hữu hạn của nó đều hoán đổi được.

Xuất phát từ khái niệm mảng các biến ngẫu nhiên (đơn trị) 2-hoán đổi được (xem [25, Định nghĩa 3] cho trường hợp biến ngẫu nhiên thực, xem [23, tr. 156] cho trường hợp phần tử ngẫu nhiên nhận giá trị trên không gian Banach khả ly), chúng tôi phát biểu khái niệm tương tự cho trường hợp họ các biến ngẫu nhiên đa trị.

1.1.5 Định nghĩa. Họ các biến ngẫu nhiên đa trị $\{F_i : i \in I\}$ được gọi là 2-*hoán đổi được* nếu với mọi $i_1, i_2, j_1, j_2 \in I$, $i_1 \neq i_2$, $j_1 \neq j_2$ và mọi $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_{c(\mathfrak{X})}$,

$$\mathbb{P}(F_{i_1} \in B_1, F_{i_2} \in B_2) = \mathbb{P}(F_{j_1} \in B_1, F_{j_2} \in B_2).$$

Mối quan hệ giữa tính độc lập cùng phân phối, tính độc lập đôi một cùng phân phối, tính hoán đổi được, tính 2-hoán đổi được và tính cùng phân phối của họ các biến ngẫu nhiên đa trị được thể hiện bởi sơ đồ sau:

$$\begin{tikzcd}
\text{độc lập cùng phân phối} \arrow[r] \arrow[d] & \text{độc lập đôi một cùng phân phối} \arrow[d] \\
\text{hoán đổi được} \arrow[r] & \text{2-hoán đổi được} \arrow[d] \\
 & \text{cùng phân phối}
\end{tikzcd}$$

1.1.6 Định nghĩa. ([25, Định nghĩa 2]) Mảng các biến ngẫu nhiên nhận giá trị thực $\{f_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ được gọi là 2-*hoán đổi được đến moment bậc* 2 nếu thỏa mãn hai điều kiện sau:

(a) với mọi $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbb{N}^d$, $\mathbf{i} \neq \mathbf{j}$, $\mathbb{E}(f_{\mathbf{i}} f_{\mathbf{j}}) = \mathbb{E}(f_{\mathbf{1}} f_{\mathbf{2}})$,

(b) với mọi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, $\mathbb{E} f_{\mathbf{n}} = \mathbb{E} f_{\mathbf{1}}$ và $\mathbb{E} f_{\mathbf{n}}^2 = \mathbb{E} f_{\mathbf{1}}^2$.

1.1.7 Định nghĩa. ([42]) Phần tử ngẫu nhiên $f : \Omega \to \mathfrak{X}$ được gọi là *lát cắt* (hay, *hàm chọn*) của biến ngẫu nhiên đa trị F nếu $f(\omega) \in F(\omega)$ h.c.c.

Tập hợp tất cả các lát cắt (tương ứng, lát cắt $\mathcal{F}$-đo được) của F được ký hiệu là $\mathcal{S}_F^0$ (tương ứng, $\mathcal{S}_F^0(\mathcal{F})$).

Với mỗi $p \geq 1$, ký hiệu $\mathbf{L}^p(\mathcal{F}, \mathfrak{X})$ là không gian Banach các phần tử ngẫu nhiên $\mathcal{F}$-đo được $f : \Omega \to \mathfrak{X}$ sao cho

$$\| f \|_p = (\mathbb{E} \| f \|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Nếu $\mathcal{F} = \mathcal{A}$ thì $\mathbf{L}^p(\mathcal{A}, \mathfrak{X})$ được viết gọn là $\mathbf{L}^p(\mathfrak{X})$. Nếu $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$ thì ta viết gọn $\mathbf{L}^p$ thay cho $\mathbf{L}^p(\mathbb{R})$.

Với mỗi $p \geq 1$ và mỗi biến ngẫu nhiên đa trị $\mathcal{F}$-đo được F, đặt

$$\mathcal{S}_F^p(\mathcal{F}) = \{f \in \mathbf{L}^p(\mathcal{F}, \mathfrak{X}) : f(\omega) \in F(\omega) \text{ h.c.c.}\}.$$

Trong trường hợp $\mathcal{F} = \mathcal{A}$ ta viết $\mathcal{S}_F^p(\mathcal{A})$ gọn lại là $\mathcal{S}_F^p$.

1.1.8 Định nghĩa. ([51, Định nghĩa 1.3.8]) Biến ngẫu nhiên đa trị $F : \Omega \to c(\mathfrak{X})$ được gọi là *khả tích* nếu $\mathcal{S}_F^1$ khác rỗng.

Nếu biến ngẫu nhiên đa trị F khả tích thì tồn tại một biểu diễn Castaing của F thuộc vào $\mathcal{S}_F^1$ (xem [42, Bổ đề 1.1]). F khả tích nếu và chỉ nếu $d(0, F(\cdot)) \in \mathbf{L}^1$ (xem [51, Định lý 1.3.10]).

Trong [4], R. J. Aumann đã giới thiệu khái niệm kỳ vọng của biến ngẫu nhiên đa trị như sau.

1.1.9 Định nghĩa. ([4]) *Kỳ vọng* của biến ngẫu nhiên đa trị khả tích F, ký hiệu $\mathbb{E}F$, được định nghĩa bởi

$$\mathbb{E}F := \{\mathbb{E}f : f \in \mathcal{S}_F^1\},$$

trong đó $\mathbb{E}f$ là tích phân Bochner của phần tử ngẫu nhiên f.

Lưu ý rằng $\mathbb{E}F$ có thể không phải là tập đóng (xem [51, Ví dụ 2.1.3, tr. 41-42]). Trong [51, Định lý 2.2.2 và Định lý 2.2.3, tr. 47-52], S. Li, Y. Ogura và

V. Kreinovich đã chỉ ra rằng $\mathbb{E}F$ là tập con đóng của $\mathfrak{X}$ nếu thỏa mãn một trong hai điều kiện:

(1) $\mathfrak{X}$ có tính chất Radon-Nikodym và F nhận giá trị tập lồi, compact;

(2) $\mathfrak{X}$ là một không gian phản xạ và F nhận giá trị tập lồi.

Ngoài ra, với mỗi biến ngẫu nhiên đa trị $\mathcal{F}$-đo được F, ta định nghĩa

$$\mathbb{E}(F, \mathcal{F}) := \{\mathbb{E}f : f \in \mathcal{S}_F^1(\mathcal{F})\}.$$

Với mỗi $x^* \in \mathfrak{X}^*$, hàm $s(x^*, \cdot) : \mathcal{P}(\mathfrak{X}) \to \mathbb{R}$ có tính chất tuyến tính, theo nghĩa với mọi $A, B \subset \mathfrak{X}$ và mọi $\lambda \in \mathbb{R}_+$,

$$s(x^*, A + B) = s(x^*, A) + s(x^*, B),$$
$$s(x^*, \lambda A) = \lambda s(x^*, A).$$

Theo [51, Định lý 2.1.12], $\mathbb{E}s(x^*, F) = s(x^*, \mathbb{E}F)$ với F là một biến ngẫu nhiên đa trị khả tích.

1.1.10 Định nghĩa. ([50, tr. 246]) Giả sử $\{r_j : j \geqslant 1\}$ là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối và

$$\mathbb{P}(r_1 = 1) = \mathbb{P}(r_1 = -1) = \frac{1}{2}.$$

Không gian $\mathfrak{X}$ được gọi là một *không gian Rademacher dạng* p ($p \in [1, 2]$) nếu tồn tại một hằng số $C > 0$ sao cho với mọi $i \geqslant 1$ và mọi $v_j \in \mathfrak{X}$ ($1 \leqslant j \leqslant i$) thì

$$\Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{j=1}^{i} r_j v_j\Big\|^p\Big)^{1/p} \leqslant C\Big(\sum_{j=1}^{i} \|v_j\|^p\Big)^{1/p}.$$

Trong [43], J. Hoffmann-Jørgensen và G. Pisier đã chỉ ra rằng điều kiện để không gian $\mathfrak{X}$ là không gian Rademacher dạng p ($p \in [1, 2]$) tương đương với điều kiện tồn tại hằng số $C > 0$ sao cho

$$\mathbb{E}\Big\|\sum_{j=1}^{n} f_j\Big\|^p \leq C \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\|f_j\|^p$$

với mọi dãy $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ các biến ngẫu nhiên độc lập, có kỳ vọng bằng 0 và có moment bậc p hữu hạn.

Nếu không gian Banach thực, khả ly là không gian Rademacher dạng p với p nào đó thuộc $(1, 2]$ thì nó cũng là không gian Rademacher dạng q với mọi $q \in [1, p)$. Mọi không gian Banach thực và khả ly đều là không gian Rademacher dạng 1. Với $p \geq 1$, ký hiệu $\mathcal{L}^p$ là không gian các hàm có lũy thừa bậc p khả tích và ℓ_p là không gian các dãy có lũy thừa bậc p khả tổng. Khi đó, các không gian $\mathcal{L}^p$ và ℓ_p đều là không gian Rademacher dạng $2 \wedge p$. Mọi không gian Hilbert thực, khả ly và mọi không gian Banach thực, hữu hạn chiều và khả ly đều là không gian Rademacher dạng 2. Đặc biệt, $\mathbb{R}$ là không gian Rademacher dạng 2. Chúng ta có thể tìm hiểu thêm các đặc trưng của không gian Rademacher dạng p trong tài liệu [68].

Với $\{x_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\} \subset \mathbb{R}$, ký hiệu

$$\begin{aligned}
\liminf_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} x_{\mathbf{n}} &= \sup_{k\geq 1} \inf_{\mathbf{n}_{\max}\geq k} x_{\mathbf{n}},\\
\limsup_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} x_{\mathbf{n}} &= \inf_{k\geq 1} \sup_{\mathbf{n}_{\max}\geq k} x_{\mathbf{n}},\\
\liminf_{\mathbf{n}_{\min}\to\infty} x_{\mathbf{n}} &= \sup_{k\geq 1} \inf_{\mathbf{n}_{\min}\geq k} x_{\mathbf{n}},\\
\limsup_{\mathbf{n}_{\min}\to\infty} x_{\mathbf{n}} &= \inf_{k\geq 1} \sup_{\mathbf{n}_{\min}\geq k} x_{\mathbf{n}}.
\end{aligned}$$

Ký hiệu s (tương ứng, w) là *tôpô mạnh*, tức là tôpô sinh bởi chuẩn (tương ứng, *tôpô yếu*) trên $\mathfrak{X}$.

1.1.11 Định nghĩa. Ta nói rằng:

(a) Mảng $\{x_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\} \subset \mathbb{R}$ *hội tụ tới* $x \in \mathbb{R}$ khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$ nếu

$$\liminf_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} x_{\mathbf{n}} = \limsup_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} x_{\mathbf{n}} = x.$$

Khi đó, ta ký hiệu $\lim\limits_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} x_{\mathbf{n}} = x$, hoặc $x_{\mathbf{n}} \to x$ khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$.

(b) Mảng $\{x_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\} \subset \mathfrak{X}$ *hội tụ tới* $x \in \mathfrak{X}$ khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$ nếu

$$\lim_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} \|x_{\mathbf{n}} - x\| = 0.$$

Khi đó, ta ký hiệu s-$\lim\limits_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} x_{\mathbf{n}} = x$, hoặc $x_{\mathbf{n}} \xrightarrow{s} x$ khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$ (để cho gọn, ta thường lược bỏ ký hiệu s).

(*c*) Mảng $\{x_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\} \subset \mathfrak{X}$ *hội tụ yếu tới* $x \in \mathfrak{X}$ khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$ nếu

$$\lim_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} \langle x^*, x_{\mathbf{n}}\rangle = \langle x^*, x\rangle$$

với mọi $x^* \in \mathfrak{X}^*$. Khi đó, ta ký hiệu w-$\lim\limits_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} x_{\mathbf{n}} = x$, hoặc $x_{\mathbf{n}} \overset{w}{\to} x$ khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$.

Sự hội tụ khi $\mathbf{n}_{\min} \to \infty$ được phát biểu tương tự.

Có thể kiểm tra được rằng $\lim\limits_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} x_{\mathbf{n}} = x$ (tương ứng, $\lim\limits_{\mathbf{n}_{\min}\to\infty} x_{\mathbf{n}} = x$) nếu và chỉ nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại số nguyên dương K sao cho $\|x_{\mathbf{n}} - x\| \le \varepsilon$ với $\mathbf{n}_{\max} \ge K$ (tương ứng, $\mathbf{n}_{\min} \ge K$).

1.1.12 Bổ đề. (Định lý tách Hahn-Banach, xem [20, tr. 41]) *Giả sử A, B là các tập con lồi, khác rỗng, rời nhau ($A \cap B = \emptyset$) của một không gian định chuẩn $\mathfrak{Y}$ và $\mathfrak{Y}^*$ là không gian đối ngẫu của $\mathfrak{Y}$. Khi đó ta có thể tách A, B theo hai trường hợp sau:*

(*a*) *Nếu A là tập mở thì tồn tại $x^* \in \mathfrak{Y}^*$ và một số thực α sao cho*

$$\langle x^*, a\rangle < \alpha \le \langle x^*, b\rangle,$$

với mọi $a \in A$ và mọi $b \in B$.

(*b*) *Nếu A là tập compact và B là tập đóng, thì tồn tại $x^* \in \mathfrak{Y}^*$ và hai số thực α, β sao cho*

$$\langle x^*, a\rangle < \alpha < \beta < \langle x^*, b\rangle,$$

với mọi $a \in A$ và mọi $b \in B$.

Dựa trên định nghĩa họ các biến ngẫu nhiên khả tích đều (xem [72]), ta có định nghĩa sau.

1.1.13 Định nghĩa. Họ các phần tử ngẫu nhiên $\{f_i : i \in I\}$ được gọi là *khả tích đều* nếu $\sup\limits_{i\in I} \mathbb{E}\left(\|f_i\|\mathbb{I}_{(\|f_i\|>a)}\right) \to 0$ khi $a \to \infty$.

1.1.14 Định lý. *Họ các phần tử ngẫu nhiên $\{f_i : i \in I\}$ là khả tích đều khi và chỉ khi hai điều kiện sau thỏa mãn:*

(*i*) $\sup\limits_{i\in I} \mathbb{E}\|f_i\| < \infty$,

(ii) với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A) \leq \delta$ thì $\sup_{i \in I} \mathbb{E}\left(\|f_i\| \mathbb{I}_A\right) \leq \varepsilon$.

1.1.15 Định nghĩa. Mảng các phần tử ngẫu nhiên $\{f_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ được gọi là *hội tụ theo trung bình cấp r ($r > 0$)* tới phần tử ngẫu nhiên f khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$ (tương ứng, $\mathbf{n}_{\min} \to \infty$) và được ký hiệu $f_{\mathbf{n}} \to f$ trong $\mathbf{L}^r$ khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$ (tương ứng, $\mathbf{n}_{\min} \to \infty$), nếu

$$\mathbb{E}\|f_{\mathbf{n}} - f\|^r \to 0 \text{ khi } \mathbf{n}_{\max} \to \infty \text{ (tương ứng, } \mathbf{n}_{\min} \to \infty).$$

Bằng lập luận tương tự như chứng minh của [32, Định lý 5.2, tr. 218], ta thu được hai khẳng định sau đây.

1.1.16 Định lý. *Cho trước số thực dương r. Giả sử mảng các phần tử ngẫu nhiên $\{f_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ hội tụ h.c.c. tới phần tử ngẫu nhiên f khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$. Khi đó, mảng $\{\|f_{\mathbf{n}}\|^r : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là khả tích đều khi và chỉ khi $f \in \mathbf{L}^r$ và $f_{\mathbf{n}} \to f$ trong $\mathbf{L}^r$ khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$.*

1.1.17 Định lý. *Cho trước số thực dương r. Giả sử mảng các phần tử ngẫu nhiên $\{f_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ hội tụ h.c.c. tới phần tử ngẫu nhiên f khi $\mathbf{n}_{\min} \to \infty$. Khi đó, mảng $\{\|f_{\mathbf{n}}\|^r : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là khả tích đều kéo theo $f \in \mathbf{L}^r$ và $f_{\mathbf{n}} \to f$ trong $\mathbf{L}^r$ khi $\mathbf{n}_{\min} \to \infty$.*

1.2. Một số tính chất về hội tụ Mosco và hội tụ Wijsman đối với mảng các tập con đóng của không gian Banach

Đầu tiên, chúng tôi giới thiệu một số loại hội tụ quan trọng trên không gian các tập con đóng, khác rỗng của không gian Banach. Giả sử $d \in \mathbb{N}$ và $\{A_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng trên $c(\mathfrak{X})$. Để thuận tiện, các tôpô s và w trên $\mathfrak{X}$ được ký hiệu chung là t. Ký hiệu

$$t\text{-}\liminf_{\mathbf{n}_{\max} \to \infty} A_{\mathbf{n}} = \{x \in \mathfrak{X} : x = t\text{-}\lim_{\mathbf{n}_{\max} \to \infty} x_{\mathbf{n}}, \text{ với } x_{\mathbf{n}} \in A_{\mathbf{n}}\},$$

$$t\text{-}\limsup_{\mathbf{n}_{\max} \to \infty} A_{\mathbf{n}} = \{x \in \mathfrak{X} : x = t\text{-}\lim_{\mathbf{k}_{\max} \to \infty} x_{\mathbf{k}}, \text{ với } x_{\mathbf{k}} \in A_{\mathbf{n}(\mathbf{k})}\},$$

trong đó $\{A_{\mathbf{n}(\mathbf{k})} : \mathbf{k} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng con của mảng $\{A_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ (ở đây, *mảng con* được hiểu theo nghĩa là dãy con theo từng tọa độ). Các tập $t\text{-}\liminf\limits_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}}$ và $t\text{-}\limsup\limits_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}}$ tương ứng gọi là *giới hạn dưới* và *giới hạn trên* của mảng $\{A_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ ứng với tôpô t khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$.

Dễ thấy rằng $t\text{-}\liminf\limits_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}} \subset t\text{-}\limsup\limits_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}}$ và

$$s\text{-}\liminf_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}} \subset w\text{-}\limsup_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}}.$$

1.2.1 Định nghĩa. ([51]) Giả sử $A \in c(\mathfrak{X})$. Mảng $\{A_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\} \subset c(\mathfrak{X})$ được gọi là

(*a*) *hội tụ theo khoảng cách Hausdorff* tới A khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$ và được ký hiệu là $\mathrm{H}\text{-}\lim\limits_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}} = A$, nếu $\lim\limits_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} d_{\mathrm{H}}(A_{\mathbf{n}}, A) = 0$;

(*b*) *hội tụ yếu* tới A khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$ và được ký hiệu là $\mathrm{W}\text{-}\lim\limits_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}} = A$, nếu $\lim\limits_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} s(x^*, A_{\mathbf{n}}) = s(x^*, A)$ với mọi $x^* \in \mathfrak{X}^*$;

(*c*) *hội tụ Wijsman* tới A khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$ và được ký hiệu là $\mathrm{Wijs}\text{-}\lim\limits_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}} = A$, nếu $\lim\limits_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} d(x, A_{\mathbf{n}}) = d(x, A)$ với mọi $x \in \mathfrak{X}$;

(*d*) *hội tụ Kuratowski* tới A ứng với tôpô t khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$ và được ký hiệu là $t\text{-}\lim\limits_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}} = A$, nếu

$$t\text{-}\limsup_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}} = t\text{-}\liminf_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}} = A;$$

(*e*) *hội tụ Mosco* tới A khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$ và được ký hiệu là $\mathrm{M}\text{-}\lim\limits_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}} = A$, nếu

$$w\text{-}\limsup_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}} = s\text{-}\liminf_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}} = A.$$

Sự hội tụ khi $\mathbf{n}_{\min} \to \infty$ được phát biểu tương tự.

1.2.2 Nhận xét. (1) Nhận thấy rằng $t\text{-}\lim\limits_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}} = A$ nếu và chỉ nếu

$$t\text{-}\limsup_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}} \subset A \subset t\text{-}\liminf_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}}.$$

Hơn nữa, $\mathrm{M}\text{-}\lim\limits_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}} = A$ nếu và chỉ nếu

$$w\text{-}\limsup_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}} \subset A \subset s\text{-}\liminf_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}}.$$

(2) Hội tụ theo khoảng cách Hausdorff kéo theo hội tụ yếu và hội tụ Wijsman. Nếu hội tụ theo khoảng cách Hausdorff mà giới hạn là một tập lồi, đóng thì sẽ kéo theo hội tụ Mosco. Trên không gian các tập con lồi và compact của không gian hữu hạn chiều, các loại hội tụ Mosco, Wijsman, hội tụ yếu và hội tụ theo khoảng cách Hausdorff là tương đương. Trên không gian các tập con đóng của không gian phản xạ, hội tụ Mosco kéo theo hội tụ Wijsman. Chúng ta có thể tìm hiểu thêm mối liên hệ giữa các loại hội tụ trên không gian các tập con đóng của không gian Banach trong các tài liệu [11, 51].

Tính chất sau đây của giới hạn dưới ứng với tôpô s đối với mảng nhiều chỉ số các phần tử trên $c(\mathfrak{X})$ được chúng tôi sử dụng thường xuyên trong luận án. Chứng minh cho trường hợp một chiều ($d = 1$), có thể tham khảo trong [54, Mệnh đề 8.2.1, tr. 146]. Đối với trường hợp mảng nhiều chiều, chúng tôi cần đưa ra một chứng minh khác, sử dụng phương pháp phản chứng.

1.2.3 Định lý. *Giả sử* $\{A_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\} \subset c(\mathfrak{X})$. *Khi đó, nếu* $s\text{-}\liminf_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}} \neq \emptyset$ *thì* $s\text{-}\liminf_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}} \in c(\mathfrak{X})$.

Chứng minh. Giả sử $\{x_k : k \geq 1\}$ là một dãy trong $s\text{-}\liminf_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}}$ và $x_k \to x$ khi $k \to \infty$. Khi đó, với mỗi $k \geq 1$, do $x_k \in s\text{-}\liminf_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}}$ nên tồn tại mảng $\{x_{\mathbf{n}}^{(k)} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ sao cho $x_{\mathbf{n}}^{(k)} \in A_{\mathbf{n}}$ với mọi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ và $x_{\mathbf{n}}^{(k)} \to x_k$ khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$.

Để chứng minh $s\text{-}\liminf_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}}$ là tập đóng ta cần chứng minh $x \in s\text{-}\liminf_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}}$. Nghĩa là, ta cần chứng tỏ tồn tại mảng $\{y_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ sao cho $y_{\mathbf{n}} \in A_{\mathbf{n}}$ với mọi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ và $y_{\mathbf{n}} \to x$ khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$. Đặc biệt hơn, ta chỉ cần chỉ ra tồn tại mảng $\{y_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ với $y_{\mathbf{n}} \in \{x_{\mathbf{n}}^{(k)} : k \geq 1\}$ với mọi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ sao cho $y_{\mathbf{n}} \to x$ khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$. Điều này có nghĩa là, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $N_\varepsilon > 0$ sao cho với mọi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ mà $\mathbf{n}_{\max} > N_\varepsilon$ đều tồn tại $y_{\mathbf{n}} \in \{x_{\mathbf{n}}^{(k)} : k \geq 1\}$ thỏa mãn $\|y_{\mathbf{n}} - x\| < \varepsilon$. Thật vậy, giả sử điều này không đúng, nghĩa là, với mọi mảng $\{y_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ sao cho $y_{\mathbf{n}} \in \{x_{\mathbf{n}}^{(k)} : k \geq 1\}$ với mọi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ ta đều có $y_{\mathbf{n}} \nrightarrow x$ khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$. Khi đó, tồn tại $\varepsilon > 0$ và tồn tại dãy tăng ngặt các chỉ số $\{n_i : i \geq 1\} \subset \mathbb{N}$ sao cho với mỗi $i \geq 1$, tồn tại $\mathbf{n}_i \in \mathbb{N}^d$ thỏa mãn $(\mathbf{n}_i)_{\max} = n_i$ và

$$\|y_{\mathbf{n}_i} - x\| \geq \varepsilon \text{ với mọi } y_{\mathbf{n}_i} \in \{x_{\mathbf{n}_i}^{(k)} : k \geq 1\}. \tag{1.2.1}$$

Từ giả thiết $x_k \to x$ khi $k \to \infty$, tồn tại $k_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $k \geq k_0$,

$$\|x_k - x\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Đặc biệt, khi $k = k_0$, ta có $\|x_{k_0} - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tiếp tục, do $x_{\mathbf{n}}^{(k_0)} \to x_{k_0}$ khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$, nên tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ mà $\mathbf{n}_{\max} \geq n_0$,

$$\left\| x_{\mathbf{n}}^{(k_0)} - x_{k_0} \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Rõ ràng, tồn tại $\mathbf{n}_{i_0} \in \mathbb{N}^d$ sao cho $(\mathbf{n}_{i_0})_{\max} \geq n_0$. Khi đó,

$$\left\| x_{\mathbf{n}_{i_0}}^{(k_0)} - x_{k_0} \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Từ đó,

$$\left\| x_{\mathbf{n}_{i_0}}^{(k_0)} - x \right\| \leq \left\| x_{\mathbf{n}_{i_0}}^{(k_0)} - x_{k_0} \right\| + \|x_{k_0} - x\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Điều này mâu thuẫn với (1.2.1). Do đó, ta có điều phải chứng minh. □

Dựa vào định lý tách Hahn-Banach, chúng tôi đưa ra một chứng minh chi tiết kết quả sau đây.

1.2.4 Bổ đề. *Giả sử A là một tập con khác rỗng của $\mathfrak{X}$. Khi đó, tồn tại dãy $\{x_j^* : j \geq 1\} \subset \mathbf{S}^*$ thỏa mãn $x \in \overline{\text{co}}A$ khi và chỉ khi $\langle x_j^*, x\rangle \leq s(x_j^*, A)$ với mọi $j \geq 1$.*

Chứng minh. Với mỗi $x \in \overline{\text{co}}A$, tồn tại các dãy $\{x_n : n \geq 1\} \subset A$, $\{y_n : n \geq 1\} \subset A$ và $\{\mu_n : n \geq 1\} \subset [0, 1]$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} (\mu_n x_n + (1 - \mu_n)y_n) = x.$$

Với mọi $x^* \in \mathfrak{X}^*$,

$$\begin{aligned}
\langle x^*, \mu_n x_n + (1 - \mu_n)y_n\rangle &= \mu_n\langle x^*, x_n\rangle + (1 - \mu_n)\langle x^*, y_n\rangle \\
&\leq \mu_n s(x^*, A) + (1 - \mu_n)s(x^*, A) \\
&= s(x^*, A), \text{ với mọi } n \geq 1.
\end{aligned}$$

Chuyển qua giới hạn khi $n \to \infty$ ta nhận được chiều thuận trong kết luận của bổ đề.

Do $\mathfrak{X}$ là không gian khả ly, nên tồn tại dãy $\{x_j : j \geq 1\}$ trù mật trên $\mathfrak{X} \setminus \overline{\text{co}}A$. Với mỗi $j \geq 1$, do $x_j \notin \overline{\text{co}}A$ và $\overline{\text{co}}A$ là tập đóng nên $d(x_j, \overline{\text{co}}A) > 0$. Gọi $U(x_j) = \{y \in \mathfrak{X} : \|x_j - y\| < d(x_j, \overline{\text{co}}A)\}$ là hình cầu mở tâm x_j, bán kính $d(x_j, \overline{\text{co}}A)$. Rõ ràng $U(x_j)$ là tập lồi khác rỗng và $\overline{\text{co}}A \cap U(x_j) = \emptyset$. Sử dụng định lý tách Hahn-Banach (xem Bổ đề 1.1.12) với lưu ý rằng ta có thể thay x^* bởi $-x^*$ hoặc $\frac{x^*}{\|x^*\|}$, ta suy ra tồn tại $x_j^* \in \mathbf{S}^*$ và số thực α sao cho

$$\langle x_j^*, a\rangle > \alpha \geq \langle x_j^*, b\rangle,$$

với mọi $a \in U(x_j)$ và mọi $b \in \overline{\text{co}}A$. Từ đó, ta có

$$\begin{aligned} s(x_j^*, \overline{\text{co}}A) = \sup_{b \in \overline{\text{co}}A} \langle x_j^*, b\rangle \leq \alpha &\leq \inf_{a \in \text{cl}(U(x_j))} \langle x_j^*, a\rangle \\ &= \inf_{a \in \text{cl}(U(x_j))} \{\langle x_j^*, x_j\rangle + \langle x_j^*, a - x_j\rangle\} \\ &= \langle x_j^*, x_j\rangle + \inf_{a \in \text{cl}(U(x_j))} \langle x_j^*, a - x_j\rangle \\ &= \langle x_j^*, x_j\rangle - d(x_j, \overline{\text{co}}A). \end{aligned}$$

Để chứng minh chiều ngược lại trong kết luận của bổ đề, ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử tồn tại $x \in \mathfrak{X}$ sao cho $\langle x_j^*, x\rangle \leq s(x_j^*, A)$ với mọi $j \geq 1$ và $x \notin \overline{\text{co}}A$. Khi đó, tồn tại dãy con $\{x_{j(k)} : k \geq 1\}$ của dãy $\{x_j : j \geq 1\}$ sao cho $\{x_{j(k)} : k \geq 1\}$ hội tụ tới x. Từ đó,

$$\begin{aligned} d(x_{j(k)}, \overline{\text{co}}A) &\leq \langle x_{j(k)}^*, x_{j(k)}\rangle - s(x_{j(k)}^*, \overline{\text{co}}A) \\ &\leq \langle x_{j(k)}^*, x_{j(k)}\rangle - s(x_{j(k)}^*, A) \\ &\leq \langle x_{j(k)}^*, x_{j(k)}\rangle - \langle x_{j(k)}^*, x\rangle \\ &\leq \langle x_{j(k)}^*, x_{j(k)} - x\rangle \\ &\leq \|x_{j(k)} - x\|, \text{ với mọi } k \geq 1. \end{aligned}$$

Cho k tiến tới ∞ ta nhận được $d(x, \overline{\text{co}}A) = 0$. Điều này mâu thuẫn với $x \notin \overline{\text{co}}A$. Từ đó ta có điều phải chứng minh. □

Định lý sau đây được chúng tôi thiết lập để chứng minh phần "$\limsup$" của hội tụ Mosco đối với luật số lớn cho mảng các biến ngẫu nhiên đa trị.

1.2.5 Định lý. *Giả sử* $\{A, A_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\} \subset c(\mathfrak{X})$ *và* D^* *là một tập con đếm được của* $\mathbf{S}^*$ *sao cho* $x \in \overline{\text{co}}A$ *khi và chỉ khi* $\langle x^*, x\rangle \leq s(x^*, A)$ *với mọi* $x^* \in D^*$. *Khi đó, nếu*

$$\limsup_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} s(x^*, A_{\mathbf{n}}) \leq s(x^*, A)$$

với mọi $x^* \in D^*$, *thì*

$$w\text{-}\limsup_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}} \subset \overline{\text{co}}A.$$

Chứng minh. Sự tồn tại của D^* dựa vào Bổ đề 1.2.4. Với mỗi $x \in w\text{-}\limsup_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}}$, tồn tại mảng $\{x_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \mathbb{N}^d\}$ sao cho $x_{\mathbf{k}} \in A_{\mathbf{n}(\mathbf{k})}$ với $\{A_{\mathbf{n}(\mathbf{k})} : \mathbf{k} \in \mathbb{N}^d\}$ là mảng con của mảng $\{A_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ và $x_{\mathbf{k}} \xrightarrow{w} x$ khi $\mathbf{k}_{\max} \to \infty$. Từ đó,

$$\begin{aligned}\langle x^*, x\rangle = \lim_{\mathbf{k}_{\max}\to\infty} \langle x^*, x_{\mathbf{k}}\rangle &\leq \lim_{\mathbf{k}_{\max}\to\infty} s(x^*, A_{\mathbf{n}(\mathbf{k})}) \\ &\leq \limsup_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} s(x^*, A_{\mathbf{n}}) \\ &\leq s(x^*, A), \quad x^* \in D^*.\end{aligned}$$

Điều này kéo theo $x \in \overline{\text{co}}A$. Do đó, ta thu được điều phải chứng minh. □

Tiếp theo, các Định lý 1.2.6 và 1.2.7 được chúng tôi thiết lập để chứng minh luật số lớn đa trị theo tôpô Wijsman.

1.2.6 Định lý. *Giả sử* $\{A, A_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\} \subset c(\mathfrak{X})$ *và* D *là một tập con trù mật trên* $\mathfrak{X}$. *Khi đó, nếu*

$$\limsup_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} d(x, A_{\mathbf{n}}) \leq d(x, A), \tag{1.2.2}$$

với mọi $x \in D$, *thì kết luận* (1.2.2) *cũng đúng với mọi* $x \in \mathfrak{X}$.

Chứng minh. Đầu tiên, ta lưu ý rằng hàm khoảng cách $d(\cdot, C)$ là hàm 1-Lipschitz, nghĩa là, với mọi $C \subset \mathfrak{X}$ và mọi $x, y \in \mathfrak{X}$,

$$|d(x, C) - d(y, C)| \leq d(x, y) = \|x - y\|. \tag{1.2.3}$$

Với x bất kỳ thuộc vào $\mathfrak{X}$, tồn tại dãy $\{x_k : k \geq 1\} \subset D$ sao cho $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$. Khi đó, với mỗi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ và mỗi $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} d(x, A_{\mathbf{n}}) - d(x, A) &\leq |d(x, A_{\mathbf{n}}) - d(x_k, A_{\mathbf{n}})| + \{d(x_k, A_{\mathbf{n}}) - d(x_k, A)\} \\ &\qquad + |d(x_k, A) - d(x, A)| \\ &\leq 2d(x, x_k) + \{d(x_k, A_{\mathbf{n}}) - d(x_k, A)\} \ \text{(theo (1.2.3))}. \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

Cho $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$, ta có

$$\limsup_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} \{d(x, A_{\mathbf{n}}) - d(x, A)\} \leq 2d(x, x_k).$$

Sau đó, cho $k \to \infty$, ta nhận được

$$\limsup_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} \{d(x, A_{\mathbf{n}}) - d(x, A)\} \leq 0.$$

Điều này dẫn tới điều phải chứng minh. □

Trong [39, Bổ đề 3.1], C. Hess đã chứng tỏ rằng với mỗi $A \in cc(\mathfrak{X})$,

$$d(x, A) = \sup_{x^* \in \mathbf{B}^*} \{\langle x^*, x\rangle - s(x^*, A)\} \text{ với mọi } x \in \mathfrak{X}, \tag{1.2.5}$$

và tồn tại tập con đếm được D^* của $\mathbf{B}^*$ sao cho

$$d(x, A) = \sup_{x^* \in D^*} \{\langle x^*, x\rangle - s(x^*, A)\}, \ \text{ với mọi } x \in \mathfrak{X}. \tag{1.2.6}$$

Từ kết quả này, chúng tôi thu được định lý sau đây. Trường hợp dãy ($d = 1$), ta có thể xem [39, Bổ đề 3.2].

1.2.7 Định lý. *Giả sử $\{A, A_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\} \subset c(\mathfrak{X})$ và giả sử D^* là một tập con đếm được, trù mật của $\mathbf{B}^*$ sao cho*

$$d(x, \overline{\text{co}}A) = \sup_{x^* \in D^*} \{\langle x^*, x\rangle - s(x^*, \overline{\text{co}}A)\}, \ \textit{với mọi } x \in \mathfrak{X}. \tag{1.2.7}$$

Khi đó, nếu với mọi $x^* \in D^*$

$$\limsup_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} s(x^*, A_{\mathbf{n}}) \leq s(x^*, A)$$

thì với mọi $x \in \mathfrak{X}$

$$\liminf_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} d(x, A_{\mathbf{n}}) \geq d(x, \overline{\text{co}}A).$$

Chứng minh. Sự tồn tại của D^* được khẳng định bởi (1.2.6). Với mỗi $x \in \mathfrak{X}$, từ (1.2.5) và (1.2.7), ta có

$$\begin{aligned}
\liminf_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} d(x, A_{\mathbf{n}}) &\geq \liminf_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} d(x, \overline{\mathrm{co}} A_{\mathbf{n}}) \\
&\geq \liminf_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} \Big(\sup_{x^*\in\mathbf{B}^*} \big\{ \langle x^*, x\rangle - s(x^*, A_{\mathbf{n}}) \big\} \Big) \\
&\geq \sup_{x^*\in\mathbf{B}^*} \Big\{ \liminf_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} \big(\langle x^*, x\rangle - s(x^*, A_{\mathbf{n}}) \big) \Big\} \\
&\geq \sup_{x^*\in\mathbf{B}^*} \Big\{ \langle x^*, x\rangle - s(x^*, A) \Big\} \\
&\geq \sup_{x^*\in D^*} \Big\{ \langle x^*, x\rangle - s(x^*, A) \Big\} = d(x, \overline{\mathrm{co}} A).
\end{aligned}$$

Đây chính là điều phải chứng minh. □

Nghiên cứu mối liên hệ giữa hội tụ Wijsman và hội tụ Kuratowski cho trường hợp mảng nhiều chiều, chúng tôi thu được kết quả thể hiện qua định lý sau đây.

1.2.8 Định lý. *Giả thiết rằng* $\{A, A_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\} \subset c(\mathfrak{X})$. *Khi đó, nếu* Wijs-$\lim\limits_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}} = A$ *thì* s-$\lim\limits_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}} = A$.

Chứng minh. Từ giả thiết Wijs-$\lim\limits_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}} = A$, ta suy ra

$$\lim_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} d(x, A_{\mathbf{n}}) = d(x, A) \text{ với mọi } x \in \mathfrak{X}. \tag{1.2.8}$$

Với mỗi $a \in A$, bằng cách chọn $x = a$,

$$\lim_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} d(a, A_{\mathbf{n}}) = d(a, A) = 0.$$

Từ đó, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $N_1 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$d(a, A_{\mathbf{n}}) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ với mọi } \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d \text{ sao cho } \mathbf{n}_{\max} \geq N_1.$$

Cố định ε ở trên, theo định nghĩa hàm khoảng cách, với mỗi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, tồn tại $x_{\mathbf{n}} \in A_{\mathbf{n}}$ sao cho

$$\|x_{\mathbf{n}} - a\| \leq d(a, A_{\mathbf{n}}) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Điều này kéo theo $\|x_{\mathbf{n}} - a\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ với mọi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ sao cho $\mathbf{n}_{\max} \geq N_1$, và do đó $\lim\limits_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} x_{\mathbf{n}} = a$. Vì vậy, $a \in s$-$\liminf\limits_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}}$, hay $A \subset s$-$\liminf\limits_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}}$.

Tiếp theo, với mọi $y \in s\text{-}\limsup_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}}$, tồn tại mảng con $\{A_{\mathbf{n}(\mathbf{k})} : \mathbf{k} \in \mathbb{N}^d\}$ của mảng $\{A_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ và tồn tại các phần tử $a_{\mathbf{n}(\mathbf{k})} \in A_{\mathbf{n}(\mathbf{k})}$ sao cho $d(y, a_{\mathbf{n}(\mathbf{k})}) \to 0$ khi $\mathbf{k}_{\max} \to \infty$, và do đó $d(y, A_{\mathbf{n}(\mathbf{k})}) \to 0$ khi $\mathbf{k}_{\max} \to \infty$. Theo (1.2.8), $y \in A$ nhờ vào $d(y, A) = 0$. Vì vậy, ta thu được $s\text{-}\limsup_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} A_{\mathbf{n}} \subset A$. □

1.3. Một số tính chất của hội tụ Mosco và hội tụ Wijsman đối với mảng các biến ngẫu nhiên đa trị

Trong Định nghĩa 1.2.1, nếu ta thay $A_{\mathbf{n}}$ bởi $F_{\mathbf{n}}(\omega)$ và A bởi $F(\omega)$ với ω thuộc vào một tập có xác suất 1, trong đó F, $F_{\mathbf{n}}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ là các biến ngẫu nhiên đa trị, thì ta có khái niệm hội tụ hầu chắc chắn cho các biến ngẫu nhiên đa trị.

Kết quả sau đây được chúng tôi sử dụng để chứng minh phần "lim inf" của hội tụ Mosco khi thiết lập luật số lớn đối với mảng các biến ngẫu nhiên đa trị.

1.3.1 Định lý. *Giả sử $\{F_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên đa trị và $A \subset \mathfrak{X}$. Nếu với mọi $x \in A$ và mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $x_\varepsilon \in \mathfrak{X}$ sao cho $\|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon$ và $x_\varepsilon \in s\text{-}\liminf_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} F_{\mathbf{n}}(\omega)$ h.c.c., thì*

$$A \subset s\text{-}\liminf_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} F_{\mathbf{n}}(\omega) \ \ h.c.c.$$

Chứng minh. Do $\mathfrak{X}$ là không gian khả ly nên tồn tại dãy $\{x_j : j \geq 1\}$ trù mật trên A. Với mỗi $j \geq 1$ và mỗi $\varepsilon = \dfrac{1}{k}$ $(k \geq 1)$, tồn tại x_{jk} (chỉ phụ thuộc vào x_j và k) sao cho $\|x_{jk} - x_j\| < \dfrac{1}{k}$ và $x_{jk} \in s\text{-}\liminf_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} F_{\mathbf{n}}(\omega)$ h.c.c. Từ Định lý 1.2.3 và từ $x_{jk} \to x_j$ khi $k \to \infty$, ta suy ra $x_j \in s\text{-}\liminf_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} F_{\mathbf{n}}(\omega)$ h.c.c. với mọi $j \geq 1$. Điều này kéo theo $\{x_j : j \geq 1\} \subset s\text{-}\liminf_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} F_{\mathbf{n}}(\omega)$ h.c.c. Áp dụng Định lý 1.2.3 một lần nữa và lấy bao đóng hai vế bao hàm thức trên, ta thu được $A \subset s\text{-}\liminf_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} F_{\mathbf{n}}(\omega)$ h.c.c. □

Từ Định lý 1.2.6, chúng tôi thu được Định lý 1.3.2 và Định lý 1.3.3 sau đây về phần "lim sup" của hội tụ Wijsman cho trường hợp mảng nhiều chỉ số các biến ngẫu nhiên đa trị.

1.3.2 Định lý. *Giả sử D là một tập con đếm được, trù mật trên $\mathfrak{X}$ và $F, F_{\mathbf{n}}$ ($\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$) là các biến ngẫu nhiên đa trị. Nếu với mỗi $x \in D$*

$$\limsup_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} d(x, F_{\mathbf{n}}(\omega)) \leq d(x, F(\omega)) \text{ h.c.c.},$$

thì

$$\limsup_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} d(x, F_{\mathbf{n}}(\omega)) \leq d(x, F(\omega)) \textit{ với mọi } x \in \mathfrak{X} \textit{ h.c.c.}$$

Chứng minh. Theo giả thiết, tồn tại $N \in \mathcal{A}$ có xác suất 0 sao cho với mọi $\omega \in \Omega \backslash N$,

$$\limsup_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} d(x, F_{\mathbf{n}}(\omega)) \leq d(x, F(\omega)), \tag{1.3.1}$$

với mọi $x \in D$. Theo Định lý 1.2.6, ta suy ra (1.3.1) đúng với mọi $x \in \mathfrak{X}$. Từ đó, ta có điều phải chứng minh. □

1.3.3 Định lý. *Giả sử $F, F_{\mathbf{n}}$ ($\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$) là các biến ngẫu nhiên đa trị. Nếu $F(\omega) \subset s\text{-}\liminf_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} F_{\mathbf{n}}(\omega)$ h.c.c., thì*

$$\limsup_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} d(x, F_{\mathbf{n}}(\omega)) \leq d(x, F(\omega)) \textit{ với mọi } x \in \mathfrak{X} \textit{ h.c.c.} \tag{1.3.2}$$

Chứng minh. Vì $\mathfrak{X}$ là không gian khả ly, nên tồn tại tập D đếm được và trù mật trên $\mathfrak{X}$. Theo giả thiết, tồn tại tập $N \in \mathcal{A}$ có xác suất 0 sao cho với mọi $\omega \in \Omega \setminus N$,

$$F(\omega) \subset s\text{-}\liminf_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} F_{\mathbf{n}}(\omega). \tag{1.3.3}$$

Cố định $\omega \in \Omega \setminus N$. Khi đó, với mỗi $x \in D$ và mỗi $p \in \mathbb{N}$, tồn tại $y \in F(\omega)$ sao cho

$$\|x - y\| \leq d(x, F(\omega)) + \frac{1}{p}.$$

Từ (1.3.3), với mỗi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, tồn tại $f_{\mathbf{n}} \in F_{\mathbf{n}}(\omega)$ sao cho $f_{\mathbf{n}} \to y$ khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$. Từ đó,

$$\begin{aligned}
\limsup_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} d(x, F_{\mathbf{n}}(\omega)) &\leq \lim_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} \|x - f_{\mathbf{n}}\| \\
&= \|x - y\| \\
&\leq d(x, F(\omega)) + \frac{1}{p}.
\end{aligned}$$

Bằng cách cho $p \to \infty$, ta nhận được

$$\limsup_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} d(x, F_{\mathbf{n}}(\omega)) \le d(x, F(\omega)). \tag{1.3.4}$$

Sử dụng Định lý 1.2.6, khẳng định (1.3.4) ở trên sẽ đúng với mọi $x \in \mathfrak{X}$. Vì vậy, định lý được chứng minh. □

Bằng kỹ thuật tương tự như trong chứng minh của Định lý 1.2.6, ta thu được tính chất sau đây của hội tụ Wijsman đối với mảng nhiều chiều các biến ngẫu nhiên đa trị.

1.3.4 Định lý. *Giả sử D là một tập con đếm được, trù mật trên $\mathfrak{X}$ và $F, F_{\mathbf{n}}$ ($\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$) là các biến ngẫu nhiên đa trị. Khi đó, mảng $\{F_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ hội tụ Wijsman tới F h.c.c. khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$ khi và chỉ khi với mỗi $x \in D$,*

$$d(x, F_{\mathbf{n}}(\omega)) \to d(x, F(\omega)) \ \ h.c.c. \ \ khi \ \ \mathbf{n}_{\max} \to \infty.$$

Chứng minh. Chiều thuận trong kết luận của định lý là hiển nhiên. Do đó, ta chỉ cần chứng minh cho chiều ngược lại. Theo giả thiết, tồn tại $N \in \mathcal{A}$ có xác suất 0 sao cho với mỗi $\omega \in \Omega \backslash N$,

$$\lim_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} d(a, F_{\mathbf{n}}(\omega)) = d(a, F(\omega)), \text{ với mọi } \ a \in D. \tag{1.3.5}$$

Với mỗi $\omega \in \Omega \setminus N$ và mỗi x thuộc vào $\mathfrak{X}$, tồn tại dãy $\{x_k : k \ge 1\} \subset D$ sao cho $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$. Khi đó, với mỗi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ và mỗi $k \ge 1$,

$$\begin{aligned}
|d(x, F_{\mathbf{n}}(\omega)) - d(x, F(\omega))| &\le |d(x, F_{\mathbf{n}}(\omega)) - d(x_k, F_{\mathbf{n}}(\omega))| \\
&\quad + |d(x_k, F_{\mathbf{n}}(\omega)) - d(x_k, F(\omega))| \\
&\quad + |d(x_k, F(\omega)) - d(x, F(\omega))| \\
&\le |d(x_k, F_{\mathbf{n}}(\omega)) - d(x_k, F(\omega))| \\
&\quad + 2d(x, x_k) \ \ (\text{theo } \ (1.2.3)).
\end{aligned}$$

Cho $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$, theo (1.3.5), ta thu được

$$\limsup_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} |d(x, F_{\mathbf{n}}(\omega)) - d(x, F(\omega))| \le 2d(x, x_k).$$

Sau đó, cho $k \to \infty$, ta nhận được

$$\limsup_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} |d(x, F_{\mathbf{n}}(\omega)) - d(x, F(\omega))| \leq 0.$$

Điều này dẫn tới

$$\lim_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} d(x, F_{\mathbf{n}}(\omega)) = d(x, F(\omega)).$$

Đây chính là điều phải chứng minh. □

1.4. Nhận xét. Các kết quả trong chương này, cụ thể là Nhận xét 1.2.2 (1) và các Định lý 1.2.3, 1.2.5, 1.2.6, 1.2.7, 1.2.8, 1.3.1, 1.3.2, 1.3.3, 1.3.4 đều được xét cho trường hợp hội tụ khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$. Đối với trường hợp hội tụ khi $\mathbf{n}_{\min} \to \infty$, ta có các kết quả và chứng minh hoàn toàn tương tự.

Kết luận của Chương 1

Trong chương này, luận án đã giải quyết được những vấn đề sau:

- Chứng minh một số tính chất về hội tụ Mosco và hội tụ Wijsman đối với mảng nhiều chỉ số các tập con đóng của không gian Banach thực, khả ly.

- Thiết lập một số kết quả hội tụ cho mảng nhiều chỉ số các biến ngẫu nhiên đa trị đối với hội tụ Mosco và hội tụ Wijsman.

CHƯƠNG 2

ĐỊNH LÝ ERGODIC BIRKHOFF DẠNG NHIỀU CHIỀU

Trong chương này, chúng tôi giới thiệu một số khái niệm liên quan tới lý thuyết ergodic, thiết lập định lý ergodic Birkhoff dạng nhiều chiều trên không gian Banach thực, khả ly và thu được định lý ergodic Birkhoff đa trị dạng hai chiều cho biến ngẫu nhiên đa trị và cho biến ngẫu nhiên mờ. Các kết quả chính của chương được viết dựa trên bài báo [30].

2.1. Một số kiến thức chuẩn bị

2.1.1 Định nghĩa. ([49]) (i) Một phép biến đổi $T : \Omega \to \Omega$ được gọi là *đo được* nếu $T^{-1}(A) \in \mathcal{A}$, với mọi $A \in \mathcal{A}$.

(ii) Một phép biến đổi $T : \Omega \to \Omega$ được gọi là *bảo toàn độ đo* nếu T là đo được và đồng thời $\mathbb{P}(T^{-1}(A)) = \mathbb{P}(A)$, với mọi $A \in \mathcal{A}$. Khi đó, ta nói $\mathbb{P}$ là *độ đo T-bất biến.*

(iii) Một tập $A \in \mathcal{A}$ được gọi là *T-bất biến* nếu $T^{-1}(A) = A$.

(iv) Một biến ngẫu nhiên f được gọi là *T-bất biến* nếu $f \circ T = f$.

(v) Một phép biến đổi bảo toàn độ đo $T : \Omega \to \Omega$ được gọi là *ergodic* nếu các tập T-bất biến chỉ có xác suất 0 hoặc 1; nghĩa là, với mọi $A \in \mathcal{A}$, điều kiện $T^{-1}(A) = A$ kéo theo $\mathbb{P}(A) = 0$ hoặc $\mathbb{P}(A) = 1$.

2.1.2 Nhận xét. (1) Phép biến đổi bảo toàn độ đo $T : \Omega \to \Omega$ được viết một cách đầy đủ là $T : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ bởi vì tính chất bảo toàn độ đo phụ thuộc vào σ-đại số và vào độ đo.

(2) Họ tất cả các tập T-bất biến lập thành một σ-đại số con của σ-đại số $\mathcal{A}$. Ta ký hiệu σ-đại số này là $\mathcal{I}_T$.

(3) Nếu $T_1, T_2 : \Omega \to \Omega$ là các phép biến đổi bảo toàn độ đo thì tích $T_1 \circ T_2$ (còn được viết gọn là T_1T_2) cũng là phép biến đổi bảo toàn độ đo. Đặc biệt, nếu $T : \Omega \to \Omega$ là một phép biến đổi bảo toàn độ đo thì phép lặp T^n ($n \in \mathbb{N}$) cũng là một phép biến đổi bảo toàn độ đo.

(4) Theo U. Krengel [47, tr. 5], biến ngẫu nhiên f là T-bất biến nếu và chỉ nếu f là $\mathcal{I}_T$-đo được.

Tiếp theo, chúng tôi giới thiệu một số khái niệm cơ sở của biến ngẫu nhiên mờ. Đây là một mở rộng của khái niệm biến ngẫu nhiên đa trị.

Ánh xạ $u : \mathfrak{X} \to [0, 1]$ được gọi là một *tập mờ* trên $\mathfrak{X}$.

Với mỗi tập mờ u, *tập α-mức* $L_\alpha u$ ($\alpha \in (0, 1]$) được định nghĩa bởi

$$L_\alpha u = \{x \in \mathfrak{X} : u(x) \geq \alpha\}.$$

Có thể kiểm tra được rằng với mọi $\alpha \in (0, 1]$,

$$L_\alpha u = \bigcap_{\beta<\alpha} L_\beta u. \tag{2.1.1}$$

Ta còn định nghĩa

$$L_{\alpha^+} u = \{x \in \mathfrak{X} : u(x) > \alpha\}, \ \alpha \in [0, 1).$$

Ký hiệu $\mathbf{F}(\mathfrak{X})$ là không gian các tập mờ $u : \mathfrak{X} \to [0, 1]$ thỏa mãn

(1) u là chuẩn tắc, nghĩa là, tập 1-mức $L_1 u$ khác rỗng,

(2) u là nửa liên tục trên, nghĩa là, với mỗi $\alpha \in (0, 1]$, tập α-mức $L_\alpha u$ là tập con đóng của $\mathfrak{X}$.

Trên $\mathbf{F}(\mathfrak{X})$, ta trang bị các phép toán sau

$$(u + v)(x) = \sup_{y+z=x} \min\{u(y), v(z)\},$$
$$(\lambda u)(x) = \begin{cases} u(\lambda^{-1}x) & \text{nếu } \lambda \neq 0, \\ \mathbb{I}_{\{0\}}(x) & \text{nếu } \lambda = 0, \end{cases}$$

trong đó $u, v \in \mathbf{F}(\mathfrak{X})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Khi đó, với mỗi $\alpha \in (0, 1]$,

$$L_\alpha(u + v) = \mathrm{cl}\{L_\alpha(u) + L_\alpha(v)\} \text{ và } L_\alpha(\lambda u) = \lambda L_\alpha(u).$$

Bao lồi đóng $\overline{\text{co}}u$ của $u \in \mathbf{F}(\mathfrak{X})$ được định nghĩa như sau

$$\overline{\text{co}}u(x) = \sup\{\alpha \in (0,1] : x \in \overline{\text{co}}(L_\alpha u)\}.$$

Khi đó,

$$L_\alpha(\overline{\text{co}}u) = \overline{\text{co}}(L_\alpha u) \text{ với mọi } \alpha \in (0,1]. \tag{2.1.2}$$

2.1.3 Định nghĩa. ([44, 45, 62]) Ánh xạ $\tilde{F} : \Omega \to \mathbf{F}(\mathfrak{X})$ được gọi là một *biến ngẫu nhiên mờ* nếu

$$\{(\omega, x) : x \in L_\alpha(\tilde{F}(\omega))\} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}_{\mathfrak{X}},$$

với mọi $\alpha \in (0,1]$.

Trong [5], J. Bán đã chỉ ra rằng $\tilde{F}$ là biến ngẫu nhiên mờ thì $L_\alpha\tilde{F}$ là biến ngẫu nhiên đa trị, với mọi $\alpha \in (0,1]$.

2.1.4 Định nghĩa. *Kỳ vọng* của biến ngẫu nhiên mờ $\tilde{F}$, ký hiệu $\mathbb{E}\tilde{F}$, là một tập mờ trên $\mathfrak{X}$ thỏa mãn

$$L_\alpha\left(\mathbb{E}\tilde{F}\right) = \mathbb{E}\left(L_\alpha\tilde{F}\right) \tag{2.1.3}$$

với mọi $\alpha \in (0,1]$ (về sự tồn tại và duy nhất của kỳ vọng biến ngẫu nhiên mờ, ta tham khảo M. L. Puri và D. A. Ralescu [62], H. Inoue [44]).

Rõ ràng, hai tập mờ bằng nhau nếu tất cả các tập α-mức của chúng tương ứng bằng nhau với mọi $\alpha \in (0,1]$. Từ đây suy ra mỗi tập con đóng của $\mathfrak{X}$ đều có thể xem là một tập mờ bởi sự thiết lập ánh xạ $j : c(\mathfrak{X}) \to \mathbf{F}(\mathfrak{X})$ với $j(A) = \mathbb{I}_A$. Vì vậy, các kết quả cho các biến ngẫu nhiên mờ là sự tổng quát cho các biến ngẫu nhiên đa trị.

2.2. Định lý ergodic Birkhoff dạng nhiều chiều đối với phần tử ngẫu nhiên nhận giá trị trên không gian Banach thực, khả ly

2.2.1 Bổ đề. *Giả sử $T_1, T_2, \ldots, T_d$ là các phép biến đổi bảo toàn độ đo và f là một biến ngẫu nhiên thuộc $\mathbf{L}^1$. Khi đó, họ $\{A_{n_1,\ldots,n_d}f : n_1 \geq 1, \ldots, n_d \geq 1\}$ là khả*

tích đều, trong đó

$$A_{n_1,\ldots,n_d}f = \frac{1}{n_1\ldots n_d}\sum_{i_1=0}^{n_1-1}\cdots\sum_{i_d=0}^{n_d-1} f(T_1^{i_1}\ldots T_d^{i_d}).$$

Chứng minh. Đặt $f^+ = \max\{f, 0\}$ và $f^- = \max\{-f, 0\}$. Do $f = f^+ - f^-$ nên ta chỉ cần xét cho f không âm. Cố định $\varepsilon > 0$ bất kỳ, từ $f \in \mathbf{L}^1$, ta suy ra tồn tại $K_\varepsilon \geq 0$ sao cho

$$\mathbb{E}\left(f\mathbb{I}_{(f>K_\varepsilon)}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Đặt $g_\varepsilon = f - \min\{f, K_\varepsilon\}$. Ta có $g_\varepsilon \geq 0$ và $g_\varepsilon = (f - K_\varepsilon)\mathbb{I}_{(f>K_\varepsilon)}$. Do đó,

$$\|g_\varepsilon\|_1 = \mathbb{E}\left((f - K_\varepsilon)\mathbb{I}_{(f>K_\varepsilon)}\right) \leq \mathbb{E}\left(f\mathbb{I}_{(f>K_\varepsilon)}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Từ $K_\varepsilon \geq \min\{f, K_\varepsilon\}$, ta suy ra $A_{n_1,\ldots,n_d}f - K_\varepsilon \leq A_{n_1,\ldots,n_d}g_\varepsilon$. Kết hợp điều này với $A_{n_1,\ldots,n_d}g_\varepsilon \geq 0$, ta có $(A_{n_1,\ldots,n_d}f - K_\varepsilon)^+ \leq A_{n_1,\ldots,n_d}g_\varepsilon$. Vì vậy,

$$\mathbb{E}\left(A_{n_1,\ldots,n_d}f - K_\varepsilon\right)^+ \leq \mathbb{E}(A_{n_1,\ldots,n_d}g_\varepsilon) = \mathbb{E}g_\varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tiếp tục, do $A_{n_1,\ldots,n_d}f \leq \left(A_{n_1,\ldots,n_d}f - K_\varepsilon\right)^+ + K_\varepsilon$, nên với mọi $B \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} A_{n_1,\ldots,n_d}f\mathbb{I}_B &\leq \left(A_{n_1,\ldots,n_d}f - K_\varepsilon\right)^+\mathbb{I}_B + K_\varepsilon\mathbb{I}_B \\ &\leq \left(A_{n_1,\ldots,n_d}f - K_\varepsilon\right)^+ + K_\varepsilon\mathbb{I}_B. \end{aligned}$$

Từ đó,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(A_{n_1,\ldots,n_d}f\mathbb{I}_B\right) &\leq \mathbb{E}\left(A_{n_1,\ldots,n_d}f - K_\varepsilon\right)^+ + K_\varepsilon.\mathbb{P}(B) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + K_\varepsilon.\mathbb{P}(B). \end{aligned}$$

Bây giờ ta chọn $\delta > 0$ sao cho $\delta < \dfrac{\varepsilon}{2K_\varepsilon}$. Khi đó, với mọi $B \in \mathcal{A}$ thỏa mãn $\mathbb{P}(B) \leq \delta$, chúng ta thu được $\mathbb{E}\left(A_{n_1,\ldots,n_d}f\mathbb{I}_B\right) \leq \varepsilon$. Kết hợp điều này với $\mathbb{E}\left(A_{n_1,\ldots,n_d}f\right) = \mathbb{E}f < \infty$ với mọi số nguyên dương $n_1, n_2, \ldots, n_d$, ta suy ra rằng $\{A_{n_1,\ldots,n_d}f : n_1 \geq 1, \ldots, n_d \geq 1\}$ là khả tích đều. □

Trong [21], N. Dunford chứng minh định lý ergodic Birkhoff dạng nhiều chiều cho trường hợp thực, trong đó giới hạn là một hàm khả tích. Kết quả này sau

đó được N. Dunford, J. T. Schwartz [22] và N. A. Fava [27] mở rộng cho trường hợp các toán tử co. Trong phần tiếp theo, chúng tôi thiết lập định lý ergodic Birkhoff dạng nhiều chiều cho trường hợp phần tử ngẫu nhiên nhận giá trị trên không gian Banach thực, khả ly. Kết quả này chỉ ra rằng hàm giới hạn là kỳ vọng có điều kiện ứng với σ-đại số các tập bất biến. Đây chính là chìa khóa để chứng minh định lý ergodic Birkhoff đa trị dạng hai chiều.

2.2.2 Định lý. *Giả sử $T_1, T_2, \ldots, T_d$ là các phép biến đổi giao hoán, bảo toàn độ đo. Khi đó, nếu phần tử ngẫu nhiên f thỏa mãn $\mathbb{E}\left(\|f\|\left(\log^+\|f\|\right)^{d-1}\right) < \infty$, thì*

$$A_{n_1,\ldots,n_d} f \to \mathbb{E}(f|\mathcal{I}) \text{ h.c.c. khi } \mathbf{n}_{\min} \to \infty$$

trong đó $\mathcal{I} = \bigcap_{i=1}^{d} \mathcal{I}_{T_i}$. Hơn nữa, nếu T_s là ergodic với s nào đó thuộc $\{1, 2, \ldots, d\}$, thì $\mathbb{E}(f|\mathcal{I}) = \mathbb{E}f$ h.c.c.

Chứng minh. Đầu tiên, chúng ta sẽ chứng minh định lý cho trường hợp f nhận giá trị thực. Với mọi $\omega \in \Omega$, ta có

$$\begin{aligned}
A_{n_1,\ldots,n_d} f(\omega) &= \frac{1}{n_1 \ldots n_d}\left(\sum_{i_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{i_{d-1}=0}^{n_{d-1}-1} \sum_{i_d=0}^{n_d-2} f(T_1^{i_1} \ldots T_d^{i_d} T_d(\omega))\right.\\
&\qquad\qquad \left. + \sum_{i_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{i_{d-1}=0}^{n_{d-1}-1} f(T_1^{i_1} \ldots T_{d-1}^{i_{d-1}}(\omega))\right)\\
&= \frac{n_d - 1}{n_d}\left(\frac{1}{n_1 \ldots n_{d-1}(n_d-1)} \sum_{i_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{i_{d-1}=0}^{n_{d-1}-1} \sum_{i_d=0}^{n_d-2} f(T_1^{i_1} \ldots T_d^{i_d} T_d(\omega))\right)\\
&\quad + \frac{1}{n_d}\left(\frac{1}{n_1 \ldots n_{d-1}} \sum_{i_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{i_{d-1}=0}^{n_{d-1}-1} f(T_1^{i_1} \ldots T_{d-1}^{i_{d-1}}(\omega))\right)\\
&= \frac{n_d - 1}{n_d} A_{n_1,\ldots,n_{d-1},n_d-1} f(T_d(\omega)) + \frac{1}{n_d} A_{n_1,\ldots,n_{d-1}} f(\omega). \qquad (2.2.1)
\end{aligned}$$

Dựa trên kết quả của N. A. Fava [27, Hệ quả, tr. 281] (hoặc có thể tham khảo trong [49, Định lý 1.1, tr. 196]), tồn tại các tập $A_i, i = 1, 2$ với xác suất 1 sao cho

$$A_{n_1,\ldots,n_d} f(\omega) \to \overline{f}(\omega) \text{ khi } \mathbf{n}_{\min} \to \infty \text{ với mọi } \omega \in A_1 \qquad (2.2.2)$$

và

$$A_{n_1,\ldots,n_{d-1}}f(\omega) \to \overline{f_1}(\omega) \text{ khi } \mathbf{n}_{\min} \to \infty \text{ với mọi } \omega \in A_2, \tag{2.2.3}$$

trong đó $\overline{f}$ và $\overline{f_1}$ là các biến ngẫu nhiên. Theo Bổ đề 2.2.1, $\overline{f}$ và $\overline{f_1}$ thuộc vào $\mathbf{L}^1$.

Do T_d là phép biến đổi bảo toàn độ đo nên $\mathbb{P}(T_d^{-1}(A_1)) = \mathbb{P}(A_1)$. Đặt $A_3 = T_d^{-1}(A_1)$, ta có $\mathbb{P}(A_3) = 1$. Tiếp tục, đặt $B = \bigcap_{i=1}^{3} A_i$, chúng ta có $\mathbb{P}(B) = 1$. Vì vậy, trong công thức (2.2.1), với mọi $\omega \in B$, cho $\mathbf{n}_{\min} \to \infty$, chúng ta thu được $\overline{f}(\omega) = \overline{f}(T_d(\omega))$. Điều này tương đương với $\overline{f} = \overline{f} \circ T_d$ h.c.c., và do đó $\overline{f}$ là $\mathcal{I}_{T_d}$-đo được.

Dựa trên tính giao hoán của các phép biến đổi $T_1, T_2, \ldots, T_d$, ta suy ra hàm giới hạn $\overline{f}$ là biến ngẫu nhiên $\mathcal{I}_{T_i}$-đo được với mọi $i = 1, \ldots, d$. Từ đó, $\overline{f}$ là $\mathcal{I}$-đo được.

Cố định A bất kỳ thuộc $\mathcal{I}$. Với mọi $i = 1, \ldots, d$, do $\mathbb{I}_A$ là $\mathcal{I}_{T_i}$-đo được nên $\mathbb{I}_A$ là T_i-bất biến. Điều này dẫn tới

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((A_{n_1,\ldots,n_d}f)\mathbb{I}_A) &= \mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{n_1\ldots n_d}\sum_{i_1=0}^{n_1-1}\cdots\sum_{i_d=0}^{n_d-1} f(T_1^{i_1}\ldots T_d^{i_d})\right)\mathbb{I}_A\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n_1\ldots n_d}\sum_{i_1=0}^{n_1-1}\cdots\sum_{i_d=0}^{n_d-1} (f\mathbb{I}_A)(T_1^{i_1}\ldots T_d^{i_d})\right) \\
&= \mathbb{E}(f\mathbb{I}_A).
\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Kết hợp (2.2.2) với đẳng thức $A_{n_1,\ldots,n_d}(f\mathbb{I}_A)(\omega) = (A_{n_1,\ldots,n_d}f(\omega))\mathbb{I}_A(\omega)$ với mọi $\omega \in \Omega$, ta thu được rằng mảng các biến ngẫu nhiên $\{A_{n_1,\ldots,n_d}(f\mathbb{I}_A) : n_1 \geq 1, \ldots, n_d \geq 1\}$ hội tụ h.c.c. tới biến ngẫu nhiên $\overline{f}\mathbb{I}_A$ khi $\mathbf{n}_{\min} \to \infty$. Theo Bổ đề 2.2.1, mảng các biến ngẫu nhiên $\{A_{n_1,\ldots,n_d}(f\mathbb{I}_A) : n_1 \geq 1, \ldots, n_d \geq 1\}$ là khả tích đều. Kết hợp điều này với (2.2.4), ta có $\mathbb{E}(\overline{f}\mathbb{I}_A) = \mathbb{E}(f\mathbb{I}_A)$. Vì vậy, $\overline{f} = \mathbb{E}(f|\mathcal{I})$. Như vậy, định lý được chứng minh cho trường hợp f nhận giá trị thực.

Phần tiếp theo, chúng tôi chứng minh định lý cho trường hợp f nhận giá trị trên không gian Banach thực, khả ly. Với mọi $x \in \mathfrak{X}$ và mọi $B \in \mathcal{A}$, áp dụng định lý ergodic Birkhoff cho biến ngẫu nhiên nhận giá trị thực $\mathbb{I}_B$ (theo chứng minh trên), ta có

$$\begin{aligned}\|A_{n_1,\ldots,n_d}(x\mathbb{I}_B) - \mathbb{E}(x\mathbb{I}_B|\mathcal{I})\| &= \|x\left(A_{n_1,\ldots,n_d}\mathbb{I}_B - \mathbb{E}(\mathbb{I}_B|\mathcal{I})\right)\| \\ &= \|x\|\,|A_{n_1,\ldots,n_d}\mathbb{I}_B - \mathbb{E}(\mathbb{I}_B|\mathcal{I})| \\ &\to 0 \text{ h.c.c. khi } \mathbf{n}_{\min} \to \infty.\end{aligned}$$

Do đó, định lý được chứng minh cho trường hợp f là phần tử ngẫu nhiên đơn giản.

Với phần tử ngẫu nhiên f bất kỳ và với mọi dãy các phần tử ngẫu nhiên đơn giản $\{h_k : k \geq 1\}$, ta có

$$\begin{aligned}\|A_{n_1,\ldots,n_d}f - \mathbb{E}(f|\mathcal{I})\|(\omega) \leq \|A_{n_1,\ldots,n_d}(f-h_k)\|(\omega) + \|A_{n_1,\ldots,n_d}h_k - \mathbb{E}(h_k|\mathcal{I})\|(\omega) \\ + \|\mathbb{E}(h_k|\mathcal{I}) - \mathbb{E}(f|\mathcal{I})\|(\omega), \text{ với } \omega \in \Omega \text{ và } k \geq 1. \quad (2.2.5)\end{aligned}$$

Với mỗi k cố định, áp dụng định lý ergodic Birkhoff cho mỗi phần tử ngẫu nhiên đơn giản h_k, số hạng thứ hai ở vế phải của bất đẳng thức (2.2.5) hội tụ tới 0 h.c.c. khi $\mathbf{n}_{\min} \to \infty$. Do vậy,

$$\begin{aligned}\limsup_{\mathbf{n}_{\min}\to\infty} \|A_{n_1,\ldots,n_d}f - \mathbb{E}(f|\mathcal{I})\| \leq \limsup_{\mathbf{n}_{\min}\to\infty} \|A_{n_1,\ldots,n_d}(f-h_k)\| \\ + \|\mathbb{E}(h_k|\mathcal{I}) - \mathbb{E}(f|\mathcal{I})\| \text{ h.c.c.} \quad (2.2.6)\end{aligned}$$

Bởi vì $f \in \mathbf{L}^1(\mathfrak{X})$ nên ta có thể chọn được dãy $\{h_k : k \geq 1\}$ các phần tử ngẫu nhiên đơn giản thoả mãn $\|h_k\| \leq 2\|f\|$ h.c.c. với mọi $k \geq 1$, $h_k \to f$ h.c.c. khi $k \to \infty$, và số hạng cuối ở vế phải của (2.2.6) hội tụ tới 0 h.c.c. khi $k \to \infty$.

Tiếp theo, từ đẳng thức $\left\|g \circ T^i\right\| = \|g\| \circ T^i$, ta có

$$\|A_{n_1,\ldots,n_d}(f-h_k)\|(\omega) \leq A_{n_1,\ldots,n_d}\|f-h_k\|(\omega), \text{ với } \omega \in \Omega \text{ và } k \geq 1.$$

Với mỗi $k \geq 1$, áp dụng định lý ergodic Birkhoff cho biến ngẫu nhiên thực, ta suy ra $A_{n_1,\ldots,n_d}\|f-h_k\|$ hội tụ h.c.c. tới biến ngẫu nhiên g_k khi $\mathbf{n}_{\min} \to \infty$ sao cho $\mathbb{E}g_k = \mathbb{E}\|f-h_k\|$. Điều này kéo theo dãy các biến ngẫu nhiên $\{g_k : k \geq 1\}$ hội tụ theo trung bình tới 0, và do đó nó hội tụ theo xác suất tới 0. Từ đó, tồn tại dãy con $\{g_{k(s)} : s \geq 1\}$ của dãy $\{g_k : k \geq 1\}$ sao cho $\{g_{k(s)} : s \geq 1\}$ hội tụ h.c.c. tới 0. Vì vậy, $A_{n_1,\ldots,n_d}f - \mathbb{E}(f|\mathcal{I}) \to 0$ h.c.c. khi $\mathbf{n}_{\min} \to \infty$. Định lý được chứng minh. □

2.3. Định lý ergodic Birkhoff dạng nhiều chiều đối với biến ngẫu nhiên đa trị

Kết quả sau đây về giải tích lồi được F. Hiai nhắc đến trong [41, tr. 624-625] và được chúng tôi sử dụng trong kỹ thuật lồi hóa. Sau đây chúng tôi đưa ra một chứng minh chi tiết.

2.3.1 Bổ đề. *Giả sử A là một tập con khác rỗng của một không gian Banach. Khi đó, với mỗi $x \in \overline{\text{co}}A$ và mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $x_1, \ldots, x_k \in A$ sao cho*

$$\left\| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} x_i - x \right\| < \varepsilon.$$

Chứng minh. Với mỗi $x \in \overline{\text{co}}A$ và mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $y \in \text{co}A$ sao cho $\|x - y\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Khi đó, ta có thể viết

$$y = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j y_j,$$

trong đó $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $0 \le \lambda_j \le 1$, $y_j \in A$ và $\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j = 1$.

Rõ ràng ta chỉ cần xét cho $m \ge 2$. Đặt $M = \max\{\|y_j\| : 1 \le j \le m\}$. Do tính trù mật của tập $\mathbb{Q}$ trong tập $\mathbb{R}$ và do $\lambda_j \in [0, 1]$ với mọi j, nên với mỗi số tự nhiên $j \le m - 1$, tồn tại $\beta_j \in \mathbb{Q}$ sao cho

$$0 \le \beta_j \le \lambda_j, \tag{2.3.1}$$

$$|\lambda_j - \beta_j| < \frac{\varepsilon}{2m(m-1)M}. \tag{2.3.2}$$

Đặt $\beta_m = 1 - \sum\limits_{j=1}^{m-1} \beta_j$. Từ (2.3.1),

$$\beta_m = 1 - \sum_{j=1}^{m-1} \beta_j \ge 1 - \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j = \lambda_m \ge 0.$$

Ngoài ra, từ (2.3.2) ta có

$$\begin{aligned} |\lambda_m - \beta_m| = |\sum_{j=1}^{m-1} (\lambda_j - \beta_j)| &\le \sum_{j=1}^{m-1} |\lambda_j - \beta_j| \\ &< \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\varepsilon}{2m(m-1)M} = \frac{\varepsilon}{2mM}. \end{aligned}$$

Từ đó, với mỗi số tự nhiên $j \leq m$,

$$\beta_j \in \mathbb{Q},\ 0 \leq \beta_j \leq 1,\ |\lambda_j - \beta_j| < \frac{\varepsilon}{2mM} \text{ và } \sum_{i=1}^{m} \beta_i = 1.$$

Tiếp tục, đặt $y' = \sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j y_j$. Ta có

$$\begin{aligned}\|y - y'\| = \left\| \sum_{j=1}^{m} (\lambda_j - \beta_j) y_j \right\| &\leq \sum_{j=1}^{m} (|\lambda_j - \beta_j|.\|y_j\|) \\ &< \sum_{j=1}^{m} \frac{\varepsilon}{2mM}.M = \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

và $\|x - y'\| \leq \|x - y\| + \|y - y'\| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Mặt khác,

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j = \sum_{j=1}^{m} \frac{p_j}{q_j} y_j = \sum_{j=1}^{m} \frac{k_j}{k} y_j \ \text{ trong đó } p_j, q_j, k_j \in \mathbb{N}, k = \sum_{i=1}^{m} k_i \\ &= \frac{1}{k}\Big(\underbrace{(y_1 + \cdots + y_1)}_{k_1} + \cdots + \underbrace{(y_m + \cdots + y_m)}_{k_m} \Big) \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} x_j, \ \text{ trong đó } x_j \in A. \end{aligned}$$

Bổ đề được chứng minh. □

Dựa vào bổ đề trên, ta có kết quả sau đây.

2.3.2 Định lý. *Giả sử A là một tập con khác rỗng của một không gian Banach và x^* là một phần tử trên không gian đối ngẫu của nó. Khi đó,*

$$s(x^*, A) = s(x^*, \overline{\text{co}} A).$$

Chứng minh. Trước tiên, do $A \subset \overline{\text{co}} A$ nên $s(x^*, A) \leq s(x^*, \overline{\text{co}} A)$.

Trong phần tiếp theo, ta sẽ chứng minh $s(x^*, \overline{\text{co}} A) \leq s(x^*, A)$. Thật vậy, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $x_\varepsilon \in \overline{\text{co}} A$ sao cho

$$\langle x^*, x_\varepsilon \rangle > s(x^*, \overline{\text{co}} A) - \varepsilon.$$

Do $x_\varepsilon \in \overline{\text{co}}A$ và sử dụng Bổ đề 2.3.1, với mọi $\varepsilon' > 0$, tồn tại $x_1, x_2, \ldots, x_m$ thuộc vào A ($x_1, x_2, \ldots, x_m$ chỉ phụ thuộc vào ε' và x_ε) sao cho

$$\left\| \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_i - x_\varepsilon \right\| < \varepsilon'.$$

Khi đó,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \langle x^*, x_i \rangle - \langle x^*, x_\varepsilon \rangle \right| &= \left| \langle x^*, \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_i - x_\varepsilon \rangle \right| \\ &\leq \|x^*\|. \left\| \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_i - x_\varepsilon \right\| \\ &\leq \|x^*\|.\varepsilon'. \end{aligned}$$

Từ đó,

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \langle x^*, x_i \rangle - \|x^*\|.\varepsilon' \leq \langle x^*, x_\varepsilon \rangle \leq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \langle x^*, x_i \rangle + \|x^*\|.\varepsilon'.$$

Điều này kéo theo

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \langle x^*, x_i \rangle + \|x^*\|.\varepsilon' > s(x^*, \overline{\text{co}}A) - \varepsilon.$$

Với mỗi $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, do $x_i \in A$ nên $\langle x^*, x_i \rangle \leq s(x^*, A)$. Do đó,

$$s(x^*, \overline{\text{co}}A) - \varepsilon < \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} s(x^*, A) + \|x^*\|.\varepsilon' = s(x^*, A) + \|x^*\|.\varepsilon'.$$

Cho ε và ε' tiến tới 0, ta thu được $s(x^*, \overline{\text{co}}A) \leq s(x^*, A)$. Từ đó, định lý được chứng minh. □

Tiếp đến, chúng tôi chứng minh phần "$\liminf$" của hội tụ Mosco cho định lý ergodic Birkhoff dạng hai chiều đối với biến ngẫu nhiên đa trị. Kỹ thuật chứng minh được sử dụng sau đây gọi là kỹ thuật lồi hóa.

2.3.3 Mệnh đề. *Giả sử F là một biến ngẫu nhiên đa trị thỏa mãn $\mathbb{E}(\|F\| \log^+ \|F\|) < \infty$. Giả sử T_1, T_2 là hai phép biến đổi giao hoán sao cho với mọi $i \in \{1, 2\}$ và mọi $s \geq 1$, T_i^s là ergodic. Khi đó,*

$$\overline{\text{co}}\mathbb{E}F \subset s\text{-}\liminf_{m \wedge n \to \infty} \frac{1}{mn} \text{cl} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} F(T_1^i T_2^j(\omega)) \text{ h.c.c.}$$

Chứng minh. Với mọi $x \in \overline{\text{co}}\mathbb{E}F$ và mọi $\varepsilon > 0$, theo Bổ đề 2.3.1, tồn tại $f_1, \ldots, f_k$ thuộc $\mathcal{S}_F^1$ sao cho $\left\| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}(f_i) - x \right\| < \varepsilon$.

Ta định nghĩa $f_{ij} \in \mathcal{S}_F^1$, với $i, j = 1, \ldots, k$ như sau:

$$f_{ij} = \begin{cases} f_{i+j-1} & \text{nếu} \quad i+j \leq k+1, \\ f_{i+j-1-k} & \text{nếu} \quad i+j > k+1. \end{cases}$$

Khi đó,

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E} f_i = \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \mathbb{E} f_{ij}. \tag{2.3.3}$$

Tiếp theo, ta định nghĩa mảng hai chiều các phần tử ngẫu nhiên $\{f_{ij} : i \geq 1, j \geq 1\}$ như sau

$$f_{(s-1)k+i,(t-1)k+j}(\omega) = f_{ij}\left(T_1^{(s-1)k+i} T_2^{(t-1)k+j}(\omega)\right), \ i, j \in \{1, \ldots, k\}, \ s, t \geq 1, \ \omega \in \Omega.$$

Với mọi $m \geq 1, n \geq 1$, tồn tại các số nguyên dương s_m, p_m, t_n và q_n thỏa mãn

$$m = s_m k + p_m, \quad s_m \geq 0, \ 1 \leq p_m \leq k, \tag{2.3.4}$$

$$n = t_n k + q_n, \quad t_n \geq 0, \ 1 \leq q_n \leq k. \tag{2.3.5}$$

Nhận thấy $\{p_m : m \geq 1\}$ và $\{q_n : n \geq 1\}$ bị chặn bởi k và

$$\lim_{m \to \infty} s_m = \infty; \quad \lim_{n \to \infty} t_n = \infty.$$

Hơn nữa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\omega) = & \frac{s_m t_n}{mn} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{s_m t_n} \sum_{l=1}^{s_m} \sum_{r=1}^{t_n} f_{(l-1)k+i,(r-1)k+j}(\omega) \\ & + \frac{t_n}{mn} \sum_{i=1}^{p_m} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{t_n} \sum_{r=1}^{t_n} f_{s_m k+i,(r-1)k+j}(\omega) \\ & + \frac{s_m}{mn} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{q_n} \frac{1}{s_m} \sum_{l=1}^{s_m} f_{(l-1)k+i,t_n k+j}(\omega) \\ & + \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{p_m} \sum_{j=1}^{q_n} f_{s_m k+i,t_n k+j}(\omega). \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Bây giờ, ta sẽ chứng minh

$$\frac{s_m t_n}{mn}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{s_m t_n}\sum_{l=1}^{s_m}\sum_{r=1}^{t_n} f_{(l-1)k+i,(r-1)k+j}(\omega) \to \frac{1}{k^2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\mathbb{E}f_{ij} \text{ h.c.c.}$$
$$\text{khi } m\wedge n\to\infty. \qquad (2.3.7)$$

Với mọi số nguyên dương $s \geq 1$, mọi phần tử ngẫu nhiên $f \in \mathcal{S}_F^1$ và mọi phép biến đổi bảo toàn độ đo T, do

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\|f\circ T^s\|\log^+\|f\circ T^s\|\right) &= \mathbb{E}\left(\left(\|f\|\log^+\|f\|\right)\circ T^s\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\|f\|\log^+\|f\|\right)\\ &\leq \mathbb{E}\left(\|F\|\log^+\|F\|\right) < \infty,\end{aligned}$$

nên với mỗi $i, j = 1, \ldots, k$, áp dụng Định lý 2.2.2 cho hai phép biến đổi bảo toàn độ đo T_1^k, T_2^k và phần tử ngẫu nhiên $f_{ij}\circ T_1^i$, ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{s_m t_n}\sum_{l=1}^{s_m}\sum_{r=1}^{t_n} f_{(l-1)k+i,(r-1)k+j}(\omega) &= \frac{1}{s_m t_n}\sum_{l=1}^{s_m}\sum_{r=1}^{t_n} f_{ij}\left(T_1^{(l-1)k+i}T_2^{(r-1)k+j}\right)(\omega)\\ &= \frac{1}{s_m t_n}\sum_{l=1}^{s_m}\sum_{r=1}^{t_n}\left(f_{ij}\circ T_1^i\right)\left((T_1^k)^{l-1}(T_2^k)^{r-1}\right)\circ T_2^j(\omega)\\ &\to \mathbb{E}\left(f_{ij}\circ T_1^i\middle|\mathcal{I}_k\right)\circ T_2^j(\omega) \text{ h.c.c. khi } m\wedge n\to\infty\\ &\qquad \text{(trong đó } \mathcal{I}_k = \bigcap_{i=1}^{2}\mathcal{I}_{T_i^k})\\ &= \mathbb{E}\left(f_{ij}\circ T_1^i\right)\circ T_2^j(\omega) \text{ h.c.c. khi } m\wedge n\to\infty\\ &\qquad \text{(theo tính ergodic của } T_i^k \text{ với } i \text{ nào đó)}\\ &= \mathbb{E}(f_{ij}) \text{ h.c.c. khi } m\wedge n\to\infty. \qquad (2.3.8)\end{aligned}$$

Ngoài ra,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{s_m}{m} = \lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{m}-\frac{p_m}{mk}\right) = \frac{1}{k};\quad \lim_{n\to\infty}\frac{t_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n}-\frac{q_n}{nk}\right) = \frac{1}{k}. \qquad (2.3.9)$$

Từ đó, (2.3.7) đúng.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$$\frac{t_n}{mn}\sum_{i=1}^{p_m}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{t_n}\sum_{r=1}^{t_n} f_{s_m k+i,(r-1)k+j}(\omega) + \frac{s_m}{mn}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{q_n}\frac{1}{s_m}\sum_{l=1}^{s_m} f_{(l-1)k+i,t_n k+j}(\omega) \to 0$$
$$\text{h.c.c. khi } m\wedge n\to\infty. \qquad (2.3.10)$$

Với mỗi $m \geq 1$ và mỗi $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, áp dụng Định lý 2.2.2 cho phép biến đổi bảo toàn độ đo T_2^k và phần tử ngẫu nhiên $f_{ij} \circ T_1^{s_m k+i}$ thuộc $\mathbf{L}^1(\mathfrak{X})$, ta nhận được

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t_n}\sum_{r=1}^{t_n} f_{s_m k+i,(r-1)k+j}(\omega) &= \frac{1}{t_n}\sum_{r=1}^{t_n} f_{ij}\left(T_1^{s_m k+i} T_2^{(r-1)k+j}\right)(\omega) \\
&= \frac{1}{t_n}\sum_{r=1}^{t_n} \left(f_{ij} \circ T_1^{s_m k+i}\right)(T_2^k)^{r-1} \circ T_2^j(\omega) \\
&\to \mathbb{E}\left(f_{ij} \circ T_1^{s_m k+i} \middle| \mathcal{I}_{T_2^k}\right) \circ T_2^j(\omega) \text{ h.c.c. khi } n \to \infty \\
&\qquad\qquad \text{(theo Định lý 2.2.2)} \\
&= \mathbb{E}\left(f_{ij} \circ T_1^{s_m k+i}\right) \circ T_2^j(\omega) \text{ h.c.c. khi } n \to \infty \\
&\qquad\qquad \text{(theo tính ergodic của } T_2^k) \\
&= \mathbb{E}(f_{ij}) \text{ h.c.c. khi } n \to \infty. \qquad (2.3.11)
\end{aligned}$$

Do đó,

$$\frac{t_n}{mn}\sum_{i=1}^{p_m}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{t_n}\sum_{r=1}^{t_n} f_{s_m k+i,(r-1)k+j}(\omega) \to 0 \text{ h.c.c. khi } m \wedge n \to \infty.$$

Tương tự,

$$\frac{s_m}{mn}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{q_n}\frac{1}{s_m}\sum_{l=1}^{s_m} f_{(l-1)k+i,t_n k+j}(\omega) \to 0 \text{ h.c.c. khi } m \wedge n \to \infty.$$

Từ đó, (2.3.10) được chứng minh.

Tiếp tục, ta chứng tỏ

$$\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{p_m}\sum_{j=1}^{q_n} f_{s_m k+i,t_n k+j}(\omega) \to 0 \text{ h.c.c. khi } m \wedge n \to \infty. \qquad (2.3.12)$$

Kết hợp (2.3.8), (2.3.9) và (2.3.11), chúng ta suy ra rằng với mỗi $i, j \in \{1, \ldots, k\}$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{mn} f_{s_m k+i,t_n k+j}(\omega) = \frac{s_m t_n}{mn}\Bigg(&\frac{1}{s_m t_n}\sum_{l=1}^{s_m}\sum_{r=1}^{t_n} f_{lk+i,rk+j}(\omega) \\
&- \frac{s_m-1}{s_m}.\frac{1}{(s_m-1)t_n}\sum_{l=1}^{s_m-1}\sum_{r=1}^{t_n} f_{lk+i,rk+j}(\omega) \\
&- \frac{t_n-1}{s_m t_n}.\frac{1}{t_n-1}\sum_{r=1}^{t_n-1} f_{s_m k+i,rk+j}(\omega)\Bigg) \\
\to \frac{1}{k^2}(\mathbb{E}f_{ij} - 1.\mathbb{E}f_{ij} - 0.\mathbb{E}f_{ij}) &= 0 \text{ h.c.c. khi } m \wedge n \to \infty.
\end{aligned}$$

Điều này dẫn tới (2.3.12).

Kết hợp (2.3.3), (2.3.6), (2.3.7), (2.3.10) và (2.3.12),

$$\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\omega) \to \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mathbb{E}f_i \text{ h.c.c. khi } m\wedge n \to \infty.$$

Từ đó và từ

$$\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\omega) \in \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} F(T_1^i T_2^j(\omega)) \text{ h.c.c.},$$

ta có

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mathbb{E}f_i \in s\text{-}\liminf_{m\wedge n\to\infty}\frac{1}{mn}\mathrm{cl}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} F(T_1^i T_2^j(\omega)) \text{ h.c.c.}$$

Theo Định lý 1.3.1 và Nhận xét 1.4, ta thu được điều phải chứng minh. □

Nếu các phép biến đổi bảo toàn độ đo không được giả thiết là ergodic, chúng tôi thu được kết quả sau đây.

2.3.4 Định lý. *Giả sử $T_1, T_2, \ldots, T_d$ là các phép biến đổi giao hoán, bảo toàn độ đo. Khi đó, nếu F là biến ngẫu nhiên đa trị thỏa mãn $\mathbb{E}\left(\|F\|\left(\log^+\|F\|\right)^{d-1}\right) < \infty$, thì*

$$\mathbb{E}(F|\mathcal{I}) \subset s\text{-}\liminf_{\mathbf{n}_{\min}\to\infty}\frac{1}{n_1\ldots n_d}\mathrm{cl}\sum_{i_1=0}^{n_1-1}\cdots\sum_{i_d=0}^{n_d-1} F(T_1^{i_1}\ldots T_d^{i_d}(\omega)) \text{ h.c.c.},$$

trong đó $\mathcal{I} = \bigcap_{i=1}^{d}\mathcal{I}_{T_i}$.

Chứng minh. Đặt $A_{n_1,\ldots,n_d}F(\omega) = \frac{1}{n_1\ldots n_d}\mathrm{cl}\sum_{i_1=0}^{n_1-1}\cdots\sum_{i_d=0}^{n_d-1} F(T_1^{i_1}\ldots T_d^{i_d}(\omega))$, $\omega\in\Omega$. Theo [74, Bổ đề 2.2], ta có thể chọn được dãy các phần tử ngẫu nhiên $\{f_k : k\geq 1\}$ thuộc $\mathcal{S}_F^1$ sao cho $\{\mathbb{E}(f_k|\mathcal{I}) : k\geq 1\}$ là một biểu diễn Castaing của $\mathbb{E}(F|\mathcal{I})$. Với mỗi $k\geq 1$, áp dụng Định lý 2.2.2 cho phần tử ngẫu nhiên f_k, ta được

$$\lim_{\mathbf{n}_{\min}\to\infty} A_{n_1,\ldots,n_d}f_k(\omega) = \mathbb{E}(f_k|\mathcal{I})(\omega) \text{ h.c.c.}$$

Từ đó, tồn tại một tập $N\in\mathcal{A}$ có xác suất 0 sao cho với mọi $\omega\in\Omega\backslash N$,

$$\mathbb{E}(f_k|\mathcal{I})(\omega) \in s\text{-}\liminf_{\mathbf{n}_{\min}\to\infty} A_{n_1,\ldots,n_d}F(\omega) \text{ với mọi } k\geq 1.$$

Hơn nữa, theo Định lý 1.2.3 và Nhận xét 1.4, $s\text{-}\liminf_{\mathbf{n}_{\min}\to\infty} A_{n_1,\ldots,n_d}F(\omega)$ là tập đóng. Từ đó, ta thu được điều phải chứng minh. □

Mệnh đề sau đây là phần "lim sup" của hội tụ Mosco của định lý ergodic Birkhoff dạng hai chiều đối với biến ngẫu nhiên đa trị.

2.3.5 Mệnh đề. *Giả sử F là một biến ngẫu nhiên đa trị thỏa mãn $\mathbb{E}(\|F\|\log^+\|F\|) < \infty$ và T_1, T_2 là hai phép biến đổi giao hoán, bảo toàn độ đo sao cho T_i là ergodic với i nào đó thuộc $\{1,2\}$. Khi đó,*

$$w\text{-}\limsup_{m\wedge n\to\infty} \frac{1}{mn}\mathrm{cl}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} F(T_1^iT_2^j(\omega)) \subset \overline{\mathrm{co}}\mathbb{E}F \text{ h.c.c.}$$

Chứng minh. Đặt $G_{mn}(\omega) = \dfrac{1}{mn}\mathrm{cl}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} F(T_1^iT_2^j(\omega))$, $m,n \geq 1$, $\omega \in \Omega$. Với mỗi $x^* \in \mathbf{B}^*$, do

$$\mathbb{E}\left(\left|s\left(x^*, F(\cdot)\right)\right| \log^+ \left|s\left(x^*, F(\cdot)\right)\right|\right) \leq \mathbb{E}\left(\|F\|\log^+\|F\|\right) < \infty, \tag{2.3.13}$$

nên theo Định lý 2.2.2, ta có

$$\begin{aligned} s\left(x^*, G_{mn}(\omega)\right) &= \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} s\left(x^*, F\left(T_1^iT_2^j(\omega)\right)\right) \\ &\to s\left(x^*, \overline{\mathrm{co}}\mathbb{E}F\right) < \infty \text{ h.c.c. khi } m\wedge n \to \infty. \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

Sử dụng Định lý 1.2.5 và Nhận xét 1.4, ta suy ra điều phải chứng minh. □

Sau đây là định lý ergodic Birkhoff dạng hai chiều đối với biến ngẫu nhiên đa trị theo các loại hội tụ Mosco và Wijsman.

2.3.6 Định lý. *Giả sử F là một biến ngẫu nhiên đa trị thỏa mãn $\mathbb{E}\left(\|F\|\log^+\|F\|\right) < \infty$. Giả sử T_1, T_2 là hai phép biến đổi giao hoán sao cho T_i^s là ergodic với mọi $i \in \{1,2\}$ và mọi $s \geq 1$. Khi đó*

$$\frac{1}{mn}\mathrm{cl}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} F\left(T_1^iT_2^j(\omega)\right) \to \overline{\mathrm{co}}\mathbb{E}F \text{ h.c.c. khi } m\wedge n \to \infty$$

theo các loại hội tụ Mosco và Wijsman.

Chứng minh. Từ các Mệnh đề 2.3.3, 2.3.5 ta thu được kết luận của định lý cho hội tụ Mosco.

Dựa vào (2.3.14), các Định lý 1.2.7, 1.3.3 và Nhận xét 1.4, ta nhận được kết luận của định lý cho hội tụ Wijsman. □

2.4. Định lý ergodic Birkhoff dạng hai chiều đối với biến ngẫu nhiên mờ

Trong mục này, sử dụng Định lý 2.3.6, chúng tôi thu được định lý ergodic Birkhoff cho biến ngẫu nhiên mờ ứng với hội tụ Mosco.

2.4.1 Định lý. *Giả sử T_1, T_2 là hai phép biến đổi giao hoán sao cho T_i^s là ergodic với mọi $i \in \{1,2\}$ và mọi số nguyên dương s. Khi đó, nếu $\tilde{F} : \Omega \to \mathbf{F}(\mathfrak{X})$ là một biến ngẫu nhiên mờ thỏa mãn $\mathcal{S}^1_{L_1\tilde{F}} \neq \emptyset$, $\mathbb{E}\left(\|\mathrm{cl}(L_{0^+}\tilde{F})\| \log^+ \|\mathrm{cl}(L_{0^+}\tilde{F})\|\right) < \infty$ và*

$$L_\alpha(\overline{\mathrm{co}}\mathbb{E}\tilde{F}) = \mathrm{cl}(L_{\alpha^+}(\overline{\mathrm{co}}\mathbb{E}\tilde{F})) \text{ với mọi } \alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \tag{2.4.1}$$

thì

$$\text{M-}\lim_{m\wedge n\to\infty} \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \tilde{F}\left(T_1^i T_2^j(\omega)\right) = \overline{\mathrm{co}}\mathbb{E}\tilde{F} \ h.c.c.,$$

nghĩa là, tồn tại một tập $N \in \mathcal{A}$ có xác suất 0 sao cho

$$\text{M-}\lim_{m\wedge n\to\infty} L_\alpha\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \tilde{F}\left(T_1^i T_2^j(\omega)\right)\right) = L_\alpha\left(\overline{\mathrm{co}}\mathbb{E}\tilde{F}\right)$$

với mọi $\alpha \in (0,1]$ và mọi $\omega \in \Omega \setminus N$.

Chứng minh. Đặt $\tilde{G}_{mn}(\omega) = \dfrac{1}{mn}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} \tilde{F}(T_1^i T_2^j(\omega))$, $\omega \in \Omega$. Với mỗi $\alpha \in (0,1]$ cố định, do

$$\mathbb{E}\left(\|L_\alpha\tilde{F}\| \log^+ \|L_\alpha\tilde{F}\|\right) \leq \mathbb{E}\left(\|\mathrm{cl}(L_{0^+}\tilde{F})\| \log^+ \|\mathrm{cl}(L_{0^+}\tilde{F})\|\right) < \infty$$

nên áp dụng Định lý 2.3.6 cho biến ngẫu nhiên đa trị $L_\alpha\tilde{F}$, ta nhận được

$$\begin{aligned}\text{M-}\lim_{m\wedge n\to\infty} L_\alpha \tilde{G}_{mn}(\omega) &= \text{M-}\lim_{m\wedge n\to\infty} \frac{1}{mn}\text{cl}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} L_\alpha \tilde{F}\left(T_1^i T_2^j(\omega)\right)\\ &= \overline{\text{co}}\mathbb{E}(L_\alpha \tilde{F}) \text{ h.c.c. (theo Định lý 2.3.6)}\\ &= \overline{\text{co}} L_\alpha(\mathbb{E}\tilde{F}) \text{ h.c.c. (theo (2.1.3))}\\ &= L_\alpha\left(\overline{\text{co}}\mathbb{E}\tilde{F}\right) \text{ h.c.c. (theo (2.1.2))}.\end{aligned}$$

Kết hợp điều này với tính đếm được của tập $[0,1]\cap\mathbb{Q}$, tồn tại tập $N \in \mathcal{A}$ có xác suất 0 sao cho

$$\text{M-}\lim_{m\wedge n\to\infty} L_r \tilde{G}_{mn}(\omega) = L_r\left(\overline{\text{co}}\mathbb{E}\tilde{F}\right), \tag{2.4.2}$$

với mọi $r \in [0,1]\cap\mathbb{Q}$ và mọi $\omega \in \Omega \setminus N$.

Cố định $\omega \in \Omega \setminus N$ cho phần còn lại của chứng minh. Để cho gọn, ta đặt $u_{mn} = \tilde{G}_{mn}(\omega)$ $(m, n \geq 1)$ và $u = \overline{\text{co}}\mathbb{E}\tilde{F}$. Khi đó, u_{mn}, $m \geq 1, n \geq 1$ và u là các tập mờ trên $\mathfrak{X}$.

Với mỗi $\alpha \in (0,1)\setminus\mathbb{Q}$. Bởi vì tập $[0,1]\cap\mathbb{Q}$ là trù mật trên tập [0, 1] nên ta có thể chọn được dãy $\{r_k : k \geq 1\} \subset [0,1]\cap\mathbb{Q}$ sao cho $r_k \nearrow \alpha$ khi $k \to \infty$. Khi đó,

$$L_\alpha w = \bigcap_{k=1}^{\infty} L_{r_k} w \text{ với mọi tập mờ } w. \tag{2.4.3}$$

Thật vậy, rõ ràng rằng $L_\alpha w \subset L_{r_k} w$ với mọi $k \geq 1$. Hệ quả là

$$L_\alpha w \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} L_{r_k} w. \tag{2.4.4}$$

Ngoài ra, với mọi $x \notin L_\alpha w$, tồn tại một số $k_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $w(x) < r_{k_0} < \alpha$. Điều này kéo theo $x \notin L_{r_{k_0}} w$, và do đó $x \notin \bigcap_{k=1}^{\infty} L_{r_k} w$. Kết hợp điều này với (2.4.4) ta thu được (2.4.3).

Mặt khác, theo (2.4.2),

$$w\text{-}\limsup_{m\wedge n\to\infty} L_\alpha(u_{mn}) \subset w\text{-}\limsup_{m\wedge n\to\infty} L_{r_k}(u_{mn}) \subset L_{r_k} u, \text{ với mọi } k \geq 1. \tag{2.4.5}$$

Kết hợp (2.4.3) và (2.4.5), ta có

$$w\text{-}\limsup_{m\wedge n\to\infty} L_\alpha(u_{mn}) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} L_{r_k} u = L_\alpha u. \tag{2.4.6}$$

Tiếp theo, giả sử $\{s_k : k \geq 1\} \subset [0,1] \cap \mathbb{Q}$ thỏa mãn $s_k \searrow \alpha$ khi $k \to \infty$. Khi đó, ta nhận thấy rằng $L_{s_k}u \subset L_{\alpha^+}u$ với mọi $k \geq 1$. Điều này dẫn tới

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} L_{s_k}u \subset L_{\alpha^+}u.$$

Ngược lại, với mỗi $x \in L_{\alpha^+}u$, tồn tại một số $k_1 \in \mathbb{N}$ sao cho $\alpha < s_{k_1} < u(x)$. Khi đó, $x \in L_{s_{k_1}}u$, và vì vậy $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} L_{s_k}u$. Từ đó,

$$L_{\alpha^+}u = \bigcup_{k=1}^{\infty} L_{s_k}u.$$

Kết hợp điều này với giả thiết (2.4.1), ta nhận được

$$L_\alpha u = \mathrm{cl}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} L_{s_k}u\right).$$

Hơn nữa, theo (2.4.2),

$$L_{s_k}u \subset s\text{-}\liminf_{m\wedge n\to\infty} L_{s_k}(u_{mn}) \subset s\text{-}\liminf_{m\wedge n\to\infty} L_\alpha(u_{mn}), \text{ với mọi } k \geq 1.$$

Điều này cùng với tính đóng của tập $s\text{-}\liminf_{m\wedge n\to\infty} L_\alpha(u_{mn})$ kéo theo

$$L_\alpha u \subset s\text{-}\liminf_{m\wedge n\to\infty} L_\alpha(u_{mn}). \tag{2.4.7}$$

Từ (2.4.6) và (2.4.7), ta kết luận rằng

$$\mathrm{M}\text{-}\lim_{m\wedge n\to\infty} L_\alpha(u_{mn}) = L_\alpha u.$$

Định lý được chứng minh. □

Hai ví dụ sau đây chỉ ra rằng tất cả các giả thiết của Định lý 2.4.1 đều thỏa mãn.

2.4.2 Ví dụ. Cho $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$ và $a < b$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Giả sử rằng $u : \mathbb{R} \to [0,1]$ là một tập mờ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn u là hàm tăng ngặt trên đoạn $[a,b]$, $u(x) = 0$ với mọi $x \in (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ và $u(b) = 1$. Chẳng hạn,

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a} & \text{nếu} \quad x \in [a,b], \\ 0 & \text{nếu} \quad x \in (-\infty, a) \cup (b, +\infty). \end{cases}$$

Khi đó, với mọi $\alpha \in (0,1)$,

$$L_\alpha u = \{x \mid u(x) \geq \alpha\} = [u^{-1}(\alpha), b]$$

và

$$L_{\alpha^+} u = \{x \mid u(x) > \alpha\} = (u^{-1}(\alpha), b].$$

Từ đó, $L_\alpha u = \mathrm{cl}(L_{\alpha^+} u)$ với mọi $\alpha \in (0,1)$. Ta định nghĩa biến ngẫu nhiên mờ $\tilde{F} : \Omega \to \mathbf{F}(\mathbb{R})$ bởi $\tilde{F}(\omega) = u$ với mọi $\omega \in \Omega$. Khi đó, $\tilde{F}$ thỏa mãn tất cả các giả thiết của Định lý 2.4.1.

2.4.3 Ví dụ. Cho $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$. Tập mờ $u : \mathbb{R} \to [0,1]$ được định nghĩa bởi

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad x < 0, \\ 2x & \text{nếu} \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}, \\ 2(1-x) & \text{nếu} \quad \dfrac{1}{2} < x < 1, \\ 0 & \text{nếu} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

Với mỗi $\alpha \in (0,1)$, ta có

$$L_\alpha u = \{x \mid u(x) \geq \alpha\} = \left[\frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2}\right]$$

và

$$L_{\alpha^+} u = \{x \mid u(x) > \alpha\} = \left(\frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Do đó, $L_\alpha u = \mathrm{cl}(L_{\alpha^+} u)$ với mọi $\alpha \in (0,1)$. Vì vậy, $\tilde{F}$ thỏa mãn tất cả các giả thiết của Định lý 2.4.1, trong đó biến ngẫu nhiên mờ $\tilde{F} : \Omega \to \mathbf{F}(\mathbb{R})$ được xác định bởi $\tilde{F}(\omega) = u$ với mọi $\omega \in \Omega$.

Ví dụ tiếp theo chứng tỏ rằng trong Định lý 2.4.1, điều kiện (2.4.1) không được suy ra từ các điều kiện còn lại.

2.4.4 Ví dụ. Cho $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$. Ta định nghĩa tập mờ $u : \mathbb{R} \to [0,1]$ như sau

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad x < 0, \\ 2\sqrt{2}x & \text{nếu} \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \text{nếu} \quad \dfrac{1}{4} < x < \dfrac{3}{4}, \\ (4 - 2\sqrt{2})x - 3 + 2\sqrt{2} & \text{nếu} \quad \dfrac{3}{4} \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{nếu} \quad x > 1. \end{cases}$$

Tiếp tục, biến ngẫu nhiên mờ $\tilde{F}$ được định nghĩa bởi $\tilde{F}(\omega) = u$ với mọi $\omega \in \Omega$.

Với $\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, ta có

$$L_\alpha u = \{x \mid u(x) \geq \alpha\} = \left[\frac{1}{4}, 1\right]$$

và

$$L_{\alpha^+} u = \{x \mid u(x) > \alpha\} = \left(\frac{3}{4}, 1\right].$$

Điều này chứng tỏ $L_\alpha u \neq \mathrm{cl}(L_{\alpha^+} u)$ với $\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Do đó, điều kiện (2.4.1) của Định lý 2.4.1 không thỏa mãn. Có thể kiểm tra được rằng các điều kiện khác đều thỏa mãn. Do đó, điều kiện (2.4.1) không được suy ra từ các điều kiện còn lại.

Kết luận của Chương 2

Trong chương này, luận án đã giải quyết được những vấn đề sau:

- Thiết lập định lý ergodic Birkhoff dạng nhiều chiều trên không gian Banach thực, khả ly.

- Thiết lập định lý ergodic Birkhoff dạng hai chiều cho biến ngẫu nhiên đa trị và cho biến ngẫu nhiên mờ.

- Thiết lập định lý ergodic Birkhoff đa trị dạng nhiều chiều đối với trường hợp phép biến đổi bảo toàn độ đo không được giả thiết là ergodic.

- Đưa ra một số ví dụ minh họa kết quả chính của chương.

CHƯƠNG 3

LUẬT SỐ LỚN ĐỐI VỚI MẢNG HAI CHIỀU CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN ĐA TRỊ

Trong chương này, chúng tôi thiết lập một số luật số lớn đối với mảng hai chiều các biến ngẫu nhiên đa trị theo các loại hội tụ Mosco, Wijsman. Các kết quả chính của chương được viết dựa trên các bài báo [13] và [14].

3.1. Một số kết quả bổ trợ

Trong [41, tr. 623], F. Hiai đã đưa ra một ví dụ chứng tỏ rằng $\mathbb{E}F \neq \mathbb{E}(F, \mathcal{A}_F)$, với F là một biến ngẫu nhiên đa trị. Tuy nhiên, ta có kết quả sau

3.1.1 Bổ đề. ([35], [36], [41, Bổ đề 3.1]) *Với mỗi biến ngẫu nhiên đa trị khả tích F,*

$$\overline{\mathrm{co}}\mathbb{E}F = \overline{\mathrm{co}}\mathbb{E}(F, \mathcal{A}_F).$$

Dựa trên phát biểu và chứng minh của [41, Bổ đề 3.1(2)], ta có kết quả sau đây.

3.1.2 Bổ đề. ([41]) *Giả sử F_1, F_2 là hai biến ngẫu nhiên đa trị khả tích cùng phân phối. Với mỗi $f_1 \in \mathcal{S}^1_{F_1}(\mathcal{A}_{F_1})$, tồn tại hàm $(\mathcal{B}_{c(\mathfrak{X})}, \mathcal{B}_{\mathfrak{X}})$-đo được $\varphi : c(\mathfrak{X}) \to \mathfrak{X}$ thỏa mãn $f_1 = \varphi(F_1)$. Hơn nữa, nếu đặt $f_2 = \varphi(F_2)$ thì $f_2 \in \mathcal{S}^1_{F_2}(\mathcal{A}_{F_2})$.*

3.1.3 Bổ đề. *Giả sử $\{F_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên đa trị 2-hoán đổi được và $\varphi_1 : c(\mathfrak{X}) \to \mathfrak{X}$ (tương ứng, $\varphi_2 : c(\mathfrak{X}) \to \mathbb{R}$) là một hàm $(\mathcal{B}_{c(\mathfrak{X})}, \mathcal{B}_{\mathfrak{X}})$-đo được (tương ứng, $(\mathcal{B}_{c(\mathfrak{X})}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-đo được). Khi đó, $\{\varphi_1(F_{\mathbf{n}}) : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ (tương ứng, $\{\varphi_2(F_{\mathbf{n}}) : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$) là một mảng các phần tử ngẫu nhiên (tương ứng, biến ngẫu nhiên) 2-hoán đổi được.*

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp hàm φ_1. Trường hợp hàm φ_2 ta chứng minh hoàn toàn tương tự.

Vì $\{F_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là mảng các biến ngẫu nhiên đa trị 2-hoán đổi được, nên với mọi $\mathbf{i} \neq \mathbf{j}$ thuộc vào $\mathbb{N}^d$ và các tập con Borel $\{B_1, B_2\}$ bất kỳ thuộc vào $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\varphi_1(F_{\mathbf{i}}) \in B_1, \varphi_1(F_{\mathbf{j}}) \in B_2\right) &= \mathbb{P}\left(F_{\mathbf{i}} \in \varphi_1^{-1}(B_1), F_{\mathbf{j}} \in \varphi_1^{-1}(B_2)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(F_{\mathbf{1}} \in \varphi_1^{-1}(B_1), F_{\mathbf{2}} \in \varphi_1^{-1}(B_2)\right) \\
&\quad (\text{do } \varphi_1^{-1}(B_i) \in \mathcal{B}_{c(\mathfrak{X})},\ i = 1, 2) \\
&= \mathbb{P}\left(\varphi_1(F_{\mathbf{1}}) \in B_1, \varphi_1(F_{\mathbf{2}}) \in B_2\right).
\end{aligned}$$

Từ đó, $\{\varphi_1(F_{\mathbf{n}}) : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là mảng các phần tử ngẫu nhiên 2-hoán đổi được. □

Tiếp theo, chúng tôi đưa ra một bổ đề quan trọng và là chìa khóa để thiết lập luật số lớn đối với mảng hai chiều các biến ngẫu nhiên đa trị ứng với sự hội tụ khi $m \vee n \to \infty$.

3.1.4 Bổ đề. *Giả sử $\{x_{ij} : i \geq 1, j \geq 1\}$ là một mảng hai chiều các phần tử trên không gian Banach. Nếu ba điều kiện sau đây được thỏa mãn*

$$(i) \text{ với mỗi } m \geq 1,\ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{mj} \to x \ \text{ khi } \ n \to \infty,$$

$$(ii) \text{ với mỗi } n \geq 1,\ \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_{in} \to x \ \text{ khi } \ m \to \infty,$$

$$(iii)\ \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \to x \quad \text{khi } \ m \wedge n \to \infty,$$

thì

$$\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \to x \ \text{ khi } \ m \vee n \to \infty.$$

Chứng minh. Với mọi $\varepsilon > 0$, từ (iii), tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\left\| \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - x \right\| < \varepsilon \text{ với mọi } m \geq n_0, n \geq n_0. \tag{3.1.1}$$

Từ (i), với mỗi $l = 1, 2, \ldots, n_0$ (hàng thứ l), tồn tại $r_l \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $r > r_l$,

$$\left\| \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} x_{lj} - x \right\| < \varepsilon. \tag{3.1.2}$$

Từ (ii), với mỗi $s = 1, 2, \ldots, n_0$ (cột thứ s), tồn tại $k_s \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $k > k_s$,

$$\left\| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} x_{is} - x \right\| < \varepsilon. \tag{3.1.3}$$

Đặt $N = \max\{n_0, r_1, r_2, \ldots, r_{n_0}, k_1, k_2, \ldots, k_{n_0}\}$. Ta sẽ chứng tỏ rằng nếu $m \vee n > N$ thì

$$\left\| \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - x \right\| < \varepsilon. \tag{3.1.4}$$

Thật vậy, ta có các trường hợp sau:

1. Nếu $m > N, n \leq n_0$ thì áp dụng (3.1.3),

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - x \right\| &= \left\| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} - x \right) \right\| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left\| \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} - x \right\| \\ &< \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

2. Nếu $m > N, n > n_0$ hoặc $m > n_0, n > N$ thì kết luận (3.1.4) được suy ra ngay từ (3.1.1).

3. Nếu $m \leq n_0, n > N$ thì bằng cách sử dụng các lập luận như trong chứng minh cho trường hợp thứ nhất và áp dụng (3.1.2),

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - x \right\| &= \left\| \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - x \right) \right\| \\ &\leq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \left\| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - x \right\| \\ &< \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Bổ đề được chứng minh xong. $\square$

Áp dụng Bổ đề 3.1.4, chúng tôi chứng minh dạng hai chỉ số của định lý Stolz.

3.1.5 Bổ đề. *Giả sử* $\{x_{ij} : i \geq 1, j \geq 1\}$ *là một mảng các phần tử trên không gian Banach. Nếu*

$$\lim_{i \vee j \to \infty} x_{ij} = x$$

thì

$$\lim_{m \vee n \to \infty} \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = x.$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $x = 0$ vì nếu ngược lại ta xét mảng $\{x'_{ij} : i \geq 1, j \geq 1\}$ trong đó $x'_{ij} = x_{ij} - x$.

Theo giả thiết ta suy ra rằng với mỗi $m \geq 1$, $\lim\limits_{j \to \infty} x_{mj} = 0$. Từ đó, áp dụng định lý Stolz cho trường hợp dãy,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_{mj} = 0. \tag{3.1.5}$$

Tương tự, với mỗi $n \geq 1$,

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_{in} = 0. \tag{3.1.6}$$

Theo giả thiết, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại số tự nhiên N sao cho $\|x_{ij}\| < \varepsilon$ với mọi i, j mà $i \vee j > N$. Với $m \wedge n > N$, ta có

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \right\| &\leq \frac{1}{mn} \left\| \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_{ij} \right\| \\
&\quad + \frac{1}{mn} \sum_{i=N+1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \|x_{ij}\| \\
&\quad + \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=N+1}^{n} \|x_{ij}\| \\
&< \frac{1}{mn} \left\| \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_{ij} \right\| + \frac{1}{mn} \left(\sum_{i=N+1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=N+1}^{n} \varepsilon \right) \\
&= \frac{1}{mn} \left\| \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_{ij} \right\| + \left(1 - \frac{N^2}{mn} \right) \varepsilon.
\end{aligned}$$

Cho $m \wedge n \to \infty$ ta thu được

$$\limsup_{m\wedge n\to\infty} \left\| \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \right\| \leq \varepsilon.$$

Do điều này đúng với mọi $\varepsilon > 0$ nên

$$\lim_{m\wedge n\to\infty} \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 0. \tag{3.1.7}$$

Từ (3.1.5), (3.1.6), (3.1.7) và Bổ đề 3.1.4, ta thu được điều phải chứng minh.□

3.2. Luật số lớn đối với mảng hai chiều các biến ngẫu nhiên đa trị

Năm 1981, Z. Artstein và S. Hart [2, Định lý 3.2] đã chứng minh luật số lớn theo hội tụ Mosco cho dãy các biến ngẫu nhiên đa trị độc lập cùng phân phối, nhận giá trị trên không gian các tập con đóng của không gian hữu hạn chiều $\mathbb{R}^n$. Sau đó, vào năm 1985, F. Hiai mở rộng kết quả trên cho không gian Banach khả ly (xem [41, Định lý 3.2]). Cũng trong năm đó, C. Hess [38] độc lập chứng minh kết quả tương tự của F. Hiai cho trường hợp các biến ngẫu nhiên độc lập đôi một cùng phân phối. Mãi đến năm 1999, luật số lớn cho dãy các biến ngẫu nhiên đa trị nhận giá trị trên không gian các tập con đóng của không gian Banach khả ly theo tôpô Wijsman mới được chứng minh bởi C. Hess (xem [39]). Định lý sau đây mở rộng các kết quả của C. Hess [38, 39] và của F. Hiai [41] từ trường hợp dãy sang trường hợp mảng hai chỉ số.

3.2.1 Định lý. *Nếu $\{F_{ij} : i \geq 1, j \geq 1\}$ là một mảng hai chiều các biến ngẫu nhiên đa trị độc lập đôi một cùng phân phối sao cho $\mathcal{S}^1_{F_{11}} \neq \emptyset$ và nếu*

$$\mathbb{E}(\|F_{11}\| \log^+ \|F_{11}\|) < \infty, \tag{3.2.1}$$

thì ta thu được luật số lớn theo các loại hội tụ Mosco và Wijsman

$$\frac{1}{mn} \mathrm{cl} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} F_{ij}(\omega) \to \overline{\mathrm{co}}\mathbb{E}F_{11} \ \ h.c.c. \ khi \ \ m \vee n \to \infty.$$

Chứng minh. Ta đặt $G_{mn}(\omega) = \dfrac{1}{mn}\mathrm{cl}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} F_{ij}(\omega)$ với mọi $m \geq 1$, $n \geq 1$, $\omega \in \Omega$ và đặt $X = \overline{\mathrm{co}}\mathbb{E}F_{11}$.

Đầu tiên, ta chứng minh $X \subset s\text{-}\liminf\limits_{m\vee n\to\infty} G_{mn}(\omega)$ h.c.c.

Với mỗi $x \in X$ và mỗi $\varepsilon > 0$, áp dụng Bổ đề 3.1.1 và Bổ đề 2.3.1, tồn tại $f_j \in \mathcal{S}^1_{F_{11}}(\mathcal{A}_{F_{11}}), 1 \leq j \leq k$ sao cho

$$\left\| \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}f_j - x \right\| < \varepsilon. \tag{3.2.2}$$

Từ Bổ đề 3.1.2, tồn tại $f_{ij} \in \mathcal{S}^1_{F_{ij}}(\mathcal{A}_{F_{ij}}), 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k$ sao cho

$$\mathbb{E}f_{ij} = \begin{cases} \mathbb{E}f_{i+j-1} & \text{nếu} \quad i+j \leq k+1, \\ \mathbb{E}f_{i+j-1-k} & \text{nếu} \quad i+j > k+1. \end{cases} \tag{3.2.3}$$

Đặt $x_j = \mathbb{E}f_j, 1 \leq j \leq k$ và $x_{ij} = \mathbb{E}f_{ij}, 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k$. Có thể kiểm tra được rằng

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i = \frac{1}{k^2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} x_{ij}, \tag{3.2.4}$$

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_{ij} \ \text{ với mỗi } \ j = 1, 2, \ldots, k, \tag{3.2.5}$$

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} x_{ij} \ \text{ với mỗi } \ i = 1, 2, \ldots, k. \tag{3.2.6}$$

Sử dụng Bổ đề 3.1.2, tồn tại mảng hai chiều các phần tử ngẫu nhiên $\{f_{ij} : i \geq 1, j \geq 1\}$ thỏa mãn $f_{ij} \in \mathcal{S}^1_{F_{ij}}(\mathcal{A}_{F_{ij}})$ với mọi $i \geq 1, j \geq 1$ và $\{f_{(s-1)k+i,(t-1)k+j} : s \geq 1, t \geq 1\}$ là mảng các phần tử ngẫu nhiên cùng phân phối, với mỗi $i = 1, 2, \ldots, k$ và mỗi $j = 1, 2, \ldots, k$.

Nếu $m = (s-1)k + p, n = (t-1)k + q$ trong đó $1 \le p \le k, 1 \le q \le k$, thì

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\omega) - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i \right\| &= \left\| \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\omega) - \frac{1}{k^2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} x_{ij} \right\| \text{(theo (3.2.4))} \\
&= \Bigg\| \frac{st}{mn}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\Big(\frac{1}{st}\sum_{l=1}^{s}\sum_{r=1}^{t} f_{(l-1)k+i,(r-1)k+j}(\omega) - x_{ij}\Big) \\
&\quad - \frac{t}{mn}\sum_{i=p+1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{t}\sum_{r=1}^{t} f_{(s-1)k+i,(r-1)k+j}(\omega) \\
&\quad - \frac{s}{mn}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=q+1}^{k}\frac{1}{s}\sum_{l=1}^{s} f_{(l-1)k+i,(t-1)k+j}(\omega) \\
&\quad + \frac{1}{mn}\sum_{i=p+1}^{k}\sum_{j=q+1}^{k} f_{(s-1)k+i,(t-1)k+j}(\omega) \\
&\quad + \Big(\frac{st}{mn} - \frac{1}{k^2}\Big)\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} x_{ij} \Bigg\| \\
&\le \frac{st}{mn}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\left\| \frac{1}{st}\sum_{l=1}^{s}\sum_{r=1}^{t} f_{(l-1)k+i,(r-1)k+j}(\omega) - x_{ij} \right\| \\
&\quad + \frac{t}{mn}\sum_{i=p+1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\left\| \frac{1}{t}\sum_{r=1}^{t} f_{(s-1)k+i,(r-1)k+j}(\omega) \right\| \\
&\quad + \frac{s}{mn}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=q+1}^{k}\left\| \frac{1}{s}\sum_{l=1}^{s} f_{(l-1)k+i,(t-1)k+j}(\omega) \right\| \\
&\quad + \frac{1}{mn}\sum_{i=p+1}^{k}\sum_{j=q+1}^{k}\left\| f_{(s-1)k+i,(t-1)k+j}(\omega) \right\| \\
&\quad + \Big(\frac{st}{mn} - \frac{1}{k^2}\Big)\left\| \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} x_{ij} \right\|. \qquad (3.2.7)
\end{aligned}$$

Tiếp theo, ta sẽ ước lượng các số hạng trong (3.2.7).

Do $\{F_{ij} : i \ge 1, j \ge 1\}$ là mảng các biến ngẫu nhiên đa trị độc lập đôi một và f_{ij} là $\mathcal{A}_{F_{ij}}$-đo được với mọi $i, j \ge 1$ nên $\{f_{(s-1)k+i,(t-1)k+j} : s \ge 1, t \ge 1\}$ là mảng các phần tử ngẫu nhiên độc lập đôi một, với mỗi $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Kết hợp điều này với giả thiết (3.2.1), ta suy ra rằng với mỗi $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $\{f_{(s-1)k+i,(t-1)k+j} : s \ge 1, t \ge 1\}$ là mảng hai chiều các phần tử ngẫu nhiên độc lập

đôi một cùng phân phối, thuộc vào $\mathbf{L}^1(\mathfrak{X})$ và thỏa mãn

$$\mathbb{E}(\|f_{ij}\| \log^+ \|f_{ij}\|) \leq \mathbb{E}(\|F_{ij}\| \log^+ \|F_{ij}\|) < \infty.$$

Từ đó, áp dụng luật số lớn Etemadi (xem [24]) cho mỗi mảng hai chỉ số $\{f_{(s-1)k+i,(t-1)k+j} : s \geq 1, t \geq 1\}$, $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k$ ta thu được

$$\left\| \frac{1}{st} \sum_{l=1}^{s} \sum_{r=1}^{t} f_{(l-1)k+i,(r-1)k+j}(\omega) - x_{ij} \right\| \to 0 \text{ h.c.c. khi } s \vee t \to \infty. \tag{3.2.8}$$

Do đó,

$$\frac{st}{mn} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \left\| \frac{1}{st} \sum_{l=1}^{s} \sum_{r=1}^{t} f_{(l-1)k+i,(r-1)k+j}(\omega) - x_{ij} \right\| \to 0 \text{ h.c.c. khi } m \vee n \to \infty. \tag{3.2.9}$$

Nhận thấy $\{f_{(s-1)k+i,(r-1)k+j} : r \geq 1\}$ là dãy các phần tử ngẫu nhiên độc lập đôi một cùng phân phối, thuộc vào $\mathbf{L}^1(\mathfrak{X})$ với mỗi $s \geq 1$. Do đó, sử dụng luật số lớn Etemadi (xem [24]),

$$\left\| \frac{1}{t} \sum_{r=1}^{t} f_{(s-1)k+i,(r-1)k+j}(\omega) - x_{ij} \right\| \to 0 \text{ h.c.c. khi } t \to \infty. \tag{3.2.10}$$

Từ đó,

$$\begin{aligned} &\frac{t}{mn} \sum_{i=p+1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \left\| \frac{1}{t} \sum_{r=1}^{t} f_{(s-1)k+i,(r-1)k+j}(\omega) \right\| \\ &\qquad \leq \frac{t}{mn} \sum_{i=p+1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \left\| \frac{1}{t} \sum_{r=1}^{t} f_{(s-1)k+i,(r-1)k+j}(\omega) - x_{ij} \right\| \\ &\qquad\quad + \frac{t}{mn} \sum_{i=p+1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \|x_{ij}\| \to 0 \text{ h.c.c. khi } m \wedge n \to \infty. \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

Lập luận tương tự, ta thu được

$$\frac{s}{mn} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=q+1}^{k} \left\| \frac{1}{s} \sum_{l=1}^{s} f_{(l-1)k+i,(t-1)k+j}(\omega) \right\| \to 0 \text{ h.c.c. khi } m \wedge n \to \infty. \tag{3.2.12}$$

Do $\dfrac{s}{m} = \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{m} - \dfrac{p}{mk}$ và $\dfrac{t}{n} = \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{n} - \dfrac{q}{nk}$ nên

$$\lim_{m\wedge n\to\infty} \frac{st}{mn} = \lim_{m\wedge n\to\infty} \frac{(s-1)t}{mn} = \lim_{m\wedge n\to\infty} \frac{s(t-1)}{mn} = \lim_{m\wedge n\to\infty} \frac{(s-1)(t-1)}{mn} = \frac{1}{k^2}. \tag{3.2.13}$$

Đặt $S_{a,b}^{i,j}(\omega) = \sum\limits_{l=1}^{a}\sum\limits_{r=1}^{b} f_{(l-1)k+i,(r-1)k+j}$, với $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $a, b \in \mathbb{N}$ và $\omega \in \Omega$. Khi đó, theo (3.2.8) và (3.2.13),

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{mn}\sum_{i=p+1}^{k}\sum_{j=q+1}^{k} \left\| f_{(s-1)k+i,(t-1)k+j}(\omega)\right\| \\
&= \frac{1}{mn}\sum_{i=p+1}^{k}\sum_{j=q+1}^{k} \left\| S_{s,t}^{i,j}(\omega) - S_{s,t-1}^{i,j}(\omega) - S_{s-1,t}^{i,j}(\omega) + S_{s-1,t-1}^{i,j}(\omega)\right\| \\
&\le \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \left\| S_{s,t}^{i,j}(\omega) - S_{s,t-1}^{i,j}(\omega) - S_{s-1,t}^{i,j}(\omega) + S_{s-1,t-1}^{i,j}(\omega)\right\| \\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \Bigg\| \frac{st}{mn}\Big(\frac{1}{st}S_{s,t}^{i,j}(\omega)\Big) - \frac{s(t-1)}{mn}\Big(\frac{1}{s(t-1)}S_{s,t-1}^{i,j}(\omega)\Big) \\
&\qquad - \frac{(s-1)t}{mn}\Big(\frac{1}{(s-1)t}S_{s-1,t}^{i,j}(\omega)\Big) \\
&\qquad + \frac{(s-1)(t-1)}{mn}\Big(\frac{1}{(s-1)(t-1)}S_{s-1,t-1}^{i,j}(\omega)\Big)\Bigg\| \\
&\to \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \left\| \frac{1}{k^2}x_{ij} - \frac{1}{k^2}x_{ij} - \frac{1}{k^2}x_{ij} + \frac{1}{k^2}x_{ij}\right\| = 0 \text{ khi } m\wedge n \to \infty.
\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

Hơn nữa, từ (3.2.13),

$$\left(\frac{st}{mn} - \frac{1}{k^2}\right)\left\|\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} x_{ij}\right\| \to 0 \text{ khi } m\wedge n \to \infty. \tag{3.2.15}$$

Kết hợp (3.2.7), (3.2.9), (3.2.11), (3.2.12), (3.2.14) và (3.2.15),

$$\left\|\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\omega) - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i\right\| \to 0 \text{ h.c.c. khi } m\wedge n \to \infty. \tag{3.2.16}$$

Tiếp theo, với mỗi $n = (t-1)k + j,\ 1 \le j \le k$, nếu $m = (s-1)k + p,\ 1 \le p \le k$ thì

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} f_{in}(\omega) - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i\right\| &= \left\|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} f_{in}(\omega) - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_{ij}\right\| \quad \text{(theo (3.2.5))}\\ &\le \frac{s}{m}\sum_{i=1}^{k}\left\|\frac{1}{s}\sum_{h=1}^{s} f_{(h-1)k+i,n}(\omega) - x_{ij}\right\|\\ &\quad + \frac{s}{m}\sum_{i=p+1}^{k}\frac{1}{s}\|f_{(s-1)k+i,n}(\omega)\|\\ &\quad + \left(\frac{s}{m} - \frac{1}{k}\right)\left\|\sum_{i=1}^{k} x_{ij}\right\|. \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

Với $1 \le i \le k$, từ $\{f_{(s-1)k+i,n} : s \ge 1\}$ là một dãy các phần tử ngẫu nhiên độc lập đôi một cùng phân phối thuộc vào $\mathbf{L}^1(\mathfrak{X})$, một lần nữa áp dụng luật số lớn Etemadi (xem [24]) cho các dãy này, ta có

$$\left\|\frac{1}{s}\sum_{h=1}^{s} f_{(h-1)k+i,n}(\omega) - x_{ij}\right\| \to 0 \ \text{ h.c.c. khi } \ s \to \infty. \tag{3.2.18}$$

Điều này kéo theo

$$\begin{aligned}\frac{1}{s}\|f_{(s-1)k+i,n}(\omega)\| &= \frac{1}{s}\left\|\sum_{h=1}^{s} f_{(h-1)k+i,n}(\omega) - \sum_{h=1}^{s-1} f_{(h-1)k+i,n}(\omega)\right\|\\ &= \left\|\left(\frac{1}{s}\sum_{h=1}^{s} f_{(h-1)k+i,n}(\omega) - x_{ij}\right)\right.\\ &\quad \left. - \frac{s-1}{s}\left(\frac{1}{s-1}\sum_{h=1}^{s-1} f_{(h-1)k+i,n}(\omega) - x_{ij}\right) + \frac{1}{s}x_{ij}\right\|\\ &\to 0 \ \text{ h.c.c. khi } \ s \to \infty.\end{aligned}$$

Điều này cùng với (3.2.17) đảm bảo rằng

$$\left\|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} f_{in}(\omega) - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i\right\| \to 0 \ \text{ h.c.c. khi } \ m \to \infty. \tag{3.2.19}$$

Lập luận tương tự, ta suy ra rằng với mỗi $m \ge 1$,

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_{mj}(\omega) - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i\right\| \to 0 \ \text{ h.c.c. khi } \ n \to \infty. \tag{3.2.20}$$

Kết hợp (3.2.16), (3.2.19), (3.2.20) và Bổ đề 3.1.4, ta suy ra

$$\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\omega) \to \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i \text{ h.c.c. khi } m \vee n \to \infty.$$

Từ đó,

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i \in s\text{-}\liminf_{m\vee n\to\infty} G_{mn}(\omega) \text{ h.c.c.}$$

Sử dụng Định lý 1.3.1, ta có

$$X \subset s\text{-}\liminf_{m\vee n\to\infty} G_{mn}(\omega) \text{ h.c.c.} \tag{3.2.21}$$

Dựa vào Định lý 1.3.3,

$$\limsup_{m\vee n\to\infty} d(x, G_{mn}(\omega)) \le d(x, X) \text{ với mọi } x \in \mathfrak{X}, \text{ h.c.c.} \tag{3.2.22}$$

Với mỗi $x^* \in \mathbf{B}^*$, bởi vì ánh xạ $A \mapsto s(x^*, A)$ từ $c(\mathfrak{X})$ vào $(-\infty, \infty]$ là hàm $\mathcal{B}_{c(\mathfrak{X})}$-đo được và $\mathbb{E}(s(x^*, F_{11})) = s(x^*, X) < \infty$, nên $\{s(x^*, F_{ij}) : i \ge 1, j \ge 1\}$ là một mảng hai chiều các biến ngẫu nhiên (giá trị thực) độc lập đôi một cùng phân phối, thuộc vào $\mathbf{L}^1$ và thỏa mãn

$$\mathbb{E}(|s(x^*, F_{11})| \log^+ |s(x^*, F_{11})|) \le \mathbb{E}(\|F_{11}\| \log^+ \|F_{11}\|) < \infty.$$

Từ đó, sử dụng luật số lớn Etemadi (xem [24]) cho các mảng hai chiều này, ta thu được

$$\begin{aligned} s(x^*, G_{mn}(\omega)) &= \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} s(x^*, F_{ij}(\omega)) \\ &\to s(x^*, X) < \infty \text{ h.c.c. khi } m \vee n \to \infty. \end{aligned} \tag{3.2.23}$$

Kết hợp (3.2.23) với Định lý 1.2.5,

$$w\text{-}\limsup_{m\vee n\to\infty} G_{mn}(\omega) \subset X \text{ h.c.c.} \tag{3.2.24}$$

Do đó, luật số lớn ứng với hội tụ Mosco được suy ra từ (3.2.21) và (3.2.24).

Theo (3.2.23), (1.2.6) và Định lý 1.2.7,

$$\liminf_{m\vee n\to\infty} d(x, G_{mn}(\omega)) \ge d(x, X) \text{ với mọi } x \in \mathfrak{X}, \text{ h.c.c.} \tag{3.2.25}$$

Từ (3.2.22) và (3.2.25), ta thu được luật số lớn cho hội tụ Wijsman.

Định lý được chứng minh hoàn toàn. □

Định lý sau thiết lập luật số lớn cho mảng hai chiều các biến ngẫu nhiên đa trị độc lập, nhận giá trị trên không gian các tập đóng của không gian Rademacher dạng p. Trường hợp dãy được chứng minh bởi F. Hiai [41, Định lý 3.3].

3.2.2 Định lý. *Giả sử $\mathfrak{X}$ là một không gian Rademacher dạng p ($p \in [1,2]$). Nếu $\{F_{ij} : i \geq 1, j \geq 1\}$ là mảng hai chiều các biến ngẫu nhiên độc lập và thỏa mãn*

$$(a) \qquad \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}\|F_{ij}\|^p}{(ij)^p} < \infty,$$

(b) tồn tại tập $X \in c(\mathfrak{X})$ sao cho

$$X \subset s\text{-}\liminf_{i\vee j\to\infty}(\mathrm{cl}(\mathbb{E}(F_{ij}, \mathcal{A}_{F_{ij}}))), \tag{3.2.26}$$

$$\limsup_{i\vee j\to\infty} s(x^*, \mathrm{cl}(\mathbb{E}F_{ij})) \leq s(x^*, X), \text{ với mọi } x^* \in \mathfrak{X}^*, \tag{3.2.27}$$

thì ta thu được luật số lớn theo các loại hội tụ Mosco và Wijsman

$$\frac{1}{mn}\mathrm{cl}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} F_{ij}(\omega) \to \overline{\mathrm{co}}X \ \ h.c.c. \ khi \ \ m \vee n \to \infty.$$

Chứng minh. Đặt $G_{mn}(\omega) = \dfrac{1}{mn}\mathrm{cl}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} F_{ij}(\omega)$ với mỗi $m \geq 1$, $n \geq 1$ và $\omega \in \Omega$. Với mỗi $x \in \overline{\mathrm{co}}X$ và mỗi $\varepsilon > 0$, theo Bổ đề 2.3.1, có thể chọn được $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$ sao cho $\left\|\dfrac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k} x_i - x\right\| < \varepsilon$.

Mảng hai chỉ số $\{x_{ij} : 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k\} \subset X$ được định nghĩa bởi

$$x_{ij} = \begin{cases} x_{i+j-1} & \text{nếu} \quad i+j \leq k+1, \\ x_{i+j-1-k} & \text{nếu} \quad i+j > k+1. \end{cases}$$

Khi đó, ta thu được các công thức như (3.2.4), (3.2.5) và (3.2.6).

Từ điều kiện (3.2.26), tồn tại mảng hai chiều $\{f_{ij} : i \geq 1, j \geq 1\}$ sao cho $f_{ij} \in \mathcal{S}^1_{F_{ij}}(\mathcal{A}_{F_{ij}})$ và với mỗi $i, j = 1, 2, \ldots, k$,

$$\|\mathbb{E}(f_{(s-1)k+i,(t-1)k+j}) - x_{ij}\| \to 0 \text{ khi } \ s \vee t \to \infty. \tag{3.2.28}$$

Đặt $y_{ij} = \mathbb{E}f_{ij}$, $i \geq 1, j \geq 1$. Nếu $m = (s-1)k + p, n = (t-1)k + q$ trong đó $1 \leq p \leq k, 1 \leq q \leq k$, thì

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\omega) - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i\right\| &= \left\|\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\omega) - \frac{1}{k^2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} x_{ij}\right\| \text{(theo (3.2.4))} \\
&\le \left\|\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(f_{ij}(\omega) - y_{ij})\right\| \\
&\quad + \left\|\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_{ij} - \frac{1}{k^2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} x_{ij}\right\| \\
&\le \left\|\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(f_{ij}(\omega) - y_{ij})\right\| \\
&\quad + \frac{st}{mn}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{st}\sum_{l=1}^{s}\sum_{r=1}^{t}\|y_{(l-1)k+i,(r-1)k+j} - x_{ij}\| \\
&\quad + \frac{t}{mn}\sum_{i=p+1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{t}\sum_{r=1}^{t}\|y_{(s-1)k+i,(r-1)k+j}\| \\
&\quad + \frac{s}{mn}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=q+1}^{k}\frac{1}{s}\sum_{l=1}^{s}\|y_{(l-1)k+i,(t-1)k+j}\| \\
&\quad + \left(\frac{st}{mn} - \frac{1}{k^2}\right)\left\|\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} x_{ij}\right\|. \qquad (3.2.29)
\end{aligned}$$

Từ giả thiết $\{F_{ij} : i \ge 1, j \ge 1\}$ là mảng hai chiều các biến ngẫu nhiên đa trị độc lập và từ f_{ij} là phần tử ngẫu nhiên $\mathcal{A}_{F_{ij}}$-đo được với mọi $i, j \ge 1$, ta suy ra rằng $\{f_{ij} : i \ge 1, j \ge 1\}$ là mảng hai chiều các phần tử ngẫu nhiên độc lập, thuộc vào $\mathbf{L}^p(\mathfrak{X})$ và thỏa mãn

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\mathbb{E}\|f_{ij}\|^p}{(ij)^p} \le \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\mathbb{E}\|F_{ij}\|^p}{(ij)^p} < \infty.$$

Sử dụng một kết quả của A. Rosalsky và L. V. Thành ([67, Định lý 3.1]), ta có

$$\left\|\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(f_{ij}(\omega) - y_{ij})\right\| \to 0 \text{ h.c.c. khi } m \vee n \to \infty. \qquad (3.2.30)$$

Theo (3.2.28) và Bổ đề 3.1.5,

$$\frac{1}{st}\sum_{l=1}^{s}\sum_{r=1}^{t}\|y_{(l-1)k+i,(r-1)k+j} - x_{ij}\| \to 0 \text{ khi } s \vee t \to \infty,$$

với mỗi $i, j = 1, 2, \ldots, k$. Do đó,

$$\frac{st}{mn}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{st}\sum_{l=1}^{s}\sum_{r=1}^{t}\|y_{(l-1)k+i,(r-1)k+j} - x_{ij}\| \to 0 \text{ khi } m \vee n \to \infty. \tag{3.2.31}$$

Từ (3.2.28),

$$\|y_{(s-1)k+i,(t-1)k+j} - x_{ij}\| \to 0 \text{ khi } t \to \infty, \text{ với mỗi } s \geq 1.$$

Điều này kéo theo

$$\frac{1}{t}\sum_{r=1}^{t}\|y_{(s-1)k+i,(r-1)k+j} - x_{ij}\| \to 0 \text{ khi } t \to \infty.$$

Do đó,

$$\begin{aligned}
&\frac{t}{mn}\sum_{i=p+1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{t}\sum_{r=1}^{t}\|y_{(s-1)k+i,(r-1)k+j}\| \\
&\leq \frac{t}{mn}\sum_{i=p+1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{t}\sum_{r=1}^{t}\|y_{(s-1)k+i,(r-1)k+j} - x_{ij}\| + \frac{t}{mn}\sum_{i=p+1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{t}\sum_{r=1}^{t}\|x_{ij}\| \\
&= \frac{t}{mn}\sum_{i=p+1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{t}\sum_{r=1}^{t}\|y_{(s-1)k+i,(r-1)k+j} - x_{ij}\| + \frac{t}{mn}\sum_{i=p+1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\|x_{ij}\| \\
&\to 0 \text{ khi } m \wedge n \to \infty.
\end{aligned} \tag{3.2.32}$$

Lập luận tương tự, ta có

$$\frac{s}{mn}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=q+1}^{k}\frac{1}{s}\sum_{l=1}^{s}\|y_{(l-1)k+i,(t-1)k+j}\| \to 0 \text{ khi } m \wedge n \to \infty. \tag{3.2.33}$$

Tương tự như trong chứng minh Định lý 3.2.1, ta nhận được kết luận như (3.2.15).

Kết hợp (3.2.29), (3.2.30), (3.2.31), (3.2.32), (3.2.33) và (3.2.15),

$$\left\|\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}f_{ij}(\omega) - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}x_i\right\| \to 0 \text{ h.c.c. khi } m \wedge n \to \infty. \tag{3.2.34}$$

Tiếp theo, với mỗi $n = (t-1)k + j,\ 1 \leq j \leq k$,

$$\|\mathbb{E}(f_{(s-1)k+i,n}) - x_{ij}\| \to 0 \text{ khi } s \to \infty, \text{ với mỗi } i = 1, 2, \ldots, k.$$

Nếu $m = (s-1)k + p,\ 1 \le p \le k$ thì

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} f_{in}(\omega) - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i\right\| &= \left\|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} f_{in}(\omega) - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_{ij}\right\| \text{ (theo (3.2.5))}\\ &\le \left\|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(f_{in}(\omega) - y_{in})\right\| + \left\|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_{in} - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_{ij}\right\|\\ &\le \left\|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(f_{in}(\omega) - y_{in})\right\| + \frac{s}{m}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{s}\sum_{h=1}^{s}\|y_{(h-1)k+i,n} - x_{ij}\|\\ &\quad + \frac{1}{m}\sum_{i=p+1}^{k}\|y_{(s-1)k+i,n}\| + \left(\frac{s}{m} - \frac{1}{k}\right)\|\sum_{i=1}^{k} x_{ij}\|.\end{aligned}$$

Từ $\{f_{in} : i \ge 1\}$ là một dãy các phần tử ngẫu nhiên độc lập, thuộc vào $\mathbf{L}^p(\mathfrak{X})$ và $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mathbb{E}\|f_{in}\|^p}{i^p} < \infty$, ta có

$$\left\|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(f_{in}(\omega) - y_{in})\right\| \to 0 \text{ h.c.c. khi } m \to \infty.$$

Từ đó,

$$\left\|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} f_{in}(\omega) - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i\right\| \to 0 \text{ h.c.c. khi } m \to \infty. \tag{3.2.35}$$

Bằng lập luận tương tự, với mỗi $m \ge 1$,

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_{mj}(\omega) - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i\right\| \to 0 \text{ h.c.c. khi } n \to \infty. \tag{3.2.36}$$

Kết hợp (3.2.34), (3.2.35), (3.2.34) và Bổ đề 3.1.4, ta suy ra

$$\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\omega) \to \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i \text{ h.c.c. khi } m \vee n \to \infty.$$

Từ đó,

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i \in s\text{-}\liminf_{m\vee n\to\infty} G_{mn}(\omega) \text{ h.c.c.}$$

Sử dụng Định lý 1.3.1, ta có

$$\overline{\text{co}}X \subset s\text{-}\liminf_{m\vee n\to\infty} G_{mn}(\omega) \text{ h.c.c.} \tag{3.2.37}$$

Dựa vào Định lý 1.3.3, ta nhận được

$$\limsup_{m\vee n\to\infty} d(x, G_{mn}(\omega)) \le d(x, \overline{\mathrm{co}}X) \text{ với mọi } x \in \mathfrak{X}, \text{ h.c.c.} \tag{3.2.38}$$

Với mỗi $x^* \in \mathbf{B}^*$, lập luận tương tự như chứng minh của Định lý 3.2.1, $\{s(x^*, F_{ij}) : i \ge 1, j \ge 1\}$ là mảng hai chiều các biến ngẫu nhiên (nhận giá trị thực) độc lập, thuộc vào $\mathbf{L}^p$ và

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}|s(x^*, F_{ij})|^p}{(ij)^p} \le \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}\|F_{ij}\|^p}{(ij)^p} < \infty.$$

Hơn nữa, dựa trên (3.2.26), (3.2.27) và Bổ đề 3.1.1,

$$\mathbb{E}(s(x^*, F_{ij})) = s(x^*, \mathrm{cl}(\mathbb{E}F_{ij})) \to s(x^*, X) \text{ khi } i \vee j \to \infty.$$

Từ đó,

$$s(x^*, G_{mn}(\omega)) \to s(x^*, X) \text{ h.c.c. khi } m \vee n \to \infty. \tag{3.2.39}$$

Kết hợp (3.2.39) với Định lý 1.2.5,

$$w\text{-}\limsup_{m\vee n\to\infty} G_{mn}(\omega) \subset \overline{\mathrm{co}}X \text{ h.c.c.} \tag{3.2.40}$$

Do đó, luật số lớn theo tôpô Mosco được suy ra từ (3.2.37) và (3.2.40).

Sử dụng (3.2.39), (1.2.6) và Định lý 1.2.7, ta có

$$\liminf_{m\vee n\to\infty} d(x, G_{mn}(\omega)) \ge d(x, \overline{\mathrm{co}}X) \text{ với mọi } x \in \mathfrak{X}, \text{ h.c.c.} \tag{3.2.41}$$

Từ (3.2.38) và (3.2.41), ta nhận được kết luận của định lý ứng với tôpô Wijsman. □

3.2.3 Chú ý. Theo [41, tr.623], nếu $F_{ij} \in cc(\mathfrak{X})$ h.c.c. với mọi $i \ge 1$, $j \ge 1$ thì $\mathrm{cl}(\mathbb{E}(F_{ij}, \mathcal{A}_{F_{ij}}))$ trong điều kiện (3.2.26) của Định lý 3.2.2 có thể được thay thế bởi $\mathrm{cl}(\mathbb{E}F_{ij})$. Mặt khác, nếu

$$\lim_{i\vee j\to\infty} d_{\mathrm{H}}(X, \mathrm{cl}(\mathbb{E}(F_{ij}, \mathcal{A}_{F_{ij}}))) = 0$$

thì các điều kiện (3.2.26) và (3.2.27) đều được thỏa mãn.

3.2.4 Hệ quả. *Giả sử $\mathfrak{X}$ là không gian Rademacher dạng p ($p \in [1,2]$). Nếu $\{F_{ij} : i \geq 1, j \geq 1\}$ là mảng hai chiều các biến ngẫu nhiên đa trị độc lập, nhận giá trị trên $cwk(\mathfrak{X})$ sao cho*

$$(a)\ \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\mathbb{E}\|F_{ij}\|^p}{(ij)^p} < \infty,$$

$$(b)\ \mathbb{E}F_{ij} = X \text{ với mọi } i \geq 1, j \geq 1,$$

thì

$$\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} F_{ij}(\omega) \to X \ \ h.c.c. \text{ khi } \ m \vee n \to \infty$$

theo các tôpô Mosco và Wijsman.

Chứng minh. Do biến ngẫu nhiên đa trị F_{11} nhận giá trị trên $cwk(\mathfrak{X})$ nên $X = \mathbb{E}F_{11} \in cwk(\mathfrak{X})$ (xem [16, Định lý V.14]). Từ đó $X \in c(\mathfrak{X})$ và ta kiểm tra được rằng X thỏa mãn các điều kiện (3.2.26) và (3.2.27). Sử dụng Định lý 3.2.2 ta thu được điều phải chứng minh. □

3.2.5 Nhận xét. Hệ quả 3.2.4 là một mở rộng các kết quả của F. Ezzaki ([26, Hệ quả 2.3]) và của F. Hiai ([40, Định lý 7]) cho trường hợp mảng hai chiều.

Năm 1996, N. Etemadi và M. Kaminski [25] đã chứng minh luật số lớn đối với mảng các biến ngẫu nhiên 2-hoán đổi được cho các trường hợp hội tụ hầu chắc chắn và hội tụ theo trung bình. Sau đó, năm 1997, N. Etemadi [23] mở rộng Định lý 2 của N. Etemadi và M. Kaminski [25] đối với mảng các phần tử ngẫu nhiên nhận giá trị trên không gian Banach khả ly cho trường hợp hội tụ hầu chắc chắn. Để thu được sự mở rộng này, N. Etemadi đã sử dụng kỹ thuật chứng minh như của W. G. Padgett và R. L. Taylor trong [60, tr. 42-44]. Để thiết lập luật số lớn cho mảng hai chiều các biến ngẫu nhiên đa trị 2-hoán đổi được, chúng tôi đưa ra một số kết quả sau đây về mảng nhiều chiều các phần tử ngẫu nhiên 2-hoán đổi được. Các kết quả này đã hoàn thiện sự mở rộng Định lý 2 của N. Etemadi [25].

3.2.6 Định lý. *Giả sử* $\{f_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *là một mảng các phần tử ngẫu nhiên* 2*-hoán đổi được, nhận giá trị trên* $\mathfrak{X}$*. Nếu* $\mathbb{E}(\|f_{\mathbf{1}}\|(\log^+ \|f_{\mathbf{1}}\|)^{d-1}) < \infty$ *thì*

$$\frac{1}{|\mathbf{n}|}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} f_{\mathbf{i}} \to f \ \ \textit{h.c.c. và trong}\, \mathbf{L}^1 \ \ \textit{khi}\ \ \mathbf{n}_{\max} \to \infty,$$

trong đó f *là một phần tử ngẫu nhiên nào đó thỏa mãn* $\mathbb{E}f = \mathbb{E}f_{\mathbf{1}}$*.*

Chứng minh. Theo [23, Hệ quả 1], tồn tại phần tử ngẫu nhiên f thỏa mãn $\frac{1}{|\mathbf{n}|}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} f_{\mathbf{i}} \to f$ h.c.c. khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$.

Sử dụng [25, Định lý 2] cho mảng các biến ngẫu nhiên 2-hoán đổi được $\{\|f_{\mathbf{i}}\| : \mathbf{i} \in \mathbb{N}^d\}$, ta suy ra rằng mảng các biến ngẫu nhiên $\{\frac{1}{|\mathbf{n}|}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \|f_{\mathbf{i}}\| : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ hội tụ hầu chắc chắn và trong $\mathbf{L}^1$ tới một biến ngẫu nhiên g nào đó khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$ sao cho

$$\mathbb{E}g = \mathbb{E}\|f_{\mathbf{1}}\| \le 2 + \mathbb{E}(\|f_{\mathbf{1}}\|(\log^+ \|f_{\mathbf{1}}\|)^{d-1}) < \infty.$$

Từ đó, mảng các biến ngẫu nhiên $\{\frac{1}{|\mathbf{n}|}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \|f_{\mathbf{i}}\| : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là khả tích đều, và do đó mảng các phần tử ngẫu nhiên $\{\frac{1}{|\mathbf{n}|}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} f_{\mathbf{i}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ cũng là khả tích đều. Hơn nữa, mảng các phần tử ngẫu nhiên này hội tụ hầu chắc chắn tới f khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$, do vậy nó hội tụ trong $\mathbf{L}^1$ tới phần tử ngẫu nhiên f khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$. Vì vậy,

$$\mathbb{E}f = \lim_{\mathbf{n}_{\max}\to\infty} \mathbb{E}\frac{1}{|\mathbf{n}|}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} f_{\mathbf{i}} = \mathbb{E}f_{\mathbf{1}}.$$

Định lý được chứng minh. □

Kết hợp Định lý 3.2.6 với [25, Hệ quả 1], chúng tôi thu được kết quả sau đây mà giới hạn là tất định.

3.2.7 Định lý. *Giả sử* $\{f_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *là một mảng các phần tử ngẫu nhiên* 2*-hoán đổi được thuộc* $\mathbf{L}^2(\mathfrak{X})$ *và giả sử không gian đối ngẫu* $\mathfrak{X}^*$ *là khả ly (ứng với tôpô sinh bởi chuẩn trên* $\mathfrak{X}^*$*). Nếu* $\mathrm{Cov}(\langle x^*, f_{\mathbf{1}}\rangle, \langle x^*, f_{\mathbf{2}}\rangle) = 0$ *với mọi* $x^* \in \mathfrak{X}^*$*, thì*

$$\frac{1}{|\mathbf{n}|}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} f_{\mathbf{i}} \to \mathbb{E}f_{\mathbf{1}} \ \ \textit{h.c.c. và trong}\, \mathbf{L}^1 \ \ \textit{khi}\, \mathbf{n}_{\max} \to \infty.$$

Chứng minh. Nhận thấy rằng tồn tại một hằng số dương C sao cho

$$(\log^+ x)^{d-1} \leq Cx \text{ với mọi } x \geq 0.$$

Do đó, giả thiết $f_{\mathbf{1}} \in \mathbf{L}^2(\mathfrak{X})$ kéo theo $\mathbb{E}(\|f_{\mathbf{1}}\|(\log^+ \|f_{\mathbf{1}}\|)^{d-1}) < \infty$.

Từ đó, mảng $\{f_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ thỏa mãn tất cả các điều kiện của Định lý 3.2.6. Bằng cách áp dụng định lý này, ta thu được $\frac{1}{|\mathbf{n}|}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} f_{\mathbf{i}} \to f$ h.c.c. và trong $\mathbf{L}^1$ khi $\mathbf{n}_{\max} \to \infty$, với f là một phần tử ngẫu nhiên nào đó. Điều này dẫn tới

$$\frac{1}{|\mathbf{n}|}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \langle x^*, f_{\mathbf{i}}\rangle \to \langle x^*, f\rangle \text{ h.c.c. và trong } \mathbf{L}^1 \text{ khi } \mathbf{n}_{\max} \to \infty,$$

với mỗi $x^* \in \mathfrak{X}^*$.

Do $f_{\mathbf{n}} \in \mathbf{L}^2(\mathfrak{X})$ nên với mọi $x^* \in \mathfrak{X}^*$, ta có $\langle x^*, f_{\mathbf{n}}\rangle \in \mathbf{L}^2$. Do đó, $\{\langle x^*, f_{\mathbf{n}}\rangle : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là mảng các biến ngẫu nhiên 2-hoán đổi được đến moment bậc 2. Sử dụng [25, Hệ quả 1], ta thu được $\langle x^*, f\rangle = \mathbb{E}\langle x^*, f_{\mathbf{1}}\rangle$ h.c.c., và do đó $\langle x^*, f - \mathbb{E}f_{\mathbf{1}}\rangle = 0$ h.c.c. với mọi $x^* \in \mathfrak{X}^*$.

Do tính khả ly của $\mathfrak{X}^*$, tồn tại dãy $\{x_j^* : j \geq 1\}$ trù mật trên $\mathfrak{X}^*$. Do đó, tồn tại tập $N \in \mathcal{A}$ có độ đo 0 sao cho với mọi $\omega \in \Omega\backslash N$,

$$\langle x_j^*, f(\omega) - \mathbb{E}f_{\mathbf{1}}\rangle = 0 \text{ với mọi } j \geq 1.$$

Cố định $\omega \in \Omega\backslash N$. Để tiện theo dõi, ta đặt $x = f(\omega) - \mathbb{E}f_{\mathbf{1}}$. Giả sử $x \neq 0$, khi đó $\|x\| > 0$. Theo định lý Hahn-Banach, tồn tại $x^* \in \mathfrak{X}^*$ sao cho $\langle x^*, x\rangle \neq 0$, và do đó $|\langle x^*, x\rangle| > 0$. Do tính trù mật của tập $\{x_j^* : j \geq 1\}$, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại số tự nhiên k sao cho $\|x^* - x_k^*\| < \frac{\varepsilon}{\|x\|}$.

Từ đó,

$$\begin{aligned}
|\langle x^*, x\rangle| &\leq |\langle x^*, x\rangle - \langle x_k^*, x\rangle| + |\langle x_k^*, x\rangle| \\
&= |\langle x^* - x_k^*, x\rangle| \\
&\leq \|x^* - x_k^*\|.\|x\| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Điều này mâu thuẫn với $|\langle x^*, x\rangle| > 0$, và do đó $x = 0$. Vì vậy, ta có $f = \mathbb{E}f_{\mathbf{1}}$ h.c.c.□

Khi nghiên cứu để mở rộng Định lý 3.2.6 cho mảng hai chiều các biến ngẫu nhiên đa trị, chúng tôi thu được kết quả sau.

3.2.8 Định lý. *Giả sử rằng* $\{F_{ij} : i \geq 1, j \geq 1\}$ *là một mảng hai chiều các biến ngẫu nhiên đa trị 2-hoán đổi được sao cho* $\mathcal{S}^1_{F_{11}} \neq \emptyset$ *và* $\mathbb{E}(\|F_{11}\| \log^+ \|F_{11}\|) < \infty$. *Đặt* $S_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} F_{ij}$. *Khi đó,*

(*a*) $\overline{\text{co}}\mathbb{E}F_{11} \subset \text{cl}(\mathbb{E}F)$, *trong đó* F *là biến ngẫu nhiên đa trị thỏa mãn* $F(\omega) = s\text{-}\liminf_{m\wedge n\to\infty} \text{cl}\left(\frac{S_{mn}(\omega)}{mn}\right)$ *h.c.c.*

(*b*) *Nếu* $\mathfrak{X}$ *là không gian phản xạ và* $\sup_{m,n\geq 1} \|F_{mn}(\omega)\| < \infty$ *h.c.c., thì* $\text{cl}(\mathbb{E}Y) \subset \overline{\text{co}}\mathbb{E}F_{11}$, *trong đó* Y *là biến ngẫu nhiên đa trị thỏa mãn* $Y(\omega) = w\text{-}\limsup_{m\vee n\to\infty} \text{cl}\left(\frac{S_{mn}(\omega)}{mn}\right)$ *h.c.c.*

Chứng minh. (*a*) Với mỗi $x \in \overline{\text{co}}\mathbb{E}F_{11}$ và mỗi $\varepsilon > 0$, áp dụng các Bổ đề 3.1.1 và 2.3.1, tồn tại $f_j \in \mathcal{S}^1_{F_{11}}(\mathcal{A}_{F_{11}})$, $1 \leq j \leq k$ thỏa mãn (3.2.2). Từ Bổ đề 3.1.2, ta có thể chọn $f_{ij} \in \mathcal{S}^1_{F_{ij}}(\mathcal{A}_{F_{ij}})$, $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k$ thỏa mãn (3.2.3).

Đặt $x_j = \mathbb{E}f_j, 1 \leq j \leq k$ và $x_{ij} = \mathbb{E}f_{ij}, 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k$. Ta thu được đẳng thức (3.2.4).

Theo Bổ đề 3.1.2 và Bổ đề 3.1.3, tồn tại mảng hai chiều các phần tử ngẫu nhiên $\{f_{ij} : i \geq 1, j \geq 1\}$ sao cho $f_{ij} \in \mathcal{S}^1_{F_{ij}}(\mathcal{A}_{F_{ij}})$ với mọi $i \geq 1, j \geq 1$ và $\{f_{(s-1)k+i,(t-1)k+j} : s \geq 1, t \geq 1\}$ là mảng hai chiều các phần tử ngẫu nhiên 2-hoán đổi được, với mỗi $i = 1, 2, \ldots, k$ và mỗi $j = 1, 2, \ldots, k$.

Với mỗi $i \geq 1, j \geq 1$,

$$\mathbb{E}(\|f_{ij}\| \log^+ \|f_{ij}\|) \leq \mathbb{E}(\|F_{ij}\| \log^+ \|F_{ij}\|) = \mathbb{E}(\|F_{11}\| \log^+ \|F_{11}\|) < \infty.$$

Từ đó, với mỗi $i, j = 1, 2, \ldots, k$, áp dụng Định lý 3.2.6 cho mảng hai chiều các phần tử ngẫu nhiên $\{f_{(s-1)k+i,(t-1)k+j} : s \geq 1, t \geq 1\}$, ta nhận được

$$\frac{1}{st} \sum_{l=1}^{s} \sum_{r=1}^{t} f_{(l-1)k+i,(r-1)k+j}(\omega) \to g_{ij}(\omega) \text{ h.c.c. và trong } \mathbf{L}^1 \text{ khi } s \vee t \to \infty, \quad (3.2.42)$$

với g_{ij} là một phần tử ngẫu nhiên nào đó thỏa mãn $\mathbb{E}g_{ij} = \mathbb{E}f_{ij} = x_{ij}$.

Nếu $m = (s-1)k + p, n = (t-1)k + q$ trong đó $1 \le p \le k, 1 \le q \le k$, thì

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\omega) - \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} g_{ij}(\omega) \right\| \\
&\qquad \le \frac{st}{mn} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \left\| \frac{1}{st} \sum_{l=1}^{s} \sum_{r=1}^{t} f_{(l-1)k+i,(r-1)k+j}(\omega) - g_{ij}(\omega) \right\| \\
&\qquad + \frac{t}{mn} \sum_{i=p+1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \left\| \frac{1}{t} \sum_{r=1}^{t} f_{(s-1)k+i,(r-1)k+j}(\omega) \right\| \\
&\qquad + \frac{s}{mn} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=q+1}^{k} \left\| \frac{1}{s} \sum_{l=1}^{s} f_{(l-1)k+i,(t-1)k+j}(\omega) \right\| \\
&\qquad + \frac{1}{mn} \sum_{i=p+1}^{k} \sum_{j=q+1}^{k} \left\| f_{(s-1)k+i,(t-1)k+j}(\omega) \right\| \\
&\qquad + \left(\frac{st}{mn} - \frac{1}{k^2} \right) \left\| \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} g_{ij}(\omega) \right\|. \qquad (3.2.43)
\end{aligned}$$

Theo (3.2.42) và Bổ đề 3.1.5,

$$\frac{st}{mn} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \left\| \frac{1}{st} \sum_{l=1}^{s} \sum_{r=1}^{t} f_{(l-1)k+i,(r-1)k+j}(\omega) - g_{ij}(\omega) \right\| \to 0 \qquad (3.2.44)$$

h.c.c. và trong $\mathbf{L}^1$ khi $m \vee n \to \infty$.

Do với mỗi $s \ge 1$, $\{f_{(s-1)k+i,(r-1)k+j} : r \ge 1\}$ là một dãy các phần tử ngẫu nhiên 2-hoán đổi được, nên theo Định lý 3.2.6, ta thu được

$$\left\| \frac{1}{t} \sum_{r=1}^{t} f_{(s-1)k+i,(r-1)k+j}(\omega) - g_{ij}(\omega) \right\| \to 0 \text{ h.c.c. và trong } \mathbf{L}^1 \text{ khi } t \to \infty.$$

Do đó,

$$\begin{aligned}
&\frac{t}{mn} \sum_{i=p+1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \left\| \frac{1}{t} \sum_{r=1}^{t} f_{(s-1)k+i,(r-1)k+j}(\omega) \right\| \\
&\qquad \le \frac{t}{mn} \sum_{i=p+1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \left\| \frac{1}{t} \sum_{r=1}^{t} f_{(s-1)k+i,(r-1)k+j}(\omega) - g_{ij}(\omega) \right\| \\
&\qquad\qquad + \frac{t}{mn} \sum_{i=p+1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \| g_{ij}(\omega) \| \\
&\qquad \to 0 \text{ h.c.c. và trong } \mathbf{L}^1 \text{ khi } m \wedge n \to \infty. \qquad (3.2.45)
\end{aligned}$$

Tương tự,

$$\frac{s}{mn}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=q+1}^{k}\left\|\frac{1}{s}\sum_{l=1}^{s}f_{(l-1)k+i,(t-1)k+j}(\omega)\right\|\to 0 \tag{3.2.46}$$

h.c.c. và trong $\mathbf{L}^1$ khi $m\wedge n\to\infty$.

Lập luận như (3.2.14), ta thu được

$$\frac{1}{mn}\sum_{i=p+1}^{k}\sum_{j=q+1}^{k}\left\|f_{(s-1)k+i,(t-1)k+j}(\omega)\right\|\to 0 \text{ khi } m\wedge n\to\infty. \tag{3.2.47}$$

Hơn nữa, từ (3.2.13),

$$\left(\frac{st}{mn}-\frac{1}{k^2}\right)\left\|\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}g_{ij}(\omega)\right\|\to 0 \text{ h.c.c. và trong } \mathbf{L}^1 \text{ khi } m\wedge n\to\infty. \tag{3.2.48}$$

Kết hợp (3.2.43), (3.2.44), (3.2.45), (3.2.46), (3.2.47) và (3.2.48), ta suy ra

$$\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}f_{ij}(\omega)\to\frac{1}{k^2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}g_{ij}(\omega) \text{ h.c.c. và trong } \mathbf{L}^1 \text{ khi } m\wedge n\to\infty.$$

Điều này dẫn tới kết luận (a) của định lý.

(b) Đặt $X=\overline{\text{co}}\mathbb{E}F_{11}$. Theo Bổ đề 1.2.4, tồn tại dãy $\{x_j^*: j\geq 1\}\subset\mathbf{S}^*$ sao cho $x\in X$ khi và chỉ khi $\langle x_j^*,x\rangle\leq\langle x_j^*,X\rangle$ với mọi $j\geq 1$.

Từ Bổ đề 3.1.3, ta suy ra rằng với mỗi $j\geq 1$, $\{s(x_j^*,F_{kl}): k\geq 1, l\geq 1\}$ là mảng hai chiều các biến ngẫu nhiên 2-hoán đổi được và thỏa mãn

$$\mathbb{E}(|s(x_j^*,F_{11})|\log^+|s(x_j^*,F_{11})|)\leq\mathbb{E}(\|F_{11}\|\log^+\|F_{11}\|)<\infty.$$

Vì vậy, dựa vào Định lý 3.2.6, tồn tại tập $N\in\mathcal{A}$ có độ đo 0 sao cho với mọi $\omega\in\Omega\backslash N$ và mọi $j\geq 1$,

$$s\left(x_j^*,\frac{S_{mn}(\omega)}{mn}\right)=\frac{1}{mn}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}s(x_j^*,F_{kl}(\omega))\to Y_j(\omega) \text{ khi } m\vee n\to\infty,$$

trong đó Y_j là một biến ngẫu nhiên nào đó thỏa mãn

$$\mathbb{E}Y_j=\mathbb{E}(s(x_j^*,F_{11}))=s(x_j^*,X)<\infty.$$

Theo [41, Định lý 2.2(2)], tồn tại biến ngẫu nhiên đa trị Y thỏa mãn $Y(\omega) = w\text{-}\limsup_{m\vee n\to\infty} \frac{S_{mn}}{mn}(\omega)$ với mọi $\omega \in \Omega\backslash N$. Với $f \in \mathcal{S}^1_Y$, tồn tại mảng các phần tử ngẫu nhiên $\{f_{rs} : r \geq 1, s \geq 1\}$ thỏa mãn $f_{rs} \in \mathcal{S}^1_{\frac{S_{m(r)n(s)}}{m(r)n(s)}}$ và $f_{rs}(\omega) \xrightarrow{w} f(\omega)$ khi $r \vee s \to \infty$. Từ đó,

$$\langle x_j^*, f(\omega)\rangle = \lim_{r\vee s\to\infty} \langle x_j^*, f_{rs}(\omega)\rangle \leq \lim_{r\vee s\to\infty} s\left(x_j^*, \frac{S_{m(r)n(s)}(\omega)}{m(r)n(s)}\right) = Y_j(\omega), \text{ với mọi } j \geq 1.$$

Điều này kéo theo $\langle x_j^*, \mathbb{E}f\rangle = \mathbb{E}\langle x_j^*, f\rangle \leq \mathbb{E}Y_j = s(x_j^*, X)$, $j \geq 1$, và do đó $\mathbb{E}f \in X$. Vì vậy, ta thu được $\mathrm{cl}(\mathbb{E}Y) \subset X$. □

Ví dụ sau đây sẽ chứng tỏ rằng tính 2-hoán đổi được thực sự mạnh hơn tính hoán đổi được đôi một: "Mảng $\{F_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ được gọi là *hoán đổi được đôi một* nếu với mọi $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbb{N}^d$, $\mathbf{i} \neq \mathbf{j}$ và mọi $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_{c(\mathfrak{X})}$,

$$\mathbb{P}(F_{\mathbf{i}} \in B_1, F_{\mathbf{j}} \in B_2) = \mathbb{P}(F_{\mathbf{j}} \in B_1, F_{\mathbf{i}} \in B_2)."$$

3.2.9 Ví dụ. Giả sử f là biến ngẫu nhiên xác định bởi

$$\mathbb{P}(f = a) = \mathbb{P}(f = -a) = \frac{1}{2},$$

trong đó a là một số thực dương cho trước.

Với mỗi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ và mỗi $\omega \in \Omega$, đặt

$$F_{\mathbf{n}}(\omega) = \begin{cases} \{f(\omega)\} & \text{nếu } |\mathbf{n}| \text{ là một số tự nhiên lẻ,} \\ \{-f(\omega)\} & \text{nếu trái lại.} \end{cases}$$

Khi đó, do f và $-f$ cùng phân phối nên

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(f < x_1, -f < x_2) &= \mathbb{P}(-x_2 < f < x_1) \\ &= \mathbb{P}(-x_2 < -f < x_1) \\ &= \mathbb{P}(f < x_2, -f < x_1) \text{ với mọi } x_1, x_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Điều này dẫn tới $\{f, -f\}$ hoán đổi được, và do đó $\{F_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là mảng các biến ngẫu nhiên đa trị hoán đổi được đôi một. Tuy nhiên, vì

$$\mathbb{P}(F_{\mathbf{1}} \in U^-, f_{\mathbf{3}} \in U^-) = \mathbb{P}(f < \frac{a}{2}) = \mathbb{P}(f = -a) = \frac{1}{2} \neq 0 = \mathbb{P}(f = 0) = \mathbb{P}(f_{\mathbf{1}} \in U^-, f_{\mathbf{2}} \in U^-)$$

trong đó $U = (-\infty, \frac{a}{2})$, nên $\{F_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ không phải là mảng 2-hoán đổi được.

Kết luận của Chương 3

Trong chương này, luận án đã giải quyết được những vấn đề sau:

- Chứng minh một điều kiện về sự hội tụ của trung bình cộng các phần tử thuộc m hàng đầu tiên và n cột đầu tiên của mảng hai chiều các phần tử thuộc vào một không gian Banach khi $m \vee n \to \infty$, dựa trên sự hội tụ trên mỗi hàng, sự hội tụ trên mỗi cột và sự hội tụ khi $m \wedge n \to \infty$.

- Thiết lập luật số lớn đối với mảng nhiều chỉ số các phần tử ngẫu nhiên 2-hoán đổi được, nhận giá trị trên không gian Banach thực, khả ly.

- Thiết lập các luật số lớn theo hội tụ Mosco và hội tụ Wijsman cho mảng hai chỉ số các biến ngẫu nhiên đa trị cho các trường hợp: độc lập đôi một cùng phân phối, hoặc độc lập và nhận giá trị trên không gian các tập con đóng của không gian Rademacher dạng p, hoặc phụ thuộc 2-hoán đổi được.

- Đưa ra ví dụ minh họa kết quả chính.

CHƯƠNG 4

LUẬT SỐ LỚN ĐỐI VỚI MẢNG TAM GIÁC CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN ĐA TRỊ

Trong chương này, chúng tôi thiết lập một số luật số lớn đối với mảng tam giác các biến ngẫu nhiên đa trị độc lập theo hàng, nhận giá trị trên không gian các tập con đóng của không gian Rademacher dạng p. Các loại hội tụ được xét là hội tụ Mosco và hội tụ Wijsman. Các kết quả chính của chương được viết dựa trên bài báo [63].

4.1. Dạng định lý Stolz cho trường hợp mảng tam giác

Với $\{x_{ni} : n \geq 1, 1 \leq i \leq n\} \subset \mathbb{R}$, ký hiệu

$$\liminf_{i\to\infty} x_{ni} = \sup_{k\geq 1} \inf_{k\leq i\leq n} x_{ni},$$
$$\limsup_{i\to\infty} x_{ni} = \inf_{k\geq 1} \sup_{k\leq i\leq n} x_{ni}.$$

4.1.1 Định nghĩa. (a) Mảng tam giác $\{x_{ni} : n \geq 1, 1 \leq i \leq n\} \subset \mathbb{R}$ được gọi là *hội tụ tới* $x \in \mathbb{R}$ *khi* $i \to \infty$ và ký hiệu là $\lim\limits_{i\to\infty} x_{ni} = x$, nếu

$$\liminf_{i\to\infty} x_{ni} = \limsup_{i\to\infty} x_{ni} = x.$$

(b) Mảng tam giác $\{x_{ni} : n \geq 1, 1 \leq i \leq n\} \subset \mathfrak{X}$ được gọi là *hội tụ tới* $x \in \mathfrak{X}$ *khi* $i \to \infty$ và ký hiệu là $\lim\limits_{i\to\infty} x_{ni} = x$, nếu $\lim\limits_{i\to\infty} \|x_{ni} - x\| = 0$.

4.1.2 Nhận xét. Giả sử $\{x_{ni} : n \geq 1, 1 \leq i \leq n\} \subset \mathfrak{X}$. Có thể kiểm tra được rằng $\lim\limits_{i\to\infty} x_{ni} = x$ khi và chỉ khi với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\|x_{ni} - x\| < \varepsilon, \text{ với mọi } i \geq N \text{ và mọi } n \geq i.$$

Bổ đề sau đây là dạng định lý Stolz cho trường hợp mảng tam giác.

4.1.3 Bổ đề. *Giả sử* $\{x_{ni} : n \geq 1, 1 \leq i \leq n\}$ *là một mảng tam giác các phần tử trên một không gian Banach và thỏa mãn hai điều kiện:*

(a) $\lim\limits_{i\to\infty} x_{ni} = x$,

(b) *tồn tại hằng số* $C > 0$ *sao cho* $\|x_{ni}\| \leq C$, *với mọi* $n \geq 1, 1 \leq i \leq n$.

Khi đó

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ni} \to x \ \ khi\, n \to \infty.$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $x = 0$ vì nếu ngược lại ta xét mảng tam giác $\{x'_{ni} : n \geq 1, 1 \leq i \leq n\}$ trong đó $x'_{ni} = x_{ni} - x$.

Theo giả thiết (a), với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\|x_{ni}\| < \varepsilon$ với mọi $i > n_0, n \geq i$.

Với ε nêu trên, theo (b), nếu $n > n_0$ thì

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ni}\right\| &\leq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n_0}\|x_{ni}\| + \sum_{i=n_0+1}^{n}\|x_{ni}\|\right)\\ &< \frac{n_0}{n}C + \frac{n-n_0}{n}\varepsilon.\end{aligned}$$

Cho $n \to \infty$, ta suy ra

$$\limsup_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ni}\right\| \leq \varepsilon.$$

Tiếp tục, cho $\varepsilon \to 0$, ta thu được điều phải chứng minh. □

Trong trường hợp dãy, định lý Stolz khẳng định rằng nếu $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x$ thì $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = x$. Đối với trường hợp mảng hai chiều, Bổ đề 3.1.5 chỉ ra rằng nếu $\lim\limits_{i\vee j\to\infty} x_{ij} = x$ thì $\lim\limits_{m\vee n\to\infty}\frac{1}{mn}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = x$. Nhận thấy rằng trong cả hai trường hợp trên, từ giả thiết hội tụ ta suy ra các phần tử là bị chặn. Tuy nhiên, khi xem xét cho trường hợp mảng tam giác, chúng ta cần bổ sung thêm điều kiện các phần tử bị chặn (điều kiện (b)). Thật vậy, ví dụ sau đây sẽ chỉ ra rằng Bổ đề 4.1.3 không còn đúng nếu điều kiện (b) không được thoả mãn.

4.1.4 Ví dụ. Giả sử $\{x_{ni} : n \geq 1, 1 \leq i \leq n\}$ là mảng tam giác các số thực được định nghĩa bởi

$$x_{ni} = \begin{cases} n^2 & \text{nếu} \quad i = 1, \\ \dfrac{1}{n} & \text{nếu} \quad i \geq 2. \end{cases}$$

Có thể kiểm tra được rằng $\lim\limits_{i\to\infty} x_{ni} = 0$ và do đó điều kiện (a) được thỏa mãn. Tuy nhiên,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ni} = \frac{1}{n}(n^2 + \frac{n-1}{n}) = n + \frac{n-1}{n^2} \to \infty \text{ khi } n \to \infty.$$

4.2. Luật số lớn đối với mảng tam giác các biến ngẫu nhiên đa trị

Ta nói rằng họ các biến ngẫu nhiên đa trị $\{F_i : i \in I\}$ *có kỳ vọng bị chặn* nếu tồn tại hằng số dương C sao cho $\|\mathbb{E}F_i\| \leq C$ với mọi $i \in I$.

Định lý sau đây là một sự tương tự kết quả của F. Hiai [41, Định lý 3.3] cho trường hợp mảng tam giác.

4.2.1 Định lý. *Giả sử $\mathfrak{X}$ là một không gian Rademacher dạng p ($p \in (1, 2]$) và $\{F_{ni} : n \geq 1, 1 \leq i \leq n\}$ là một mảng tam giác các biến ngẫu nhiên đa trị độc lập theo hàng, có kỳ vọng bị chặn. Giả thiết rằng $\Psi(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục, lồi, chẵn, nhận giá trị dương sao cho*

$$\frac{\Psi(|t|)}{|t|^r} \uparrow \text{ và } \frac{\Psi(|t|)}{|t|^{r+p-1}} \downarrow \text{ khi } |t| \uparrow \tag{4.2.1}$$

với r là số nguyên không âm nào đó và tồn tại hằng số dương C_1 thỏa mãn

$$\Psi(a+b) \leq C_1(\Psi(a) + \Psi(b)) \text{ với mọi } a, b \in \mathbb{R}. \tag{4.2.2}$$

Khi đó, nếu các điều kiện sau được thỏa mãn

$$+) \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{E}(\Psi(\|F_{ni}\|))}{\Psi(n)} < \infty, \tag{4.2.3}$$

$$+) \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{E}\|F_{ni}\|^p}{n^p}\right)^{p.k} < \infty, \tag{4.2.4}$$

với k là hằng số nguyên dương nào đó và tồn tại $X \in c(\mathfrak{X})$ sao cho

$$+)\ X \subset s\text{-}\liminf_{i\to\infty} \mathrm{cl}(\mathbb{E}(F_{ni}, \mathcal{A}_{F_{ni}})), \tag{4.2.5}$$

$$+)\ \limsup_{i\to\infty} s(x^*, \mathrm{cl}(\mathbb{E}F_{ni})) \le s(x^*, X),\ \textit{với mọi}\ x^* \in \mathfrak{X}^* \tag{4.2.6}$$

thì chúng ta thu được luật số lớn

$$\frac{1}{n}\mathrm{cl}\sum_{i=1}^{n} F_{ni}(\omega) \to \overline{\mathrm{co}}X\ \textit{h.c.c. khi}\ n \to \infty$$

đối với hội tụ Mosco và hội tụ Wijsman.

Chứng minh. Đặt $G_n(\omega) = \frac{1}{n}\mathrm{cl}\sum_{i=1}^{n} X_{ni}(\omega)$. Đầu tiên, ta sẽ chứng minh $\overline{\mathrm{co}}X \subset s\text{-}\liminf_{n\to\infty} G_n$ h.c.c.

Với mỗi $x \in \overline{\mathrm{co}}X$ và mỗi $\varepsilon > 0$, áp dụng Bổ đề 2.3.1, tồn tại $x_1, x_2, ..., x_m \in X$ (các phần tử $x_1, x_2, ..., x_m$ chỉ phụ thuộc vào x và ε) sao cho

$$\left\| \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x_j - x \right\| < \varepsilon.$$

Với mỗi $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, từ điều kiện (4.2.5), tồn tại mảng tam giác các phần tử ngẫu nhiên $\{f_{ni}^{(j)} : n \ge 1, 1 \le i \le n\}$ sao cho $f_{ni}^{(j)} \in \mathcal{S}^1_{F_{ni}}(\mathcal{A}_{F_{ni}})$ và

$$\|\mathbb{E}f_{ni}^{(j)} - x_j\| \to 0 \text{ khi } i \to \infty. \tag{4.2.7}$$

Tiếp tục, mảng tam giác các phần tử ngẫu nhiên $\{f_{ni} : n \ge 1, 1 \le i \le n\}$ sao cho $f_{ni} \in \mathcal{S}^1_{F_{ni}}(\mathcal{A}_{F_{ni}})$ được định nghĩa bởi

$$f_{ni}(\omega) := f_{ni}^{(j)}(\omega) \text{ nếu } i \equiv j \pmod m,\ \text{với mọi } \omega \in \Omega,\ \text{với mỗi } j \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Điều này có nghĩa là

$$\Big(f_{ni}\Big)_{n\ge1, 1\le i\le n} = \begin{pmatrix} f_{11}^{(1)} & & & & & \\ f_{21}^{(1)} & f_{22}^{(2)} & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ f_{m,1}^{(1)} & f_{m,2}^{(2)} & \cdots & f_{m,m}^{(m)} & & \\ f_{m+1,1}^{(1)} & f_{m+1,2}^{(2)} & \cdots & f_{m+1,m}^{(m)} & f_{m+1,m+1}^{(1)} & \\ \underbrace{\vdots}_{\substack{\text{cột thứ nhất}\\ \text{của } \{f_{ni}^{(1)}\}}} & \underbrace{\vdots}_{\substack{\text{cột thứ hai}\\ \text{của } \{f_{ni}^{(2)}\}}} & \cdots & \underbrace{\vdots}_{\substack{\text{cột thứ } m\\ \text{của } \{f_{ni}^{(m)}\}}} & \underbrace{\vdots}_{\substack{\text{cột thứ } m+1\\ \text{của } \{f_{ni}^{(1)}\}}} & \ddots \end{pmatrix}$$

Đặt $y_{ni} = \mathbb{E}f_{ni}$ trong đó $n \geq 1, 1 \leq i \leq n$. Ta có

$$\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_{ni}(\omega) - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x_j\| \leq \|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(f_{ni}(\omega) - y_{ni})\| + \|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_{ni} - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x_j\|. \tag{4.2.8}$$

Tiếp tục, đặt $g_{ni}(\omega) = f_{ni}(\omega) - y_{ni}$. Từ giả thiết $\{F_{ni} : n \geq 1, 1 \leq i \leq n\}$ là mảng tam giác các biến ngẫu nhiên đa trị độc lập theo hàng và f_{ni} là phần tử ngẫu nhiên $\mathcal{A}_{F_{ni}}$-đo được, ta suy ra $\{f_{ni} : n \geq 1, 1 \leq i \leq n\}$ là mảng tam giác các phần tử ngẫu nhiên độc lập theo hàng, thuộc $\mathbf{L}^p(\mathfrak{X})$.

Từ đó, $\{g_{ni} : n \geq 1, 1 \leq i \leq n\}$ cũng là mảng tam giác các phần tử ngẫu nhiên độc lập theo hàng, thuộc $\mathbf{L}^p(\mathfrak{X})$. Hơn nữa, $\mathbb{E}g_{ni} = \mathbb{E}f_{ni} - \mathbb{E}(\mathbb{E}f_{ni}) = 0$.

Giả sử a, b là hai số thực thỏa mãn $0 < a < b$. Sử dụng giả thiết $\dfrac{\Psi(|t|)}{|t|^r} \uparrow$ khi $|t| \uparrow$ (với r là số nguyên không âm nào đó), ta có

$$\frac{\Psi(a)}{a^r} < \frac{\Psi(b)}{b^r} \Rightarrow \Psi(a) < (\frac{a}{b})^r.\Psi(b) \leq \Psi(b). \tag{4.2.9}$$

Điều này chứng tỏ $\Psi(|t|) \uparrow$ khi $|t| \uparrow$ và do đó,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbb{E}(\Psi(\|g_{ni}\|))}{\Psi(n)} &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbb{E}(\Psi(\|f_{ni} - \mathbb{E}f_{ni}\|))}{\Psi(n)} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbb{E}(\Psi(\|f_{ni}\| + \|\mathbb{E}f_{ni}\|))}{\Psi(n)} \quad (\text{do } \Psi(|t|) \uparrow) \\
&\leq C_1\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbb{E}(\Psi(\|f_{ni}\|) + \Psi(\|\mathbb{E}f_{ni}\|))}{\Psi(n)} \ (\text{do } (4.2.2)) \\
&\leq C_1\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbb{E}(\Psi(\|f_{ni}\|) + \Psi(\mathbb{E}\|f_{ni}\|))}{\Psi(n)} \ (\text{do } \Psi(|t|) \uparrow) \\
&\leq C_1\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbb{E}(\Psi(\|f_{ni}\|) + \mathbb{E}(\Psi(\|f_{ni}\|)))}{\Psi(n)} \\
&\qquad\qquad (\text{theo tính lồi của hàm } \Psi(t)) \\
&= 2C_1\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbb{E}(\Psi(\|f_{ni}\|))}{\Psi(n)} \\
&\leq 2C_1\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbb{E}(\Psi(\|F_{ni}\|))}{\Psi(n)} < \infty \\
&\qquad\qquad (\text{do } \Psi(|t|) \uparrow \text{ và do } (4.2.3)),
\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

và

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbb{E}\|g_{ni}\|^p}{n^p}\right)^{p.k} \le \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{2^{p-1}\left(\mathbb{E}\|f_{ni}\|^p+\mathbb{E}\|y_{ni}\|^p\right)}{n^p}\right)^{p.k}$$

(theo bất đẳng thức c_r)

$$\le 2^{p^2k}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbb{E}\|f_{ni}\|^p}{n^p}\right)^{p.k}$$

$$\le 2^{p^2k}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbb{E}\|F_{ni}\|^p}{n^p}\right)^{p.k} < \infty \text{ (theo (4.2.4))} \quad (4.2.11)$$

với k là một số nguyên dương nào đó.

Từ đó, áp dụng [12, Định lý 2.2, Định lý 2.3, Định lý 2.4] cho mảng tam giác $\{g_{ni} : n \ge 1, 1 \le i \le n\}$, ta thu được

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(f_{ni}(\omega)-y_{ni}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}g_{ni}(\omega) \to 0 \text{ h.c.c. khi } n\to\infty. \quad (4.2.12)$$

Giả sử $n = km + l$ trong đó $1 \le l \le m$. Khi đó,

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_{ni}-\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}x_j\right\| = \left\|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}y_{n,(i-1)m+j}+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{l}y_{n,km+j}-\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}x_j\right\|$$

$$\le \frac{k}{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\|y_{n,(i-1)m+j}-x_j\|+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{l}\|y_{n,km+j}\|$$

$$+\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{m}\right)\left\|\sum_{j=1}^{m}x_j\right\|. \quad (4.2.13)$$

Với mỗi $l, j \in \{1, 2, ..., m\}$, đặt

$$z_{ki}^{(l,j)} = \|y_{km+l,(i-1)m+j}-x_j\| = \|y_{n,(i-1)m+j}-x_j\|,\ k\ge 1, 1\le i\le k.$$

Từ giả thiết $\{F_{ni} : n \ge 1, 1 \le i \le n\}$ có kỳ vọng bị chặn, ta suy ra

$$|z_{ki}^{(l,j)}| \le \|\mathbb{E}f_{n,(i-1)m+j}\|+\|x_j\|$$

$$\le \|\mathbb{E}F_{n,(i-1)m+j}\|+\|x_j\|$$

$$\le C+\|x_j\|, \text{ với mọi } k\ge 1, 1\le i\le k. \quad (4.2.14)$$

Theo (4.2.7), $z_{ki}^{(l,j)} \to 0$ khi $i \to \infty$. Kết hợp điều này với (4.2.14) và sử dụng Bổ đề 4.1.3 cho mảng tam giác $\{z_{ki}^{(l,j)} : k \geq 1, 1 \leq i \leq k\}$ ta nhận được

$$S_n^{(j)} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \|y_{n,(i-1)m+j} - x_j\| \to 0 \text{ khi } k \to \infty.$$

Do mỗi $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, dãy số $\{S_n^{(j)} : n \geq 1\}$ được chia thành m dãy con $\{S_{km+l}^{(j)} : k \geq 1\}$, $l = 1, 2, \ldots, m$ đều hội tụ tới 0 nên

$$S_n^{(j)} \to 0 \text{ khi } n \to \infty. \tag{4.2.15}$$

Với mỗi $l, j \in \{1, 2, ..., m\}$, ta xem xét mảng tam giác $\{y_{km+l,im+j} - x_j : k \geq 1, 1 \leq i \leq k\}$, trong đó nếu $km + l < im + j$ thì ta đặt $y_{km+l,im+j} = x_j$. Theo (4.2.7), $y_{km+l,im+j} - x_j \to 0$ khi $i \to \infty$. Áp dụng Bổ đề 4.1.3 ta có

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \|y_{km+l,im+j} - x_j\| \to 0 \text{ khi } k \to \infty.$$

Tương tự như lập luận để thu được (4.2.15), ta nhận được

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \|y_{n,im+j} - x_j\| \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Kết hợp các điều trên, ta có

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{l} \|y_{n,km+j}\| &\leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} \|y_{n,km+j}\| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} \|y_{n,km+j} - x_j\| + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} \|x_j\| \\
&= \frac{k}{n}\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \|y_{n,im+j} - x_j\| \right. \\
&\quad \left. -(\frac{k-1}{k})\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k-1} \|y_{n,im+j} - x_j\| \right) \\
&\quad + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} \|x_j\| \to 0 \text{ khi } n \to \infty.
\end{aligned} \tag{4.2.16}$$

Hơn nữa, $(\frac{k}{n} - \frac{1}{m}) \to 0$ khi $n \to \infty$. Kết hợp (4.2.13), (4.2.15), (4.2.16) và với lưu ý rằng $n \to \infty$ tương đương với $k \to \infty$, ta thu được

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_{ni} - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} x_j \right\| \to 0 \text{ khi } n \to \infty. \tag{4.2.17}$$

Từ (4.2.8), (4.2.12) và (4.2.17),

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_{ni}(\omega) - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} x_j \right\| \to 0 \text{ h.c.c. khi } n \to \infty.$$

Điều này đảm bảo rằng

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} x_j \in s\text{-}\liminf_{n\to\infty} G_n(\omega) \text{ h.c.c.}$$

Sử dụng Định lý 1.3.1, ta nhận được

$$\overline{\text{co}} X \subset s\text{-}\liminf_{n\to\infty} G_n(\omega) \text{ h.c.c.}$$

Với mỗi $x^* \in \mathbf{B}^*$, theo giả thiết, ta suy ra $\{s(x^*, F_{ni}) : n \geq 1, 1 \leq i \leq n\}$ là mảng tam giác các biến ngẫu nhiên độc lập theo hàng, thuộc $\mathbf{L}^p$. Nếu đặt $h_{ni} = s(x^*, F_{ni}) - \mathbb{E}(s(x^*, F_{ni}))$ thì $\{h_{ni} : n \geq 1, 1 \leq i \leq n\}$ là mảng tam giác các biến ngẫu nhiên độc lập theo hàng, thuộc $\mathbf{L}^p$ và

$$\mathbb{E}h_{ni} = \mathbb{E}(s(x^*, F_{ni})) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(s(x^*, F_{ni}))) = 0.$$

Khi đó,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{E}(\Psi(|h_{ni}|))}{\Psi(n)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{E}(\Psi(|s(x^*, F_{ni}) - \mathbb{E}s(x^*, F_{ni})|))}{\Psi(n)} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{E}(\Psi(|s(x^*, F_{ni})| + |\mathbb{E}s(x^*, F_{ni})|))}{\Psi(n)} \text{ (do } \Psi(|t|) \uparrow) \\
&\leq C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{E}(\Psi(|s(x^*, F_{ni})|) + \Psi(|\mathbb{E}s(x^*, F_{ni})|))}{\Psi(n)} \text{ (theo (4.2.2))} \\
&\leq C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{E}(\Psi(|s(x^*, F_{ni})|) + \Psi(\mathbb{E}|s(x^*, F_{ni})|))}{\Psi(n)} \text{ (do } \Psi(|t|) \uparrow) \\
&\leq C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{E}(\Psi(|s(x^*, F_{ni})|) + \mathbb{E}(\Psi(|s(x^*, F_{ni})|)))}{\Psi(n)} \\
&\qquad \text{(do tính lồi của hàm } \Psi(t))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{E}(\Psi(|s(x^*, F_{ni})|))}{\Psi(n)} \\
&\leq 2C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{E}(\Psi(\|x^*\|.\|F_{ni}\|))}{\Psi(n)} \\
&\leq 2C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{E}(\Psi(\|F_{ni}\|))}{\Psi(n)} < \infty \\
&\qquad\qquad \text{(do } \Psi(|t|) \uparrow \text{ và do (4.2.3))}, \qquad (4.2.18)
\end{aligned}
$$

và

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{E}\|h_{ni}\|^p}{n^p} \right)^{p.k} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{2^{p-1}(\mathbb{E}|s(x^*, F_{ni})|^p + \mathbb{E}|\mathbb{E}(s(x^*, F_{ni}))|^p)}{n^p} \right)^{p.k} \\
&\qquad\qquad \text{(theo bất đẳng thức } c_r) \\
&\leq 2^{p^2 k} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{E}|s(x^*, F_{ni})|^p}{n^p} \right)^{p.k} \\
&\leq 2^{p^2 k} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{E}\|F_{ni}\|^p}{n^p} \right)^{p.k} < \infty \ \text{ (theo (4.2.4))} \qquad (4.2.19)
\end{aligned}
$$

với k là một số nguyên dương nào đó.

Áp dụng [12, Định lý 2.2, Định lý 2.3, Định lý 2.4] cho mảng tam giác các biến ngẫu nhiên $\{h_{ni} : n \geq 1, 1 \leq i \leq n\}$, ta nhận được

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h_{ni}(\omega) \to 0 \text{ h.c.c. khi } n \to \infty.$$

Điều này có nghĩa là

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} s(x^*, F_{ni}(\omega)) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(s(x^*, F_{ni})) \to 0 \text{ h.c.c. khi } n \to \infty. \qquad (4.2.20)$$

Hơn nữa, từ các điều kiện (4.2.5), (4.2.6) và Bổ đề 3.1.1,

$$\mathbb{E}s(x^*, F_{ni}) = s(x^*, \mathrm{cl}\mathbb{E}F_{ni}) \to s(x^*, X) < \infty \text{ khi } i \to \infty. \qquad (4.2.21)$$

Do giả thiết $\{F_{ni} : n \geq 1, 1 \leq i \leq n\}$ có kỳ vọng bị chặn nên $\{s(x^*, F_{ni}) : n \geq 1, 1 \leq i \leq n\}$ cũng có kỳ vọng bị chặn. Theo Bổ đề 4.1.3,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(s(x^*, F_{ni})) \to s(x^*, X) \text{ khi } n \to \infty. \qquad (4.2.22)$$

Từ (4.2.20) và (4.2.22), ta suy ra

$$s(x^*, G_n(\omega)) \to s(x^*, X) \text{ h.c.c. khi } n \to \infty.$$

Từ đó, áp dụng Định lý 1.2.5,

$$w\text{-}\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathrm{cl}\sum_{i=1}^{n} F_{ni}(\omega) \subset \overline{\mathrm{co}}X \text{ h.c.c.}$$

Vì vậy, ta nhận được luật số lớn theo hội tụ Mosco.

Lập luận tương tự như trong chứng minh của Định lý 3.2.1 ta thu được luật số lớn theo hội tụ Wijsman. □

4.2.2 Chú ý. Trong Định lý 4.2.1, nếu điều kiện (4.2.1) được thỏa mãn với $r = 0$ hoặc $r = 1$ thì có thể lược bỏ điều kiện (4.2.4).

Định lý tiếp theo là một mở rộng các kết quả của A. Bozorgnia, R. F. Patterson và R. L. Taylor [12, Định lý 2.2, Định lý 2.3, Định lý 2.4] cho trường hợp các biến ngẫu nhiên đa trị.

4.2.3 Định lý. *Giả sử $\{F_{ni} : n \geq 1, 1 \leq i \leq n\}$ là một mảng tam giác các biến ngẫu nhiên đa trị độc lập theo hàng, nhận giá trị trên không gian các tập con đóng của một không gian Rademacher dạng p ($p \in (1, 2]$). Giả sử $\{a_n : n \geq 1\}$ là dãy tăng ngặt các số thực dương sao cho $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ và giả sử $\Psi(t)$ là hàm số liên tục, chẵn, nhận giá trị dương sao cho*

$$\frac{\Psi(|t|)}{|t|^r} \uparrow \text{ và } \frac{\Psi(|t|)}{|t|^{r+p-1}} \downarrow \text{ khi } |t| \uparrow \tag{4.2.23}$$

với r là số nguyên không âm nào đó. Khi đó, nếu

$$+)\ 0 \in \mathbb{E}(F_{ni}, \mathcal{A}_{F_{ni}}), \tag{4.2.24}$$

$$+)\ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{E}(\Psi(\|F_{ni}\|))}{\Psi(a_n)} < \infty, \tag{4.2.25}$$

$$+)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{E}\|F_{ni}\|^p}{a_n^p}\right)^{p.k} < \infty, \tag{4.2.26}$$

với k là một số nguyên dương nào đó, thì

$$0 \in s\text{-}\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \mathrm{cl} \sum_{i=1}^{n} F_{ni}(\omega) \ h.c.c. \tag{4.2.27}$$

Chứng minh. Với mỗi $n \geq 1, 1 \leq i \leq n$, từ giả thiết (4.2.24), tồn tại $f_{ni} \in \mathcal{S}^1_{F_{ni}}(\mathcal{A}_{F_{ni}})$ sao cho $\mathbb{E} f_{ni} = 0$.

Hơn nữa, do $\{F_{ni} : n \geq 1, 1 \leq i \leq n\}$ là mảng tam giác các biến ngẫu nhiên đa trị độc lập theo hàng và do f_{ni} là $\mathcal{A}_{F_{ni}}$-đo được, nên mảng tam giác $\{f_{ni} : n \geq 1, 1 \leq i \leq n\}$ cũng độc lập theo hàng.

Lập luận như trong chứng minh của Định lý 4.2.3, $\Psi(|t|) \uparrow$ khi $|t| \uparrow$. Do đó $\Psi(\|f_{ni}(\omega)\|) \leq \Psi(\|F_{ni}(\omega)\|)$ với mọi $n \geq 1$, $1 \leq i \leq n$, $\omega \in \Omega$.

Kết hợp điều này với các giả thiết của định lý, ta thu được

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{E}(\Psi(\|f_{ni}\|))}{\Psi(a_n)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{E}(\Psi(\|F_{ni}\|))}{\Psi(a_n)} < \infty$$

và

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{E}\|f_{ni}\|^p}{a_n^p} \right)^{p.k} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{E}\|F_{ni}\|^p}{a_n^p} \right)^{p.k} < \infty,$$

với k là số nguyên dương nào đó.

Từ đó, áp dụng [12, Định lý 2.2, Định lý 2.3, Định lý 2.4],

$$\frac{1}{a_n} \sum_{i=1}^{n} f_{ni}(\omega) \to 0 \text{ h.c.c. khi } n \to \infty.$$

Điều này kéo theo (4.2.27). □

4.2.4 Chú ý. Trong Định lý 4.2.3, nếu điều kiện (4.2.23) được thỏa mãn với $r = 1$ thì có thể lược bỏ điều kiện (4.2.26), và nếu điều kiện (4.2.23) được thỏa mãn với $r = 0$ thì có thể lược bỏ các điều kiện (4.2.24), (4.2.26).

Ví dụ sau đây sẽ chứng tỏ kết luận của Định lý 4.2.3 không thể thay thế bởi kết luận mạnh hơn

$$\text{M-}\lim \frac{1}{a_n} \mathrm{cl} \sum_{i=1}^{n} F_{ni}(\omega) = \{0\} \ \text{ h.c.c.}$$

4.2.5 Ví dụ. Cho $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$ và $p = 2$. Giả sử $\Psi(t) = |t|^{3+\varepsilon}$, trong đó $\varepsilon \in (0,1)$ là một số thực cố định. Khi đó, $\Psi(t)$ là hàm số liên tục, chẵn, nhận giá trị dương và thỏa mãn

$$\frac{\Psi(|t|)}{|t|^3} \uparrow, \ \frac{\Psi(|t|)}{|t|^4} \downarrow \text{ khi } |t| \uparrow \quad (r = 3).$$

Giả sử rằng $F_{ni}(\omega) = [-1,1]$ với mọi $\omega \in \Omega$, $n \geq 1$, $1 \leq i \leq n$. Khi đó $0 \in \mathbb{E}(F_{ni}, \mathcal{A}_{F_{ni}})$ và $\mathcal{A}_{F_{ni}} = \{\emptyset, \Omega\}$. Do đó, $\{F_{ni} : n \geq 1, 1 \leq i \leq n\}$ là mảng các biến ngẫu nhiên đa trị độc lập theo hàng.

Cho $a_n = n$ với mọi $n \geq 1$. Khi đó $\|F_{ni}\|(\omega) = 1$ và $\dfrac{\|F_{ni}\|}{a_n}(\omega) = \dfrac{1}{n}$ với mọi $\omega \in \Omega$, $n \geq 1$, $1 \leq i \leq n$.

Từ đó,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{E}(\Psi(\|F_{ni}\|))}{\Psi(a_n)} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^{3+\varepsilon}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2+\varepsilon}} < \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{E}\|F_{ni}\|^2}{a_n^2}\right)^{2k} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2}\right)^{2k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} < \infty.$$

Như vậy, tất cả các giả thiết của Định lý 4.2.3 được thỏa mãn. Tuy nhiên,

$$\text{M-}\lim \frac{1}{a_n} \mathrm{cl} \sum_{i=1}^{n} F_{ni}(\omega) = [-1,1] \neq \{0\} \text{ h.c.c.}$$

Trong chứng minh của Định lý 4.2.1, để sử dụng Bổ đề 4.1.3 cho các mảng tam giác $\{\mathbb{E}(s(x_j^*, F_{ni})) - s(x_j^*, X) : n \geq 1, 1 \leq i \leq n\}$ và $\{z_{ki}^{(l,j)} : k \geq 1, 1 \leq i \leq k\}$, ta cần điều kiện "kỳ vọng bị chặn" của mảng tam giác $\{F_{ni} : n \geq 1, 1 \leq i \leq n\}$. Ví dụ sau đây sẽ chứng tỏ rằng điều kiện "kỳ vọng bị chặn" không được suy ra từ các điều kiện còn lại, nghĩa là, có thể chọn được mảng tam giác các biến ngẫu nhiên đa trị $\{F_{ni} : n \geq 1, 1 \leq i \leq n\}$ không thỏa mãn điều kiện "kỳ vọng bị chặn" mặc dù các điều kiện còn lại được thỏa mãn.

4.2.6 Ví dụ. Giả sử $\mathfrak{X}$, p, a_n và hàm $\Psi(t)$ được định nghĩa như trong Ví dụ 4.2.5. Chọn $F_{ni}(\omega) = [-n^\beta, n^\beta]$ với mọi $\omega \in \Omega$, $n \geq 1$, $1 \leq i \leq n$, trong đó số thực dương β sẽ chỉ ra ở phần sau. Khi đó $\{F_{ni} : n \geq 1, 1 \leq i \leq n\}$ là một mảng tam giác các biến ngẫu nhiên độc lập theo hàng và thỏa mãn $0 \in \mathbb{E}(F_{ni}, \mathcal{A}_{F_{ni}})$.

Hơn nữa,

$$\|F_{ni}\|(\omega) = \sup\{\|x\| : x \in F_{ni}(\omega)\} = \sup\left\{|x| : x \in \left[-n^{\beta}, n^{\beta}\right]\right\} = n^{\frac{\alpha}{3+\varepsilon}},$$
$$\frac{\|F_{ni}\|}{a_n}(\omega) = \frac{\|F_{ni}\|}{n}(\omega) = \sup\left\{|x| : x \in \left[-\frac{1}{n^{1-\beta}}, \frac{1}{n^{1-\beta}}\right]\right\} = \frac{1}{n^{1-\beta}},$$

trong đó $\alpha = \beta(3+\varepsilon) > 0$.

Từ đó,

$$\frac{\mathbb{E}(\Psi(\|F_{ni}\|))}{\Psi(a_n)} = \frac{\Psi(n^{\frac{\alpha}{3+\varepsilon}})}{\Psi(n)} = \frac{n^{\alpha}}{n^{3+\varepsilon}} = \frac{1}{n^{3+(\varepsilon-\alpha)}},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbb{E}(\Psi(\|F_{ni}\|))}{\Psi(a_n)} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^{3+(\varepsilon-\alpha)}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2+(\varepsilon-\alpha)}} < \infty,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbb{E}\|F_{ni}\|^2}{a_n^2}\right)^{2k} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^{2(1-\beta)}}\right)^{2k}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{1-2\beta}}\right)^{2k} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{(2-4\beta)k}} < \infty.$$

Ta chọn β thỏa mãn

$$\begin{cases} 0 < \beta = \dfrac{\alpha}{3+\varepsilon}, \\ 2 + (\varepsilon - \alpha) > 1, \\ (2-4\beta)k > 1. \end{cases} \tag{4.2.28}$$

Hệ (4.2.28) tương đương với

$$\begin{cases} 0 < \beta < \dfrac{1+\varepsilon}{3+\varepsilon}, \\ 0 < \beta < \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4k}. \end{cases} \tag{4.2.29}$$

Số thực β trong hệ (4.2.29) luôn tồn tại, chẳng hạn $0 < \beta < \dfrac{1}{4}$. Như vậy, trong ví dụ này, rõ ràng điều kiện "kỳ vọng bị chặn" của mảng tam giác $\{F_{ni} : n \geq 1, 1 \leq i \leq n\}$ không được thỏa mãn, trong khi các điều kiện khác của Định lý 4.2.1 được thỏa mãn.

Trong [40, Bổ đề 6], F. Hiai đã chỉ ra rằng nếu F là biến ngẫu nhiên đa trị khả tích và nếu $\mathbb{E}F = \{x\}$ $(x \in \mathfrak{X})$ thì $F(\omega) = \{f(\omega)\}$ h.c.c., với f là phần tử ngẫu nhiên nào đó thuộc $\mathbf{L}^1(\mathfrak{X})$. Do đó, trong Định lý 4.2.3, điều kiện phần tử ngẫu nhiên có kỳ vọng bằng 0 trong trường hợp đơn trị ([12, Định lý 2.2, Định lý 2.3])

được mở rộng thành $0 \in \mathbb{E}(F_{ni}, \mathcal{A}_{F_{ni}})$. Hướng mở rộng này cũng được F. Ezzaki sử dụng trong [26] để định nghĩa dãy hiệu martingale đa trị và còn được các tác giả Nguyễn Văn Quảng và Nguyễn Trần Thuận sử dụng khi thiết lập luật số lớn cho mảng phù hợp các biến ngẫu nhiên nhận giá trị mờ trên không gian Banach (xem [64]).

Hai ví dụ tiếp theo sẽ chứng tỏ rằng điều kiện $0 \in \mathbb{E}(F, \mathcal{A}_F)$ không tương đương với điều kiện $0 \in \mathbb{E}F$, trong đó F là một biến ngẫu nhiên đa trị.

4.2.7 Ví dụ. Giả sử $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A}$ là σ-đại số các tập đo được Lebesgue trên $[0,1]$ và $\mathbb{P}$ là độ đo Lebesgue trên $[0,1]$.

Biến ngẫu nhiên đa trị $F : [0,1] \to c(\mathbb{R})$ được định nghĩa bởi $F(\omega) = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ với mọi $\omega \in [0,1]$. Khi đó, $\mathcal{A}_F = \{\emptyset, [0,1]\}$. Xét $f \in \mathcal{S}_F^1$ xác định bởi

$$f(\omega) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{nếu} \quad \omega \in [0, \frac{1}{2}], \\ \frac{1}{2} & \text{nếu} \quad \omega \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Do $\mathbb{E}f = 0$ nên $0 \in \mathbb{E}F$ (ở đây, $\mathbb{E}F = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$). Tuy nhiên, $0 \notin \mathbb{E}(F, \mathcal{A}_F)$ (do $\mathbb{E}(F, \mathcal{A}_F) = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$).

Sau đây, chúng tôi đưa ra ví dụ mà trong đó biến ngẫu nhiên đa trị khác ánh xạ hằng.

4.2.8 Ví dụ. Giả sử $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A}$ là σ-đại số các tập đo được Lebesgue trên $[0,1]$ và $\mathbb{P}$ là độ đo Lebesgue trên $[0,1]$.

Ta định nghĩa biến ngẫu nhiên đa trị $F : [0,1] \to c(\mathbb{R})$ như sau

$$F(\omega) = \begin{cases} \{-\frac{1}{2}, 1\} & \text{nếu} \quad \omega \in [0, \frac{1}{2}], \\ \{-\frac{1}{2}\} & \text{nếu} \quad \omega \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Từ đó, $f \in \mathcal{S}_F^1$ khi và chỉ khi f chỉ nhận giá trị thuộc vào $\{-\frac{1}{2}, 1\}$ sao cho

$$\mathbb{P}(f = 1) = p,$$
$$\mathbb{P}(f = -\frac{1}{2}) = 1 - p$$

với $p \in [0, \frac{1}{2}]$. Khi đó,

$$\mathbb{E}f = 1.p + (-\frac{1}{2})(1-p) = \frac{3}{2}p - \frac{1}{2}$$

và do đó $\mathbb{E}F = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$. Điều này chứng tỏ $0 \in \mathbb{E}F$.

Tiếp theo, do $\mathcal{A}_F = \{\emptyset, [0, \frac{1}{2}], (\frac{1}{2}, 1], [0, 1]\}$ nên nếu $f \in \mathcal{S}_F^1(\mathcal{A}_F)$ thì chỉ có thể xảy ra hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $f(\omega) = -\frac{1}{2}$ với mọi $\omega \in [0, 1]$. Khi đó $\mathbb{E}f = -\frac{1}{2}$.

Trường hợp 2:

$$f(\omega) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{nếu} \quad \omega \in (\frac{1}{2}, 1], \\ 1 & \text{nếu} \quad \omega \in [0, \frac{1}{2}]. \end{cases}$$

Khi đó $\mathbb{E}f = (-\frac{1}{2}).\frac{1}{2} + 1.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Do đó $\mathbb{E}(F, \mathcal{A}_F) = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\}$. Điều này dẫn tới $0 \notin \mathbb{E}(F, \mathcal{A}_F)$. Như vậy, điều kiện $0 \in \mathbb{E}F$ không tương đương với điều kiện $0 \in \mathbb{E}(F, \mathcal{A}_F)$.

Kết luận của Chương 4

Trong chương này, luận án đã giải quyết được những vấn đề sau:

- Thiết lập dạng định lý Stolz cho trường hợp mảng tam giác.

- Thiết lập luật số lớn theo hội tụ Mosco và hội tụ Wijsman đối với mảng tam giác các biến ngẫu nhiên đa trị thỏa mãn: độc lập theo hàng và nhận giá trị trên không gian các tập con đóng của không gian Rademacher dạng p.

- Đưa ra một số ví dụ minh họa kết quả chính.

KẾT LUẬN CHUNG VÀ KIẾN NGHỊ

1. Kết luận chung

Luận án đã thu được các kết quả chính sau đây:

- Thiết lập một số kết quả hội tụ đối với các tôpô Mosco và Wijsman cho mảng nhiều chỉ số các tập con đóng của không gian Banach và cho mảng nhiều chỉ số các biến ngẫu nhiên đa trị.

- Thiết lập định lý ergodic Birkhoff dạng nhiều chiều cho phần tử ngẫu nhiên nhận giá trị trên không gian Banach thực, khả ly.

- Thiết lập định lý ergodic Birkhoff đa trị theo các loại hội tụ Mosco và Wijsman đối với cấu trúc mảng hai chiều.

- Thiết lập luật số lớn cho mảng các phần tử ngẫu nhiên 2-hoán đổi được.

- Thiết lập luật số lớn theo hội tụ Mosco và hội tụ Wijsman đối với mảng hai chỉ số các biến ngẫu nhiên đa trị cho các trường hợp: độc lập đôi một cùng phân phối, hoặc độc lập và nhận giá trị trên không gian các tập con đóng của không gian Rademacher dạng p, hoặc phụ thuộc 2-hoán đổi được.

- Thiết lập luật số lớn ứng với hội tụ Mosco và hội tụ Wijsman đối với mảng tam giác các biến ngẫu nhiên đa trị thỏa mãn: độc lập theo hàng và nhận giá trị trên không gian các tập con đóng của không gian Rademacher dạng p.

2. Kiến nghị về những hướng nghiên cứu tiếp theo

Trong thời gian tới, chúng tôi dự định nghiên cứu các vấn đề sau đây:

- Các định lý giới hạn dạng luật yếu số lớn theo hội tụ Mosco và hội tụ Wijsman đối với dãy và mảng các biến ngẫu nhiên đa trị.

- Các định lý ergodic đa trị theo các loại hội tụ: Mosco, Wijsman, Slice, Hausdorff, ... đối với trường hợp một chiều và trường hợp nhiều chiều.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH LIÊN QUAN TRỰC TIẾP ĐẾN LUẬN ÁN

1. C. Castaing, N. V. Quang and D. X. Giap (2012), Mosco convergence of strong law of large numbers for double array of closed valued random variables in Banach space, *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, **13** (4), 615-636.

2. C. Castaing, N. V. Quang and D. X. Giap (2012), Various convergence results in strong law of large numbers for double array of random sets in Banach spaces, *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, **13** (1), 1-30.

3. D. X. Giap and N. V. Quang (2016), Multidimensional and multivalued ergodic theorems for measure-preserving transformations, *Set-Valued and Variational Analysis*, DOI 10.1007/s11228-016-0361-z (*Available online January 2016*).

4. N. V. Quang and D. X. Giap (2013), Mosco convergence of SLLN for triangular arrays of rowwise independent random sets, *Statistics and Probability Letters*, **83**, 1117-1126.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Z. Artstein and J. C. Hansen (1985), Convexification in limit laws of random sets in Banach spaces, *The Annals of Probability*, **13**, 307-309.

[2] Z. Artstein and S. Hart (1981), Law of large numbers for random sets and allocation processes, *Mathematics of Operations Research*, **6** (4), 485-492.

[3] Z. Artstein and R. A. Vitale (1975), A strong law of large numbers for random compact sets, *The Annals of Probability*, **3** (5), 879-882.

[4] R. J. Aumann (1965), Integrals of set-valued functions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **12**, 1-12.

[5] J. Bán (1991), Ergodic theorems for random compact sets and fuzzy variables in Banach spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, **44**, 71-82.

[6] G. Beer (1985), On convergence of closed sets in a metric space and distance functions, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **31**, 421-432.

[7] G. Beer (1987), Metric spaces with nice closed balls and distance functions for closed sets, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **35**, 81-96.

[8] G. Beer (1991), A polish topology for the closed subsets of a polish space, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **113** (4), 1123-1133.

[9] G. Beer (1993), *Topologies on Closed and Closed Convex Sets*, Mathematics and Its Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[10] G. D. Birkhoff (1931), Proof of the ergodic theorem, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **17** (12), 656-660.

[11] J. Borwein, J. Vanderwerff (1994), Dual Kadec-Klee norms and the relationships between Wijsman, Slice, and Mosco convergence, *The Michigan Mathematical Journal*, **41** (2), 371-387.

[12] A. Bozorgnia, R. F. Patterson and R. L. Taylor (1997), Chung type strong laws for arrays of random elements and bootstrapping, *Stochastic Analysis and Applications*, **15** (5), 651-669.

[13] C. Castaing, N. V. Quang and D. X. Giap (2012), Mosco convergence of strong law of large numbers for double array of closed valued random variables in Banach space, *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, **13** (4), 615-636.

[14] C. Castaing, N. V. Quang and D. X. Giap (2012), Various convergence results in strong law of large numbers for double array of random sets in Banach spaces, *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, **13** (1), 1-30.

[15] C. Castaing, N. V. Quang and N. T. Thuan (2012), A new family of convex weakly compact valued random variables in Banach space and applications to laws of large numbers, *Statistics and Probability Letters*, **82**, 84-95.

[16] C. Castaing and M. Valadier (1977), *Convex analysis and measurable multifunctions*, Lecture Notes in Mathematics, **580**, Springer-Verlag, Berlin.

[17] C. Choirat, C. Hess and R. A. Seri (2003), A functional version of the Birkhoff ergodic theorem for a normal integrand: A variational approach, *The Annals of Probability*, **31** (1), 63-92.

[18] F. Clarke (2013), *Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control*, Graduate Texts in Mathematics, **264**, Springer-Verlag London, 606 pages.

[19] A. Colubi, M. López-Díaz, J. S. Domínguez-Menchero and M. A. Gil (1999), A generalized strong law of large numbers, *Probability Theory and Related Fields*, **114**, 401-417.

[20] N. Cressie (1978), A strong limit theorem for random sets, *Advances in Applied Probability*, **10**, 36-46.

[21] N. Dunford (1951), An individual ergodic theorem for non-commutative transformations, *Acta Scientiarum Mathematicarum* (*Szeged*), **14**, 1-4.

[22] N. Dunford and J. T. Schwartz (1956), Convergence almost everywhere of operator averages, *J. Rational Mech. Anal.*, **5**, 129-178.

[23] N. Etemadi (1997), Criteria for the strong law of large numbers for sequences of arbitrary random vectors, *Statistics and Probability Letters*, **33**, 151-157.

[24] N. Etemadi (1981), An elementary proof of the strong law of large numbers, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, **55**, 119-122.

[25] N. Etemadi and M. Kaminski (1996), Strong law of large numbers for 2-exchangeable random variables, *Statistics and Probability Letters*, **28**, 245-250.

[26] F. Ezzaki (1996), Mosco convergence of multivalued SLLN, *Vietnam Journal of Mathematics*, **24** (4), 399-416.

[27] N. A. Fava (1972), Weak type inequalities for product operators, *Studia Mathematica*, **42**, 271-288.

[28] R. Fortet and M. Kambouzia (1975), Ensembles aléatoires induits par une répartition ponctuelle aléatoire, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Série A et B* **280**, A1447-A1450.

[29] K. A. Fu and L. X. Zhang (2008), Strong laws of large numbers for arrays of rowwise independent random compact sets and fuzzy random sets, *Fuzzy Sets and Systems*, **159** (24), 3360-3368.

[30] D. X. Giap and N. V. Quang (2016), Multidimensional and multivalued ergodic theorems for measure-preserving transformations, *Set-Valued and Variational Analysis*, DOI 10.1007/s11228-016-0361-z (*Available online January 2016*).

[31] E. Giné, M. G. Hahn and J. Zinn (1983), *Limit theorems for random sets: An application of probability in Banach space results*, Probability in Banach Spaces IV (A. Beck and K. Jacobs, eds.), Lecture Notes in Mathematics, **990**, Springer-Verlag, Berlin, 112-135.

[32] A. Gut (2005), *Probability: A Graduate Course*, Springer-Verlag, New York.

[33] F. Hausdorff (1927), *Mengenlehre*, 3d ed., Springer, Berlin.

[34] C. Hess (1979), Théorème ergodique et loi forte des grands nombres pour des ensembles aléatoires, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Série A et B* **288**, 519-522.

[35] C. Hess (1983), Loi de probabilité des ensembles aléatoires à valeurs fermées dans un espace métrique séparable, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Série A et B* **296**, 883-886.

[36] C. Hess (1983), Loi de probabilité et indépendence des ensembles aléatoires à valeurs fermées dans un espace de Banach, *Séminaire d'Analyse Convexe de l'Université de Montpellier, Exposé* **7**.

[37] C. Hess (1984), Quelques théorèmes limites pour des ensembles aléatoires bornés ou non. *Séminaire d'Analyse Convexe de l'Université de Montpellier, Exposé* **12**.

[38] C. Hess (1985), Loi forte des grands nombres pour des ensembles aléatoires non bornés à valeurs dans un espace de Banach séparable, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Série A et B* **300**, 177-180.

[39] C. Hess (1999), The distribution of unbounded random sets and the multivalued strong law of large numbers in nonreflexive Banach spaces, *Journal of Convex Analysis*, **6** (1), 163-182.

[40] F. Hiai (1984), *Strong laws of large numbers for multivalued random variables*, Multifunctions and Integrands (G. Salinetti, ed.), Lecture Notes in Mathematics, **1091**, Springer-Verlag, Berlin, 160-172.

[41] F. Hiai (1985), Convergence of conditional expectation and strong law of large numbers for multivalued random variables, *Transactions of the American Mathematical Society*, **291** (2), 613-627.

[42] F. Hiai and H. Umegaki (1977), Integrals, conditional expectations and martingales of multivalued functions, *Journal of Multivariate Analysis*, **7**, 149-182.

[43] J. Hoffmann-Jørgensen and G. Pisier (1976), The law of large numbers and the central limit theorem in Banach spaces, *The Annals of Probability*, **4** (4), 587-599.

[44] H. Inoue (1991), A strong law of large numbers for fuzzy random sets, *Fuzzy Sets and Systems*, **41**, 285-291.

[45] H. Inoue and R. L. Taylor (2006), Law of large numbers for exchangeable random sets in Kuratowski-Mosco sense, *Stochastic Analysis and Applications*, **24** (2), 263-275.

[46] R. L. Jones and J. Olsen (1994), Multiparameter weighted ergodic theorems, *Canadian Journal of Mathematics*, **46** (2), 343-356.

[47] O. Kallenberg (1997), *Foundations of modern probability*, Springer, New York.

[48] D. G. Kendall (1974), *Foundations of a theory of random sets*, In Stochastic Geometry, ed. E. F. Harding and D. G. Kendall. Wiley, New York.

[49] U. Krengel (1985), *Ergodic theorems*, Walter de Gruyter Studies in Mathematics, **6**, Berlin-New York.

[50] M. Ledoux and M. Talagrand (1991), *Probability in Banach spaces. Isoperimetry and processes. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)*, Springer-Verlag, Berlin.

[51] S. Li, Y. Ogura and V. Kreinovich (2002), *Limit theorems and applications of set-valued and fuzzy set-valued random variables*, Theory and Decision Library, Series B: Mathematical and Statistical Methods, **43**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

[52] M. Lin and M. Weber (2007), Weighted ergodic theorems and strong laws of large numbers, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **27**, 511-543.

[53] M. Loève (1977), *Probability Theory, Vol. I, Fourth Edition*, Springer-Verlag, New York.

[54] R. Lucchetti (2006), *Convexity and Well-Posed Problems*, Springer, New York.

[55] G. Matheron (1975), *Random Sets and Integral Geometry*, Wiley, New York.

[56] U. Mosco (1969), Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities, *Advances in Mathematics*, **3**, 510-585.

[57] U. Mosco (1971), On the continuity of the Young-Fenchel transform, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **35**, 518-535.

[58] F. Mukhamedov, M. Mukhamedov and S. Temir (2008), On multiparameter weighted ergodic theorem for noncommutative $\mathcal{L}_p$-spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **343**, 226-232.

[59] J. v. Neumann (1932), Proof of the quasi-ergodic hypothesis, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **18** (1), 70-82.

[60] W. G. Padgett and R. L. Taylor (1973), *Lecture notes in Mathematics*, **360**, Berlin-Heidelberg-New York: Springer.

[61] M. L. Puri and D. A. Ralescu (1983), Strong law of large numbers for Banach space valued random sets, *The Annals of Probability*, **11** (1), 222-224.

[62] M. L. Puri and D. A. Ralescu (1986), Fuzzy random variables, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **114**, 409-422.

[63] N. V. Quang and D. X. Giap (2013), Mosco convergence of SLLN for triangular arrays of rowwise independent random sets, *Statistics and Probability Letters*, **83**, 1117-1126.

[64] N. V. Quang and N. T. Thuan (2012), Strong laws of large numbers for adapted arrays of set-valued and fuzzy-valued random variables in Banach space, *Fuzzy Sets and Systems*, **209**, 14-32.

[65] H. E. Robbins (1944), On the measure of a random set, *The Annals of Mathematical Statistics*, **15**, 70-74.

[66] H. E. Robbins (1945), On the measure of a random set, II, *The Annals of Mathematical Statistics*, **16**, 342-347.

[67] A. Rosalsky and L. V. Thanh (2006), Strong and weak laws of large numbers for double sums of independent random elements in Rademacher type p Banach spaces, *Stochastic Analysis and Applications*, **24**, 1097-1117.

[68] A. Rosalsky and L. V. Thanh (2009), Weak laws of large numbers for double sums of independent random elements in Rademacher type p and stable type p Banach spaces, *Nonlinear Analysis*, **71**, 1065-1074.

[69] P. Terán and I. Molchanov (2006), The law of large numbers in a metric space with a convex combination operation, *Journal of Theoretical Probability*, **19**, 875-898.

[70] R. A. Wijsman (1964), Convergence of sequences of convex sets, cones and functions, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **70**, 186-188.

[71] R. A. Wijsman (1966), Convergence of sequences of convex sets, cones and functions II, *Transactions of the American Mathematical Society*, **123**, 32-45.

[72] D. Williams (1997), *Probability with Martingales*, Cambridge University Press, New York.

[73] T. Yoshimoto (1976), An ergodic theorem for noncommutative operators, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **54**, 125-129.

[74] H. Ziat (2011), Ergodic theorem and strong law of large numbers for unbounded and nonconvex random sets, *International Journal of Mathematical Analysis*, **5** (48), 2375-2393.

[75] A. Zygmund (1951), An individual ergodic theorem for non-commutative transformations, *Acta Scientiarum Mathematicarum* (*Szeged*), **14**, 103-110.